ELECTRICITE ELEC-H-200 BA2

ELECTRICITE ELEC-H-200 BA2

1 Les équations de Maxwell	
1.1 Champs électrique et magnétique	1
1.2 Les équations de Maxwell	1
1.3 Grandeurs et unité	3
1.4 Rappels d'analyse vectorielle	
1.4.1 Formes intégrales	4
1.4.2 Opérateurs différentiels	4
1.4.3 Gradient	5
1.4.4 Divergence	6
1.4.5 Rotationnel	6
2 Electrostatique	
2.1 Introduction	7
2.2 Champ électrique et potentiel	7
2.3 Variation du champ électrique au travers d'une surface chargée	10
2.4 Énergie électrostatique	
2.4.1 Travail à fournir pour déplacer une charge	13
2.4.2 Energie électrostatique d'un ensemble de charges	13
2.4.3 Energie électrostatique d'une distribution continue de charge	s 15
2.5 Condensateurs	
2.5.1 Coefficient de capacité	16
2.5.2 Condensateur plan	17
2.5.3 Énergie emmagasinée dans un condensateur	18
2.6 Forces électrostatiques	
2.6.1 Condensateur plan à charge constante	19
2.6.2 Condensateur plan à potentiel constant	20
2.6.3 Force sur une charge de surface	20
2.7 Le dipôle électrique	22
3 Champ électrique dans la matière – Milieux diélectriques	
3.1 Polarisation	26
3.1.1 Introduction	26
3.1.2 Molecules non polaires – Polarisation indirecte	26
3.1.3 Molecules polaires – Polarisation d'orientation	27
3.1.4 Repartition dipolaire en volume – Vecteur polarisation	28
3.2 Champ créé par de la matière polarisée	•
3.2.1 Charges de polarisation	28
3.2.2 Interprétation des charges de polarisation	30
3.3 Equations électrostatiques en présence de diélectriques	
3.3.1 Champ de déplacement	32
3.3.2 Diélectriques linéaires	33
3.3.3 Conditions aux limites	34

	3.4	Energie dans les diélectriques	36
	3.5	Condensateurs	
		3.5.1 Condensateur plan	38
		3.5.2 Force sur un diélectrique entre plaques parallèles	40
		3.5.3 Expression générale de la capacité	42
Δ	м	ilieux conducteurs - Courants	
т	<u>4</u> 1	Courants et loi d'Ohm	
	7.1	4 1 1 Courant et densité de courant	44
		4.1.2 Courant de conduction et loi d'Ohm	46
		4 1 3 Aspect microscopique de la conduction	48
		4 1 4 Conductivité des matériaux	50
	42	Milieux conducteurs – Résistance	51
	43	Équation de continuité et loi des nœuds de Kirchhoff	53
	44	Exemples de calcul de résistances	55
		4.4.1 Conducteur cylindrique	55
		4 4 2 Conducteur torique	56
	4.5	Conditions aux limites	58
	4.6	Analogie entre résistance et canacité	59
	4.7	Temps de relaxation	60
	4.8	Puissance dissipée – Effet Joule	62
	4.9	Force électromotrice et loi des mailles	62
5	м	amátostatique	
5	5 1	Introduction	66
	5.1	Le champ magnétique	67
	53	Exemples de champ magnétique	07
	5.5	5.3.1 Conducteur rectiligne infini	68
		5.3.2 Solánoïde infini	08 60
		5.3.3 Tore	0) 70
	54	Le potentiel vecteur magnétique	70
	5.5	Formule de Biot-Savart	71
	5.5	Exemples de notentiel vecteur	15
	5.0	5.6.1 Segment de fil rectiligne	77
		5.6.2 Solénoïde infini	77
	57	Dinôle magnétique	78
	5.7	Forces et couples sur des courants	81
	5.9	Effet Hall	83
	5.10	Conditions aux limites	85
			00

6	Champ magnétique dans la matière - Milieux magnétiques	
	6.1 Diamagnétisme et paramagnétisme	
	6.1.1 Diamagnétisme	87
	6.1.2 Paramagnétisme	89
	6.1.3 Répartition dipolaire en volume – Vecteur magnétisation	90
	6.2 Champ créé par de la matière magnétisée	
	6.2.1 Courants de magnétisation	90
	6.2.2 Interprétation des courants de magnétisation	92
	6.3 Équations magnétostatiques en présence de milieux magnétiques	
	6.3.1 Loi d'Ampère dans un milieu magnétique	95
	6.3.2 Milieux magnétiques linéaires	96
	6.4 Exemples	
	6.4.1 Conducteur cylindrique	97
	6.4.2 Solénoïde infini	98
	6.5 Conditions aux limites	99
	6.6 Ferromagnétisme	
	6.6.1 Introduction	100
	6.6.2 Courbe de première aimantation et cycle d'hystérésis	101
	6.6.3 Matériaux ferromagnétiques	104
	6.6.4 Blindage magnétique	105
	6.6.5 Point de fonctionnement d'un aimant	106
	6.7 Circuits magnétiques	109
7	Les champs variables	
	7.1 La loi de Faraday	116
	7.2 Conducteurs en mouvement dans un champ magnétique	119
	7.3 Applications	
	7.3.1 Générateur de courant alternatif	122
	7.3.2 Moteur linéaire et force contre-électromotrice	123
	7.4 Energie magnétique	124
	7.5 Coefficients de couplage	126
	7.6 Exemples	
	7.6.1 Long solénoïde	131
	7.6.2 Tore	133
	7.7 Forces magnétiques	
	7.7.1 Barreau magnétique dans un solénoïde	134
	7.7.2 Force portante d'un aimant	135
	7.8 Le courant de déplacement	137
	7.9 Les équations de Maxwell dans la matière	139
	7.10 Conditions aux limites des champs électromagnétiques	141
	7.10 Conditions aux limites des champs électromagnétiques7.11 Les potentiel retardés	141 142
	 7.10 Conditions aux limites des champs électromagnétiques 7.11 Les potentiel retardés 7.12 Ondes électromagnétiques 7.12 Ondes des champs des des des des des des des des des de	141 142
	 7.10 Conditions aux limites des champs électromagnétiques 7.11 Les potentiel retardés 7.12 Ondes électromagnétiques 7.12.1 Ondes planes dans le vide 7.12.2 Despection despense militérie direction 	141 142 146
	 7.10 Conditions aux limites des champs électromagnétiques 7.11 Les potentiel retardés 7.12 Ondes électromagnétiques 7.12.1 Ondes planes dans le vide 7.12.2 Propagation dans un milieu linéaire 	141 142 146 149

8.1	Introduction		
	8.1.1 Le m	odèle de Kirchhoff	152
	8.1.2 Circu	it	154
	8.1.3 Référ	rences standard	155
	8.1.4 Puiss	ance relative à un dipôle	156
	8.1.5 Class	ification des circuits	157
	8.1.6 Lois	de Kirchhoff	158
8.2	Eléments		
	8.2.1 Résis	tance	160
	8.2.2 Sourc	ces indépendantes	163
	8.2.3 Capa	cité (ou condensateur)	164
	8.2.4 Induc	tance	167
	8.2.5 Notic	on de modèle	169
8.3	Résolution d	es circuits en transitoire	
	8.3.1 Circu	it RL	170
	8.3.2 Circu	it RC	172
	8.3.3 Circu	it RLC	174
	8.3.4 Tensi	on sinusoïdale appliquée au circuit RL	177
	8.3.5 Equa	tions des mailles	179
	8.3.6 Régir	ne sinusoïdal permanent	180
8.4	Régime sinu	soïdal - Phaseurs	100
0.1	8 4 1 Intro	Juction	181
	8 4 2 Repre	ésentation complexe des grandeurs sinusoïdales – Phaseurs	182
	843 Appli	ication aux équations différentielles	185
	844 Opér	ations sur les phaseurs	188
85	Circuits en re	égime sinusoïdal permanent	100
0.5	8 5 1 Notic	ans d'impédance et admittance	
	8511	Fléments de circuit	189
	8512	Impédance et admittance	107
	852 Lois	de Kirchhoff	19/
	853 Asso	ciations d'impédance	174
	8 5 3 1	Association en série	19/
	8532	Association en parallèle	195
	854 Equat	tions des mailles	196
86	Propriétés de	a circuite	170
0.0	8 6 1 Théor	rème de supernosition	202
	8.6.2 Théo	rème de Thévenin	202
	8621	Un nouvel élément : la source de courant	204
	8622	Théorème de Thévenin et de Norton	204
	8673	Exemples d'application du théorème de Thévenin	204
	8671	Sources réelles	207
	8675	Démonstration du théorème de Thévenin	209 200
	0.0.2.J 862 Tháo	rème de réciprocité	209 210
	0.0.3 THEO		∠10

3.7 Inductance mutuelle (ou transformateur)		
8.7.1 Equations de l'inductance mutuelle	211	
8.7.2 Signe de la mutuelle	212	
8.7.3 Association d'inductances couplées		
8.7.3.1 Association en série	213	
8.7.3.2 Association en parallèle	214	
8.7.4 Energie	215	
8.7.5 Analyse en transitoire	215	
8.7.6 Analyse en régime sinusoïdal	216	
8.7.7 Transformateur idéal	217	
8.7.8 Transformateur réel	219	
8.8 Puissances		
8.8.1 Fonctions périodiques – Terminologie		
8.8.1.1 Sinusoïde	221	
8.8.1.2 Fonction périodique	222	
8.8.2 Puissance instantanée et puissance active	223	
8.8.3 Expression de la puissance active	226	
8.8.4 Facteur de puissance	228	
8.8.5 Puissance complexe	229	
8.8.6 Adaptation d'impédance	231	
8.8.7 Puissance et superposition	232	
8.9 L'amplificateur opérationnel		
8.9.1 Introduction	235	
8.9.2 Amplificateur inverseur	237	
8.9.3 Amplificateur non inverseur	239	
8.9.4 Suiveur de tension	240	
8.9.5 Sommateur	241	
8.9.6 Dérivateur	241	
8.9.7 Intégrateur	242	
8.9.8 Amplificateur opérationnel non idéal	243	
8.10 Biportes		
8.10.1 Introduction	244	
8.10.2 Matrice impédance	246	
8.10.3 Matrice admittance	249	
8.10.4 Association en parallèle	252	
8.10.5 Matrices hybrides	253	
8.10.6 Matrices de transmission	255	
8.10.7 Mise en cascade de deux biportes	256	
8.10.8 Biporte entre source et utilisation	257	
8.10.9 Tableau de conversion	259	

1 LES ÉQUATIONS DE MAXWELL

1.1 Champs électrique et magnétique

Le moyen le plus commode pour décrire les effets électriques est d'utiliser la notion abstraite de champ

La force qui agit sur une charge donnée dépend de la position de cette charge, de sa vitesse \vec{v} et de sa valeur q. On peut écrire cette force sous la forme :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \tag{1.1}$$

On appelle \vec{E} le champ électrique et \vec{B} le champ magnétique au point où se trouve la charge. Ce qui est important, c'est que la force sur une charge test due à toutes les autres charges du monde peut se réduire à la donnée des deux vecteurs \vec{E} et \vec{B} .

Les champs électrique et magnétique sont donc définis en fonction de la force subie par une charge.

A tout point de l'espace (x,y,z) on associe donc deux vecteurs \vec{E} et \vec{B} qui peuvent varier avec le temps. Ce sont des champs vectoriels. On parlera également de champs électrique et magnétique en un point même s'il n'y a pas de charge en ce point. Les champs \vec{E} (x,y,z,t) et \vec{B} (x,y,z,t) sont donc responsables de la force que subirait à l'instant t, une charge située en (x,y,z) (avec la condition qu'en y plaçant la charge, cela ne modifierait pas les positions et les vitesses de toutes les autres charges responsables des champs).

La loi de la force (1.1) exprime comment les champs agissent sur une charge. Réciproquement les lois de l'électromagnétisme exprimeront comment les charges produisent les champs.

Les équations fondamentales de l'électromagnétisme, connues sous le nom d'équations de Maxwell, expriment le lien entre les sources (charges et courants) et les champs.

1.2 Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell, sous forme intégrale et sous forme différentielle sont, dans le vide :

I Loi de Gauss

$$\oint_{S} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_{0}}$$
(1.2)

flux de \vec{E} à travers toute surface fermée = $\frac{\text{charge totale intérieure}}{\epsilon_0}$

div
$$\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
 (1.3)

II Loi de Faraday

$$\oint_{c} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \vec{B} \cdot \vec{dS}$$
(1.4)

Circulation de \vec{E} le long d'une courbe fermée = $-\frac{d}{dt}$ (flux de \vec{B} à travers S)

$$\operatorname{rot} \vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t} \tag{1.5}$$

III (absence de charge magnétique)

$$\oint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = 0 \tag{1.6}$$

Flux de \vec{B} à travers toute surface fermée = 0

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{1.7}$$

IV Loi d'Ampère

$$\oint_{c} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{S} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$
(1.8)

Circulation de $\vec{B}\,$ le long d'une courbe fermée = $\mu_0\,$. courant à travers la courbe +

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}$$
 (flux de \vec{E} à travers S)

rot
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
 (1.9)

Conjointement avec la loi de la force de Lorentz

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{q} \left(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \right) \tag{1.10}$$

ces équations constituent la base de la théorie de l'électromagnétisme.

On remarque également qu'en prenant la divergence de l'équation (1.9), le premier membre est nul (la divergence d'un rotationnel est toujours nulle) et on a

$$\operatorname{div} \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \vec{E} \right) = 0$$
(1.3)
$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$
(1.11)

on retrouve donc l'équation qui exprime la conservation de la charge. Les équations de Maxwell impliquent donc que la charge est toujours conservée. La forme intégrale de (1.11) est :

$$\oint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = -\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \tag{1.12}$$

courant total sortant d'une surface fermée = - $\frac{d}{dt}$ (charge à l'intérieur)

1.3 Grandeurs et unités

∂t

et avec

Symbole	Nom / Grandeur	Unités
Ē	champ électrique	N/C ou V/m
Q	charge électrique	С
ρ	densité volumique de charge	C/m ³
Ē	champ magnétique	T (Tesla) ou Ns/Cm ou Wb/m ²
Ι	courant	A ou C/s
Ĵ	densité de courant	A/m ²
$\mu_0 = 4 \pi . 10^{-7}$	perméabilité du vide (valeur exacte)	H/m ou N/A ²
$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36 \pi}$	permittivité du vide (valeur approximative)	F/m ou C²/N.m²
$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$	vitesse de la lumière dans le vide 3.10 ⁸	m/s

1.4 Rappels d'analyse vectorielle

1.4.1 Formes intégrales

Elément de circulation d'un vecteur : $\vec{a} \cdot \vec{ds}$

Circulation d'un vecteur : $\int_{A}^{B} \vec{a} \cdot \vec{ds}$

Circulation d'un vecteur le long d'un parcours fermé: $\oint_c \vec{a} \cdot \vec{ds}$

Vecteur élément de surface : $\vec{dS} = dS \cdot \vec{l}_n$ (\vec{l}_n : vecteur unité sur la normale positive) Elément de flux d'un vecteur : $\vec{a} \cdot \vec{dS}$ Flux d'un vecteur sur une surface : $\int_S \vec{a} \cdot \vec{dS}$ Flux sortant d'une surface fermée : $\oint_S \vec{a} \cdot \vec{dS}$

1.4.2 Opérateurs différentiels

Gradient (d'un scalaire) : grad u (vecteur)

grad
$$u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{l}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{l}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{l}_z$$

Divergence (d'un vecteur) : div \vec{a} (scalaire)

div
$$\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Rotationnel (d'un vecteur) : rot \vec{a} (vecteur)

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_{z}}{\partial y} - \frac{\partial a_{y}}{\partial z}\right) \vec{l}_{x} + \left(\frac{\partial a_{x}}{\partial z} - \frac{\partial a_{z}}{\partial x}\right) \vec{l}_{y} + \left(\frac{\partial a_{y}}{\partial x} - \frac{\partial a_{x}}{\partial y}\right) \vec{l}_{z}$$

Laplacien (d'un scalaire) : Δu (scalaire)

$$\Delta u = \text{div grad } u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2}$$

Identités

rot grad
$$u = 0$$

div rot $\vec{a} = 0$

L'opérateur $\vec{\nabla}$ (nabla)

On utilise souvent le vecteur opérateur $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} = \vec{l}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{l}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{l}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

et on écrit alors

grad u =
$$\nabla$$
 u
div $\vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$
rot $\vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$
 $\Delta u = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) = \nabla^2 u$

1.4.3 Gradient

Le gradient constitue une généralisation de la notion de dérivée à des fonctions qui dépendent des trois variables d'espace.

Le gradient de u est un vecteur qui pointe dans la direction de croissance maximum de la fonction scalaire u. Le module |grad u| donne la pente le long de cette direction.

La variation de u le long d'un parcours \vec{dl} est le produit scalaire du gradient de u et du vecteur déplacement :

$$du = grad u \cdot dl$$

La différence des valeurs d'un champs scalaire u entre deux points A et B est égale à la circulation du gradient le long de n'importe quelle courbe allant de A à B :

$$u(B) - u(A) = \int_{A}^{B} \operatorname{grad} u \cdot d\vec{l}$$

1.4.4 Divergence

La divergence d'un vecteur, au point P, est le flux de ce vecteur, par unité de volume, au voisinage de P.

Si on considère un volume infinitésimal au point P, la divergence sera le flux sortant de la surface entourant ce volume, par unité de volume.

Théorème d'Ostrogradsky

 τ étant un volume limité par la surface fermée S :

$$\oint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \int_{\tau} \operatorname{div} \vec{\mathbf{a}} \cdot \mathrm{d\tau}$$

Le flux d'un vecteur sortant d'une surface fermée est égal à l'intégrale de volume de la divergence.

1.4.5 Rotationnel

Le rotationnel et lié à la circulation du vecteur le long d'un parcours fermé élémentaire. Comme le rotationnel est un vecteur, il faut parler de son module et de son orientation. Au point P, considérons un parcours fermé infinitésimal et la circulation du vecteur, par unité de surface, le long de ce parcours. Chaque parcours qu'on peut choisir sera situé dans un certain plan. Le rotationnel sera un vecteur dont la direction est normale au plan pour lequel la circulation est maximum. Son module sera la valeur maximum de cette circulation, par unité de surface.

Théorème de Stokes

S étant n'importe quelle surface s'appuyant sur le contour fermé c et limitée par lui :

$$\oint_{c} \vec{a} \cdot \vec{dl} = \int_{S} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{dS}$$

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé est égale au flux du rotationnel sur toute surface s'appuyant sur le contour. L'orientation relative du contour et de la normale à la surface est déterminée par la règle du tire-bouchon.

2 ELECTROSTATIQUE

2.1 Introduction

Le cas <u>statique</u> est celui où toutes les sources sont stationnaires. Toutes les charges sont fixes dans l'espace, ou bien si elles bougent, elles forment des courants continus, de sorte que ρ et \vec{J} sont constants dans le temps.

Dans ces conditions les dérivées des champs par rapport au temps sont nulles et les équations de Maxwell, dans le vide, deviennent :

div $\vec{E} = \frac{\rho}{1}$	(2.1)
ε ₀	()

$$\operatorname{rot} \vec{\mathrm{E}} = 0 \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{2.3}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{2.4}$$

Il n'y a plus de couplage entre \vec{E} et \vec{B} , le champ électrique n'apparaît que dans les deux premières équations et le champ magnétique dans les deux autres. Dans le cas statique on peut donc étudier séparément l'électricité et le magnétisme.

2.2 Champ électrique et potentiel

L'électrostatique est donc basé sur les deux premières équations de Maxwell, qui s'écrivent sous forme différentielle et intégrale :

$$\int \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
(2.5)

$$\oint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$
(2.6)

$$\int \operatorname{rot} \vec{\mathrm{E}} = 0 \tag{2.7}$$

$$\oint_{\mathbf{c}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = 0 \tag{2.8}$$

On rappelle ici les résultats que l'on obtient à partir de ces équations.

Le champ électrique produit par une charge ponctuelle isolée q est :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{l}_R}{R^2}$$
(2.9)

et pour une charge répartie en volume :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho}{R^2} \vec{I}_R d\tau$$
(2.10)

où l'intégrale porte sur les volumes chargés. Le vecteur \hat{R} qui intervient dans (2.10) est celui qui joint le point courant d'intégration $d\tau$ au point P où on calcule le champ. Le vecteur unité \vec{l}_R n'est donc pas une constante, sa direction varie au cours de l'intégration, et il ne peut donc pas sortir de l'intégrale !

La force sur une charge, en électrostatique, est

$$\vec{F} = q \vec{E} \tag{2.11}$$

et donc le champ électrique est une force par unité de charge.

La relation (2.8) exprime que la circulation de \vec{E} le long de tout parcours fermé est nulle. Par conséquent la circulation de \vec{E} entre deux points a et b (cela représente un travail par unité de charge) ne dépend pas du trajet suivi mais seulement des extrémités. On peut donc écrire

$$V(b) - V(a) = -\int_{a}^{b} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$
(2.12)

et

$$\vec{E} = -\text{grad V}$$
 (2.13)

La fonction scalaire V est le <u>potentiel électrique</u>. Cette fonction V est définie à une constante près, ce qui n'affecte pas la différence de potentiel entre deux points. Choisir cette constante revient à choisir le point de référence où le potentiel est nul. Le plus souvent on choisit de fixer le zéro de potentiel à l'infini, c'est-à-dire en un point infiniment éloigné des charges.

L'unité de potentiel est le J/C ou volt.

Le potentiel d'une charge ponctuelle est

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R}$$
(2.14)

et pour une charge répartie en volume

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho}{R} d\tau$$
(2.15)

Aussi bien le champ que le potentiel respectent le <u>principe de superposition</u> : le champ et le potentiel dus à plusieurs charge est la somme des champs et des potentiels dus à chaque charge séparément.

En reprenant la forme locale de la loi de Gauss (2.5) et en exprimant que le champ électrostatique dérive d'un potentiel (2.13), on obtient :

div (-grad V) =
$$\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

 $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
(2.16)

C'est l'équation locale du potentiel, appelée <u>équation de Poisson</u>, qui exprime qu'en chaque point, le Laplacien du potentiel est proportionnel à la densité de charges. En coordonnées cartésiennes, cette équation s'écrit :

$$\Delta \mathbf{V} = \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

En un point où il n'y a pas de charge, $\rho = 0$, et l'équation de Poisson se réduit à <u>l'équation</u> <u>de Laplace</u>

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{0} \tag{2.17}$$

L'expression (2.15) pour le potentiel est donc la solution de l'équation de Poisson dans le cas général.

Résoudre un problème d'électrostatique consiste à trouver le champ électrique pour une certaine configuration. Si les positions de toutes les charges sont connues, $\rho(x,y,z)$ est donc une fonction donnée, et on peut calculer \vec{E} à partir de l'équation (2.10). L'équation (2.10) est cependant une intégrale vectorielle et il est souvent plus facile (ou moins difficile) de calculer le potentiel à partir de (2.15) qui est une intégrale scalaire, et d'en déduire le champ en prenant le gradient. Lorsque la symétrie du problème permet d'utiliser la forme intégrale de la loi de Gauss (2.6), ce sera toujours, et de loin, la méthode la plus efficace.

Dans d'autres problèmes, la position des charges n'est pas connue a priori. On connaît par exemple la charge totale d'un conducteur (et pas sa répartition précise dans l'espace) ou le potentiel du conducteur. Dans ce cas il faut résoudre l'équation de Poisson pour trouver le potentiel en tout point. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles qui doit être résolue avec des conditions aux limites adéquates qui imposent la valeur du potentiel sur

certaines surfaces. On peut démontrer que la solution est alors <u>unique</u>. Ce qui implique que dès le moment où on a trouvé une solution qui satisfait l'équation de Laplace et les conditions aux limites, il s'agit de la seule et unique solution. Peu importe le manière de l'obtenir.

Comme des solutions analytiques n'existent que dans des cas très particuliers, il faut en général utiliser des méthodes de résolution numériques.

2.3 Variation du champ électrique au travers d'une surface chargée

On considère une surface S, chargée avec une densité superficielle σ , et séparant deux régions de l'espace notées 1 et 2. Le champ électrique est noté \vec{E}_1 et \vec{E}_2 au voisinage immédiat de la surface, et peut être décomposé en une composante tangentielle et une composante normale par rapport à la surface :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1t} + \vec{E}_{1n}$$
 (2.18)
 $\vec{E}_2 = \vec{E}_{2t} + \vec{E}_{2n}$

Prenons un volume cylindrique de hauteur infinitésimale et à cheval sur la surface chargée.



Fig. 1 : surface chargée

Calculons le flux de \vec{E} à travers la surface de ce cylindre. Le flux à travers la surface latérale sera nul lorsque $h \rightarrow 0$, et il restera la contribution des deux surfaces de base, parallèles à la surface chargée. On applique la loi de Gauss :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S_b}{\varepsilon_0}$$
(2.19)

La surface de base S_b étant suffisamment petite :

$$\left(\vec{\mathrm{E}}_{1}-\vec{\mathrm{E}}_{2}\right)$$
. $\vec{\mathrm{l}}_{n}$ $\mathrm{S}_{b}=\frac{\sigma\,\mathrm{S}_{b}}{\varepsilon_{0}}$

où \vec{l}_n est la normale dirigée de 2 vers 1. Et donc :

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{2.20}$$

La composante normale du champ subit une discontinuité proportionnelle à la densité surfacique de charges.

Considérons maintenant un contour rectangulaire de hauteur infinitésimale, et situé de part et d'autre de la surface (fig 2).



Fig. 2

La circulation de \vec{E} le long du contour est nulle :

$$\oint_{\mathbf{c}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = 0$$

A la limite, la contribution des segments (ad) et (bc) sera nulle, et on aura :

$$\int_{a}^{b} (\vec{E}_{1} - \vec{E}_{2}) \cdot \vec{dl} = 0$$
(2.21)

où \vec{dl} est tangent à la surface S. Ceci est vrai quel que soit le contour c choisi est donc :

$$\vec{\mathrm{E}}_{1\mathrm{t}} = \vec{\mathrm{E}}_{2\mathrm{t}} \tag{2.22}$$

La composante tangentielle du champ électrostatique est continue à la traversée d'une surface chargée.

Les deux conditions (2.20) et (2.22) peuvent être rassemblées en :

$$\vec{\mathrm{E}}_1 - \vec{\mathrm{E}}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{\mathrm{I}}_n \tag{2.23}$$

où \vec{l}_n est le vecteur unité dirigé de 2 vers 1.

Le potentiel reste continu de part et d'autre de la surface (fig 3):

$$V_1 - V_2 = -\int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl}$$
(2.24)

et en faisant tendre a et b vers la surface :

 $V_1 = V_2$ (2.25)



Fig. 3 : continuité du potentiel

La gradient de V est cependant discontinu :

$$(\operatorname{grad} V)_{1} - (\operatorname{grad} V)_{2} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_{0}} \vec{l}_{n}$$
 (2.26)

ou bien

$$\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{n}}\right)_{1} - \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{n}}\right)_{2} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_{0}}$$
(2.27)

avec

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \operatorname{grad} V \cdot \vec{l}_n \tag{2.28}$$

qui est la dérivée normale du potentiel (c'est-à-dire le taux de variation dans la direction perpendiculaire à la surface).

<u>Remarque</u>

Dans le cas particulier où l'espace 2 est un conducteur parfait, $\vec{E}_2 = 0$ et (2.23) (2.27) deviennent :

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{I}_n \tag{2.29}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{2.30}$$

2.4 Énergie électrostatique

2.4.1 Travail à fournir pour déplacer une charge

Considérons une configuration stationnaire de charges "sources". Le travail nécessaire pour déplacer une charge test q du point a au point b est :

$$W = \int_{a}^{b} \vec{f} \cdot \vec{dl}$$
 (2.31)

où \vec{f} est la force qu'il faut exercer pour contrecarrer la force électrique : \vec{f} = –q \vec{E} , et donc

$$W = -q \int_{a}^{b} \vec{E} \cdot \vec{dl} = q [V(b) - V(a)]$$
(2.32)

Rappelons que ce travail est indépendant du chemin choisi pour aller de a à b. La fonction V est le potentiel scalaire produit par toutes les charges sources de la configuration. Si on fixe le zéro de potentiel à l'infini ($V(\infty) = 0$), le travail nécessaire pour amener la charge test depuis l'infini (donc très loin) jusqu'au point b sera :

$$W = q V(b) \tag{2.33}$$

Ce travail correspond à un accroissement de l'énergie potentielle du système, c'est-à-dire de l'énergie que l'on pourra récupérer si on laisse toutes les charges retourner à l'infini.

2.4.2 Energie électrostatique d'un ensemble de charges

L'énergie potentielle d'un ensemble de charges est définie comme le travail à effectuer pour amener les diverses charges depuis l'infini jusqu'à leurs positions respectives. Pour calculer cette énergie, il convient donc d'amener une à une les charges q_i et d'évaluer à chaque fois l'énergie nécessaire à cette opération. L'énergie totale sera la somme de toutes ces contributions.



Fig. 4: système de charges

Pour amener la 1^{ère} charge q₁, il n'y a pas de champ électrique, donc pas de travail à effectuer. Pour amener la 2^{ème} charge q₂, le travail à fournir est q₂ V₁(\vec{R}_2), où V₁(\vec{R}_2) est le potentiel dû à q₁ à l'endroit où on place q₂:

$$W_2 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

 r_{12} étant la distance entre q_1 et q_2 en position finale. Pour amener q_3 , le travail est $q_3 V_{1+2}(\vec{R}_3)$ où V_{1+2} est le potentiel dû aux charges q_1 et q_2 :

$$W_3 = q_3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

De même pour amener q_4 :

$$W_4 = q_4 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}} \right)$$

Le travail total pour assembler les 4 charges est :

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right)$$
(2.34)

Et de manière générale pour n charges :

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\j>i}}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$
(2.35)

L'énergie totale du système de charges est donc la somme des termes dus à l'interaction mutuelle de chacune des paires de charges.

On préfère généralement symétriser cette relation et écrire :

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$
(2.36)

Comme chaque paire de charges est alors comptée deux fois, il a fallu diviser par deux. On peut également écrire :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_{i} \sum_{\substack{j=1 \ j \neq i}}^{n} \frac{q_{j}}{4\pi\epsilon_{0} r_{ij}}$$
(2.37)
$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_{i} V(\vec{R}_{i})$$
(2.38)

où V(
$$\vec{R}_i$$
) est le potentiel produit au point \vec{R}_i (la position de q_i) par toutes les autres charges.

2.4.3 Energie électrostatique d'une distribution continue de charges

Pour une distribution volumique de charges, la relation (2.38) devient :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau$$
 (2.39)

où l'intégrale est étendue aux volumes chargés. L'énergie est alors associée aux volumes chargés.

On peut également exprimer cette énergie sous une autre forme. Exprimons ρ en fonction de \vec{E} : $\rho = \epsilon_0 \text{ div } \vec{E}$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\tau} V \operatorname{div} \vec{E} \, \mathrm{d}\tau \tag{2.40}$$

Utilisons la formule

$$\operatorname{div} (V \vec{E}) = V \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \operatorname{.} \operatorname{grad} V$$
(2.41)

On obtient :

$$W = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\tau} \vec{E} \cdot \text{grad } V \, d\tau + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\tau} \operatorname{div} (V \, \vec{E}) \, d\tau$$
(2.42)

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky pour la 2^{eme} intégrale, et en remplaçant grad $V = -\vec{E}$ dans la 1^{ere} :

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\tau} E^2 d\tau + \frac{\varepsilon_0}{2} \oint_S V \vec{E} \cdot \vec{dS}$$
(2.43)

où S est la surface fermée entourant le volume τ .

Initialement, le volume τ dans (2.39) est celui où il existe une densité de charges. On peut cependant prendre un volume d'intégration plus grand, avec $\rho = 0$ dans la partie ajoutée, cela ne changera pas la valeur de W. Dans ce cas, le 1^{er} terme de (2.43) va nécessairement augmenter (on intègre une quantité positive) et le 2^{ème} terme doit alors diminuer pour maintenir la somme constante. A grande distance de toutes les charges, V varie comme 1/R et \vec{E} comme $1/R^2$, la surface augmente comme R^2 et donc l'intégrale de surface dans (2.43) décroît comme 1/R. Ainsi, si on prend l'intégrale de volume sur tout l'espace, l'intégrale de surface tend vers zéro et on a :

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\text{tout l'espace}} E^2 d\tau$$
(2.44)

L'énergie est alors associée au champ électrique avec une densité (énergie par unité de volume) :

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$
(2.45)

2.5 Condensateurs

2.5.1 Coefficient de capacité

Considérons deux conducteurs sur lesquels on a placé des charges égales et opposées : + Q sur un conducteur et - Q sur l'autre.



Fig. 5 : condensateur

Pour faire cela, on pourrait par exemple relier les conducteurs à une pile qui fera passer des charges d'un conducteur à l'autre. Lorsque la pile sera déconnectée, les conducteurs garderont leur charge.

A l'équilibre électrostatique :

- Le champ électrique \vec{E} sera nul à l'intérieur de chaque conducteur;
- Toute la charge se répartira à la surface des conducteurs sous forme d'une densité superficielle σ;
- Tous les points à l'intérieur et sur la surface d'un conducteur seront au même potentiel;
- Le champ électrique à l'extérieur, et au voisinage immédiat du conducteur, est normal à la surface du conducteur :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{l}_n \tag{2.46}$$

où σ est la densité superficielle locale de charge.

Les conducteurs vont avoir de potentiels V_1 et V_2 différents et il y aura un certain champ électrique autour des conducteurs. Désignons par V la différence de potentiel entre les conducteurs

$$V = V_1 - V_2 = -\int_2^1 \vec{E} \, \vec{dl}$$
 (2.47)

(V₁ est le potentiel du conducteur chargé positivement)

On dit que V est la "tension" entre les conducteurs. Cette tension est proportionnelle à la charge et on écrit

$$Q = C V \tag{2.48}$$

où C est la constante de proportionnalité. Il s'agit d'une conséquence du principe de superposition. Si les charges sont doubles, les champs sont doubles, de même que les différences de potentiels.

On peut voir en effet que si le potentiel est multiplié par un facteur k, le champ $\vec{E} = -$ grad V sera multiplié par k, et donc aussi la charge superficielles d'après (2.46) et donc la charge totale Q également.

Le coefficient C s'appelle la <u>capacité</u> et un tel système de deux conducteurs s'appelle un <u>condensateur</u>. Les deux conducteurs sont les armatures du condensateur.

L'unité de capacité est le coulomb/volt, ou farad (F).

D'après les conventions choisies, les quantités Q et V dans (2.48) sont positives, et donc C est une quantité toujours positive. La capacité nous renseigne sur la quantité de charges qu'un condensateur peut emmagasiner par unité de différence de potentiel entre les armatures. La capacité est une quantité purement géométrique, déterminée par la dimension, la forme et la position relative des armatures. On verra plus loin que la capacité dépend du milieu compris entre les armatures, ici nous avons considéré que le milieu avait les caractéristiques du vide.

On parle parfois de la capacité d'un conducteur unique. Dans ce cas, on considère que la deuxième armature, portant la charge -Q, se trouve sur la sphère de l'infini.

2.5.2 Condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux armatures planes parallèles de surface A. Si la distance d séparant les armatures est petite, on peut négliger les effets de bords aux extrémités et supposer que le champ et la distribution de charges sur les armatures sont uniformes. Les charges vont se répartir uniformément sur la surface intérieure des plaques. On sait que le champ entre les armatures est donné par

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$



Fig. 6 : condensateur plan

où Q est la charge totale de chacune des plaques. Comme le champ est constant entre les plaques, la différence de potentiel entre les plaques est

$$\mathbf{V} = \mathbf{E} \, \mathbf{d} = \frac{\mathbf{d}}{\varepsilon_0 \, \mathbf{A}} \, \mathbf{Q}$$

et la capacité est donnée par

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad (F) \tag{2.49}$$

2.5.3 Énergie emmagasinée dans un condensateur

L'énergie emmagasinée dans un condensateur est le travail accompli, par exemple par une pile, pour le charger. Il faut donc transférer des charges d'une armature à l'autre (la charge circulera dans les fils et non dans l'espace entre les armatures). Il s'agit donc de l'énergie nécessaire pour effectuer la séparation des charges.

Le travail nécessaire pour déplacer une charge q_1 d'un point a à un point b est : $q_1(V_b - V_a)$.

Supposons qu'à un moment du processus la charge sur chaque armature soit q, et donc la tension soit q/C. Le travail nécessaire alors pour transférer une charge élémentaire dq est :

$$dW = \frac{q}{C} dq$$

Le travail total pour faire passer toute la charge Q est donc

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Ce travail est emmagasiné sous forme d'énergie potentielle, et on peut écrire :

$$W = \frac{1}{2} C V^2$$
 (2.50)

Nous pouvons également calculer cette énergie à partir de l'expression (2.39). Comme les charges sont réparties en surface sur les conducteurs, on a :

$$W = \frac{1}{2} \left[\int_{S_1} \sigma_1 V_1 \, dS_1 + \int_{S_2} \sigma_2 V_2 \, dS_2 \right]$$

où S_1 et S_2 sont les surfaces des deux conducteurs. Comme les potentiels V_1 et V_2 sont constants sur les surfaces :

W =
$$\frac{1}{2}$$
[V₁ Q + V₂ (-Q)] = $\frac{1}{2}$ Q V = $\frac{1}{2}$ C V²

Une troisième manière consiste à utiliser la densité d'énergie potentielle électrostatique :

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

On se limitera ici au cas simple du condensateur plan, E = V/d est alors constant, et en intégrant sur le volume situé entre les armatures (car le champ est nul ailleurs) :

$$W = \int_{\tau} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 d\tau = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 A d = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} V^2 = \frac{1}{2} C V^2$$

2.6 Forces électrostatiques

2.6.1 Condensateur plan à charge constante

Essayons de déterminer la force entre les armatures d'un condensateur plan. Si nous imaginons que l'espacement entre les armatures est augmenté d'une petite quantité Δd , le travail mécanique accompli par l'extérieur pour déplacer les armatures est :

 $F_m \Delta d$

où F_m est la force mécanique qu'on exerce pour séparer les armatures. Comme il s'agit du travail nécessaire pour augmenter la séparation des charges, cette énergie correspond également à la variation d'énergie potentielle de ces charges. Ce travail doit donc être égal à la variation d'énergie potentielle du condensateur :

$$\Delta W = F_m \Delta d$$

L'énergie du condensateur est :

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$
(2.51)

Si le condensateur est déconnecté de la pile qui a servi à le charger, la charge Q reste constante :

$$\Delta W = \frac{1}{2}Q^2 \Delta \left(\frac{1}{C}\right)$$
$$F_m \Delta d = \frac{1}{2}Q^2 \Delta \left(\frac{1}{C}\right)$$

Pour le condensateur plan :

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon_0 A}$$
$$\Delta \left(\frac{1}{C}\right) = \frac{\Delta d}{\varepsilon_0 A}$$

et la force mécanique

$$F_{\rm m} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} \tag{2.52}$$

est positive. Il existe donc une force électrique d'attraction entre les armatures. Cette force électrique tend à rapprocher les armatures et donc à augmenter la valeur de la capacité et à diminuer l'énergie potentielle (2.51) du système. La mesure de la force F_m permettrait de mesurer la charge Q, c'est le principe d'un électromètre.

2.6.2 Condensateur plan à potentiel constant

Si le condensateur reste connecté à la pile pendant le déplacement virtuel, la différence de potentiel V restera constante, et c'est la charge qui va varier. Il faut donc tenir compte du travail fourni par la source pour garder le potentiel constant (nouvelle séparation des charges).

Comme on a toujours Q = C V, la variation de charge est $\Delta Q = V \Delta C$, et le travail fourni par la source, qui doit fournir la charge ΔQ sous le potentiel V, est :

$$V \Delta Q = V^2 \Delta C$$
.

La variation d'énergie potentielle est donnée par

$$W = \frac{1}{2}CV^2 \implies \Delta W = \frac{1}{2}V^2 \Delta C$$

Le bilan donne :

travail de la source + travail mécanique = variation d'énergie potentielle

$$V^2 \Delta C$$
 + $F_m \Delta d$ = $\frac{1}{2} V^2 \Delta C$

et donc

$$F_{\rm m} \Delta d = -\frac{1}{2} V^2 \Delta C \qquad \Delta C = -\frac{\varepsilon_0 A}{d^2} \Delta d$$

$$F_{\rm m} = \frac{\varepsilon_0 A}{2 d^2} V^2 \qquad (2.53)$$

ce qui donne bien le même résultat que (2.52). La force ne dépend pas de la manière dont on la calcule. On constate dans (2.53) que la force est proportionnelle au carré de la différence de potentiel (en alternatif ce sera le carré de la valeur efficace). En mesurant cette force en aura donc un voltmètre (de type quadratique): c'est le principe du voltmètre électrostatique.

2.6.3 Force sur une charge de surface

Il est intéressant de calculer directement la force d'attraction par la loi de Coulomb. La charge Q d'une armature est soumise au champ électrique existant entre les armatures

 $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ et on aurait donc une force

$$F = Q E = Q \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$
 (faux!)

Or l'expression (2.52) de la force donne $(Q = \sigma A)$

$$F = \frac{1}{2}Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Il y a donc un facteur $\frac{1}{2}$ et la raison est que le champ est discontinu au passage de la surface du conducteur.

Considérons un cas plus général représenté sur la figure suivante :



Fig. 7 : surface chargée

Sur une surface chargée, découpons autour d'un point P une plage circulaire (patch) suffisamment petite pour que σ puisse être considéré comme constant sur la plage. Le champ total à cet endroit est constitué de deux parties : la contribution locale de la plage et la contribution de toutes les autres charges :

$$\vec{E} = \vec{E}_{local} + \vec{E}_{autres}$$

Le champ \vec{E}_{autres} ne subit pas de discontinuité en P. La discontinuité est due seulement aux charges de la plage locale qui donnent un champ $\frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$ de part et d'autre de la surface (at d'éleignent de la surface)

(et s'éloignant de la surface).

Le champ de part et d'autre de la surface sera :

$$\vec{E}_{ext} = \vec{E}_{autres} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{l}_n$$

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}_{autres} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{l}_n$$
(2.54)

Par définition, la force sur la plage sera due exclusivement à \vec{E}_{autres} (car en statique, une charge ne peut pas exercer de force sur elle-même). La force par unité de surface sera :

$$\vec{f} = \sigma \vec{E}_{autres}$$

A partir de (2.54), on voit que

$$\vec{\mathrm{E}}_{\mathrm{autres}} = \frac{1}{2} \left[\vec{\mathrm{E}}_{\mathrm{ext}} + \vec{\mathrm{E}}_{\mathrm{int}} \right]$$

et il faut donc considérer un champ agissant qui est la moyenne des champs de part et d'autre de la surface.

Le raisonnement s'applique à toute surface avec une charge superficielle.

En particulier pour un conducteur, le champ est nul à l'intérieur et vaut $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ à l'extérieur :

$$E_{int} = 0$$

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{1}_n$$

$$\vec{E}_{autres} = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{1}_n$$

(dans le cas d'un conducteur, toutes les autres charges du conducteur "conspirent" pour produire un champ additionnel au point P égal en intensité au champ local) La force est donc

$$\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \vec{l}_n \tag{2.55}$$

ce qui est maintenant conforme à notre résultat (2.52) pour le condensateur plan. Cette force par unité de surface, ou pression électrostatique est dirigée vers l'extérieur à cause de la répulsion entre charges de même signe. Naturellement si les charges restent en place, c'est que cette force est équilibrée par quelque autre force, d'origine atomique ou moléculaire.

2.7 Le dipôle électrique

Un dipôle électrique est un ensemble de deux charges solidaires de même grandeur et de signes opposés, +q et -q, séparées par une distance d. De plus on ne s'intéresse au champ (et au potentiel) produit par le dipôle, qu' à des distance grandes par rapport à d.

On définit le <u>moment dipolaire</u> \vec{p} par :

$$\vec{p} = q \vec{d} \tag{(C.m)}$$

C'est un vecteur orienté de la charge négative vers la charge positive. Le potentiel d'un dipôle est donné par :

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{l}_R}{R^2}$$
(2.57)

où \vec{R} représente le vecteur joignant le dipôle au point considéré. Le champ électrique d'un dipôle orienté suivant l'axe z est :



Fig. 8 : champ d'un dipôle

Couple sur un dipôle

Si le dipôle est placé dans un champ électrique extérieur, il subit un couple qui a tendance à orienter le dipôle suivant les lignes de champ :



L'expression d'un couple est :

 $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$

où \vec{r} est le vecteur position du point d'application de la force. Pour le dipôle, dans un champ uniforme :

$$\vec{\tau} = (\vec{r}_+ \times \vec{F}_+) + (\vec{r}_- \times \vec{F}_-)$$

$$\vec{F}_+ = -\vec{F}_- = q \vec{E}$$

$$\vec{\tau} = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times q \vec{E} = \vec{d} \times q \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Energie potentielle d'un dipôle

L'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ électrique sera :

 $W = q V_+ - q V_-$

où V_+ et V_- sont les potentiels à l'endroit de la charge +q et de la charge -q. Comme la longueur d est petite :

$$\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- = -\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{d}}$$

où \vec{E} est la moyenne de \vec{E}_+ et \vec{E}_- . Et donc :

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p E \cos\theta \tag{2.59}$$

si θ est l'angle compris entre \vec{p} et \vec{E} (fig.9). L'énergie potentielle est minimum lorsque \vec{p} et \vec{E} sont alignés ($\theta = 0$), qui correspond à la position d'équilibre.

Force sur un dipôle

Si le champ est non uniforme, le dipôle sera soumis, en plus du couple, à une force résultante non nulle.



Fig. 10 : force sur un dipôle dans un champ non uniforme

Considérons le cas particulier où le moment \vec{p} est parallèle au champ \vec{E} (fig.10). La force est alors dirigée suivant x :

$$F_{x} = F_{x+} + F_{x-} = q (E_{x+} - E_{x-})$$

$$E_{x+} - E_{x-} = d \frac{dE_{x}}{dx}$$

$$F_{x} = p \frac{dE_{x}}{dx}$$
(2.60)

Si $\frac{dE_x}{dx}$ est positif, la force est dirigée dans le sens de x positif, c'est-à-dire vers la région où le champ est le plus grand.

Dans le cas général, on a :

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_+ + \vec{\mathbf{F}}_- = q \ (\vec{\mathbf{E}}_+ - \vec{\mathbf{E}}_-) = q \ \overrightarrow{\Delta \mathbf{E}}$$

où $\overrightarrow{\Delta E}$ représente la différence entre les champs aux deux extrémités, séparées de \vec{d} :

 $\Delta E_x = \vec{d}$. grad E_x

et donc

$$F_{x} = \vec{p} \cdot \text{grad} E_{x} = p_{x} \frac{\partial E_{x}}{\partial x} + p_{y} \frac{\partial E_{x}}{\partial y} + p_{z} \frac{\partial E_{x}}{\partial z}$$
(2.61)

avec des formules correspondantes pour $\,F_y\,$ et $\,F_z\,.$ On écrit globalement :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}$$
(2.62)

3 Champ électrique dans la matière – Milieux diélectriques

3.1 Polarisation

3.1.1 Introduction

La plupart des matières peuvent être classées en deux groupes : les conducteurs et les isolants (nous ne parlerons pas ici des semi-conducteurs). Les métaux sont généralement de bons conducteurs alors que la plupart des autres substances ont des propriétés isolantes (cependant même les isolants conduisent l'électricité, éventuellement très légèrement).

Un conducteur contient beaucoup d'électrons "libres" qui peuvent se déplacer à l'intérieur de la matière (mais ne peuvent pas s'en échapper), et qui sont responsables de la conduction. Sous l'effet d'un champ électrique extérieur, les charges vont se déplacer, jusqu'à ce qu'elles soient disposées de la façon à produire un champ électrique nul à l'intérieur du conducteur (en électrostatique).

Par contre, dans un isolant ou diélectrique parfait, il n'y a pas d'électrons libres, mais les charges sont attachées à des atomes ou molécules spécifiques. A l'intérieur d'un atome ou d'une molécule, les charges peuvent cependant subir de petits déplacements qui sont la cause des propriétés particulières des diélectriques. Sous l'effet d'un champ extérieur, les atomes d'un diélectrique peuvent ainsi constituer des dipôles électriques. On peut considérer le cas des atomes ou molécule polaires ou non polaires.

3.1.2 Molécules non polaires – Polarisation indirecte

Dans une molécule non polaire, les centres de gravité des charges positives et négatives sont les mêmes. Dans un champ électrique, le noyau sera attiré dans un sens et les électrons dans l'autre. Les orbites des électrons seront déformées et les deux centres de gravité ne coïncideront plus. Une telle configuration et équivalente à un dipôle induit. Un tel dipôle disparaît dès qu'on supprime le champ externe. On peut considérer que le moment \vec{p} du dipôle induit est approximativement proportionnel au champ électrique externe :

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$$

La constant de proportionnalité α est la polarisabilité atomique.



3.1.3 Molécules polaires – Polarisation d'orientation

Une molécule, dite polaire, dans laquelle les centres des charges positives et négatives ne coïncident pas, peut, en première approximation être considérée comme un dipôle. Ces molécules possèdent donc un moment dipolaire permanent.



Fig. 2 Molécule polaire

En l'absence de champ électrique extérieur, les dipôles individuels s'orientent au hasard dans toutes les directions, et le moment résultant est nul. En présence d'un champ



extérieur, chaque dipôle subira un couple qui aura tendance à l'aligner dans la direction du champ. L'alignement ne sera pas parfait, particulièrement aux températures élevées, suite à l'agitation thermique, mais il y aura un certain alignement moyen des dipôles élémentaires.



Fig. 3 Polarisation d'orientation

3.1.4 Répartition dipolaire en volume – Vecteur polarisation

Sous l'effet d'un champ électrique, les deux mécanismes qu'on vient de décrire, et qui peuvent d'ailleurs coexister, produisent globalement le même effet : les dipôles qui constituent le matériau prennent une orientation dirigée statistiquement vers un alignement préférentiel : le diélectrique est dit <u>polarisé</u>.

Pour analyser les effets macroscopiques de la polarisation, on prend comme modèle un milieu où un nombre donné de dipôles, dans un volume déterminé, auraient exactement l'orientation en question, les autres ayant des orientations quelconques d'égale probabilité, et ne jouant aucun rôle particulier. Comme tous ces dipôles n'ont pas nécessairement le même moment, on considère la densité de moments dipolaires.

On appelle <u>polarisation</u> un vecteur \vec{P} qui vaut le moment dipolaire par unité de volume :

\vec{P} : densité de moment dipolaire (C/m²)

Par exemple, s'il y a N atomes par unité de volume et que $q_e \vec{d}$ est le moment dipolaire par atome, on aura :

$$\vec{P} = N q_e \vec{d} \tag{3.1}$$

En général, \vec{P} sera une quantité locale qui variera de place en place dans le diélectrique.

3.2 Champ créé par de la matière polarisée

3.2.1 Charges de polarisation

Nous supposons avoir un volume de matière polarisée, dont la polarisation \vec{P} est connue, et nous recherchons le champ produit par ce volume, par exemple au point A. On s'intéresse donc au champ produit par la polarisation elle-même, et pas à la cause de la polarisation.



Fig. 4 Volume polarisé

Il est en fait plus facile de calculer le potentiel que le champ. Un volume élémentaire $d\tau$ contient un moment dipolaire $\vec{P} d\tau$, et le potentiel total est donc

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{\tau} \frac{\vec{P} \cdot \vec{l}_R}{R^2} d\tau$$

On peut écrire

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\vec{1}_R}{R^2}$$

où le gradient (donc les dérivées) est pris par rapport au point courant dans le volume τ . Et donc

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\tau} \vec{P}. \operatorname{grad}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau$$

En utilisant la formule :

$$\operatorname{div}(\mathbf{f} \ \mathbf{A}) = \mathbf{f} \cdot \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{f}$$

On obtient

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\int_{\tau} div \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) d\tau - \int_{\tau} \frac{1}{R} div \vec{P} d\tau \right]$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P} \cdot \vec{dS}}{R} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\tau \frac{\text{div}\,\vec{P}}{R} \,d\tau$$
(3.2)

On sait que le potentiel d'une distribution volumique de charge s'exprime par (2.15) :

$$V = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho}{R} d\tau$$

et pour une distribution de charge en surface

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{R} \, dS$$

Le diélectrique peut donc être modélisé par des densités de charges de polarisation volumique ρ_p et superficielle σ_p données par

$$\sigma_{\rm p} = \vec{\rm P} \cdot \vec{\rm l}_{\rm n} \tag{3.3}$$

$$\rho_{\rm p} = -{\rm div}\,\vec{\rm P} \tag{3.4}$$

où \vec{l}_n est la normale extérieure au volume polarisé. L'équation (3.2) devient alors :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_p}{R} dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\tau \frac{\rho_p}{R} d\tau$$
(3.5)

et le potentiel dû au volume polarisé est le même que celui qui serait produit par une densité volumique ρ_p et une densité surfacique de charges σ_p .

3.2.2 Interprétation des charges de polarisation

Considérons un tube de diélectrique parallèle à \vec{P} .



Fig. 5 Charge superficielle de polarisation

Il y a N atomes de moment dipolaire $q_e d$ par unité de volume. Cela signifie que les charges positives et négatives sont déplacées les unes par rapport aux autres de d en moyenne. Le nombre de charges qui apparaissent à la surface du tube est le produit A.N.d (pour une surface perpendiculaire à la polarisation). La charge correspondante est A.N.d.q_e. La densité superficielle de charge de polarisation est donc

$$\sigma_p = N q_e d$$

qui est bien le module du vecteur polarisation (3.1)

 $\sigma_p = P$

Pour une surface oblique par rapport à la polarisation, la charge reste la même, et

$$\sigma_{\rm p} = {\rm P}\cos\theta = \vec{\rm P} \cdot \vec{\rm l}_{\rm n} \tag{3.6}$$
Si on considère un élément de surface imaginaire à l'intérieur du diélectrique, l'équation (3.6) donne la charge qui traverse la surface, mais il n'y a pas de charge superficielle résultante parce qu'il y a des contributions égales et opposées de la part du diélectrique sur les deux côtés de la surface.

Les déplacements de charges peuvent cependant avoir pour effet une densité volumique de charges, dans le cas où la polarisation est non uniforme. Dans ce cas les densités de charges des dipôles adjacents ne se compensent pas complètement.



Fig. 6 Exemple schématique de polarisation non uniforme

Comme le diélectrique est neutre dans son ensemble, si une surface fermée S donne une charge superficielle totale non nulle, c'est que les dipôles sont inégalement répartis dans le volume limité par S. La charge superficielle totale qui sort d'un volume τ par polarisation

$$\oint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{dS}}$$

doit être compensée par une charge répartie en volume qui apparaît du fait de l'inégale distribution des dipôles :

$$Q_p + \oint_S \vec{P} \, \vec{dS} = 0$$

On peut attribuer Q_p à une densité volumique ρ_p :

$$Q_p = \int_{\tau} \rho_p \, d\tau$$

et donc

$$\int_{\tau} \rho_p \ d\tau = -\oint_S \vec{P} \ \vec{dS}$$

et comme cela reste vrai pour n'importe quel volume, sous forme différentielle

$$\rho_p = -\text{div} \vec{P}$$

Les charges de polarisation σ_p et ρ_p sont des charges parfaitement réelles. On les appelle charges de polarisation ou charges liées pour rappeler leur origine ainsi que le fait qu'elles sont attachées à la matière et qu'on ne peut donc pas les enlever ou les déplacer librement.

3.3 Équations électrostatiques en présence de diélectriques

3.3.1 Champ de déplacement

L'équation fondamentale

div
$$\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

peut bien sûr s'appliquer, à condition de prendre pour ρ <u>toutes</u> les charges : aussi bien les charges de polarisation que les charges libres.

$$\rho = \rho_l + \rho_p$$

On a donc

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho_1 + \rho_p = \rho_1 - \operatorname{div} \vec{P}$$

$$\operatorname{div} \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) = \rho_1$$
(3.7)

La quantité

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{3.8}$$

est appelée le champ de déplacement

La loi de Gauss peut alors s'exprimer en fonction du champ de déplacement :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_1 \tag{3.9}$$

$$\oint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{D}} \, \vec{\mathbf{dS}} = \mathbf{Q}_1 \tag{3.10}$$

en ne faisant intervenir que les charges libres.

Lorsque les charges libres sont connues, et lorsque la symétrie du problème est suffisante, les relations (3.9)(3.10) permettent d'obtenir le champ de déplacement, pour en déduire ensuite \vec{E} et \vec{P} . Dans de nombreux cas cependant, c'est le potentiel scalaire V qui est connu, et qui permet de déterminer d'abord \vec{E} pour en déduire ensuite \vec{D} et \vec{P} .

La relation entre le champ de déplacement \vec{D} et le champ électrique \vec{E} ,qui résulte de (3.8), s'appelle la relation constitutive du milieu diélectrique. Pour définir cette relation, il faut évidemment une information complémentaire sur la polarisation \vec{P} . Dans le cas général, cette relation constitutive peut être compliquée. Nous verrons plus loin le cas particulier des diélectriques linéaires.

Il faut remarque que le rotationnel de \vec{D} n'est pas nécessairement nul, et donc \vec{D} ne dérive pas d'un potentiel. D'après (3.8), on a rot $\vec{D} = \text{rot } \vec{P}$, et le rotationnel de \vec{P} n'est généralement pas nul.

3.3.2 Diélectriques linéaires

Jusqu'à présent nous n'avons fait aucune hypothèse particulière concernant P. On conçoit cependant que ce vecteur doit être lié au champ électrique, puisque les dipôles ont tendance à se diriger dans le sens des lignes de forces.

Dans la plupart des cas, la polarisation est nulle en l'absence de champ, et on peut en général admettre, du moins en première approximation, que les composantes du champ électrique et celles de la polarisation sont liées par des relations linéaires. Si le facteur de proportionnalité ne dépend pas de la direction du champ, le diélectrique est isotrope.

On peut alors exprimer la proportionnalité entre la polarisation et le champ électrique en posant :

$$\vec{P} = \chi_e \, \varepsilon_0 \, \vec{E} \tag{3.11}$$

La constante χ_e (khi), sans dimension, est la susceptibilité électrique du milieu, et elle peut dépendre de la température, de la pression, de la fréquence, etc. C'est une grandeur toujours positive, les dipôles ne s'orientent jamais en sens inverse de celui du champ. Le champ \vec{E} qui intervient dans (3.11) est bien le champ total, qui fait intervenir l'effet de la polarisation elle-même.

Avec (3.11), le champ de déplacement s'écrit :

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \ \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \ \cdot \varepsilon_r \ \cdot \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon \ \vec{\mathbf{E}}$$
(3.12)

où ε est la <u>permittivité</u> du diélectrique, et ε_r sa <u>permittivité relative</u>. Historiquement ε_0 a reçu le nom de "permittivité du vide", mais évidemment il n'y a pas de dipôles dans le vide.

On a toujours :

$$\varepsilon \ge \varepsilon_0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_r \ge 1 \tag{3.13}$$

Remarquons que dans un milieu anisotrope comme un cristal, les propriétés de la matière dépendent de la direction où on les envisage. La relation entre le champ et la polarisation prend alors la forme plus générale :

$$P_{x} = \varepsilon_{0} \left(\chi_{xx} E_{x} + \chi_{xy} E_{y} + \chi_{xz} E_{z} \right)$$
$$P_{y} = \varepsilon_{0} \left(\chi_{yx} E_{x} + \chi_{yy} E_{y} + \chi_{yz} E_{z} \right)$$
$$P_{z} = \varepsilon_{0} \left(\chi_{zx} E_{x} + \chi_{zy} E_{y} + \chi_{zz} E_{z} \right)$$

et les coefficients χ_{ij} forment le tenseur de susceptibilité.

Revenons aux diélectrique isotropes.

Si la permittivité ε est constante en tout point, le diélectrique est <u>homogène</u> et on aura :

$$\rho_{p} = -\text{div} \vec{P} = -\text{div} \left(\frac{\chi_{e} \epsilon_{0}}{\epsilon} \vec{D} \right) = -\left(\frac{\chi_{e}}{1 + \chi_{e}} \right) \rho_{1}$$

$$\rho_{p} = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r}} \right) \rho_{1}$$
(3.14)

La densité de charge de polarisation est proportionnelle, en tout point, à la densité de charges réalisées ou libres. En particulier s'il n'y a pas de charge libre à <u>l'intérieur</u> du diélectrique, on y aura $\rho_p = 0$.

La densité de charge totale est

$$\rho = \rho_1 + \rho_p = \varepsilon_0 \frac{\rho_1}{\varepsilon} \tag{3.15}$$

L'équation fondamentale du champ peut alors s'écrire

div
$$\vec{E} = \frac{\rho_1}{\epsilon}$$
 (3.16)

et le potentiel vérifiera l'équation de Poisson

$$\Delta V = -\frac{\rho_1}{\varepsilon} \tag{3.17}$$

La théorie des diélectriques linéaires et homogènes est donc semblable à celle des champs dans le vide, sauf qu'on remplace partout ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$. Le champ est partout ε_r fois plus petit que lorsqu'il n'y a pas de diélectrique. Le potentiel est divisé par le même facteur.

3.3.3 Conditions aux limites

Les équations précédentes permettent d'établir les relations qui existent entre les champs de part et d'autre de la surface séparant deux milieux de propriétés différentes.

En considérant un cylindre élémentaire situé de part et d'autre de la surface, et en appliquant la loi de Gauss au champ de déplacement (3.10), on obtient de la même manière qu'au §2.3 :

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_1 \tag{3.18}$$



Fig. 7 : interface entre deux milieux

La direction positive étant celle de la normale dirigée de 2 vers 1. La composante normale du déplacement subit une discontinuité égale à la densité surfacique de charges libres. Si l'interface sépare deux milieux diélectriques, la densité de charges libres en surface est généralement nulle, et on a donc une continuité de la composante normale du déplacement. Par contre si l'interface sépare un conducteur et un diélectrique, il y a des charges libres à la surface du conducteur, et il existe une discontinuité dans la composante normale de \vec{D} (\vec{D} , comme \vec{E} , étant nul à l'intérieur du conducteur).

Les relations (2.20) et (2.22) restent valables :

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{3.19}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$
 (3.20)

 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_p$ étant la densité surfacique totale. De même les relations (2.25) et (2.27) relatives au potentiel restent valables également. En combinant (3.8)(3.18) et (3.19) on a aussi :

$$P_{2n} - P_{ln} = \sigma_p = \sigma_{p_2} + \sigma_{p_1} \tag{3.21}$$

 σ_{p_2} et σ_{p_1} étant les densités superficielles de charges de polarisation produites par chacun des milieux sur la surface de séparation.

Dans le cas où les milieux 1 et 2 sont tous les deux des diélectriques linéaires :

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1$$
 $\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$

et (3.18) devient :

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_1 \tag{3.22}$$

S'il n'y a pas de charges libres à l'interface ($\sigma_1 = 0$) :

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$
(3.23)

et il y a réfraction des lignes de champ électrique :



3.4 Energie dans les diélectriques

Considérons un matériau diélectrique, et l'énergie nécessaire pour augmenter la densité de charges libres de $\Delta \rho_1$. En généralisant (2.33), l'énergie nécessaire pour amener ces charges depuis l'infini est :

$$\Delta W = \int_{\tau} \Delta \rho_1 \, V \, d\tau \tag{3.25}$$

Comme

$$\rho_1 = \operatorname{div} D$$
$$\Delta \rho_1 = \operatorname{div} \overline{\Delta D}$$

où $\overline{\Delta D}$ est la variation qui en résulte sur le champ de déplacement.

$$\Delta W = \int_{\tau} \operatorname{div} \overline{\Delta D} V \, \mathrm{d\tau} \tag{3.26}$$

On fait alors un développement semblable à celui du §2.4.3 :

div
$$(\overrightarrow{\Delta D} V) = V \operatorname{div} \overrightarrow{\Delta D} + \overrightarrow{\Delta D}$$
. grad V
 $\Delta W = \int_{\tau} \overrightarrow{\Delta D} \cdot \vec{E} d\tau + \int_{\tau} \operatorname{div} (\overrightarrow{\Delta D} V) d\tau$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky pour la 2^{ème} intégrale :

$$\Delta W = \int_{\tau} \overrightarrow{\Delta D} \cdot \vec{E} \, d\tau + \oint_{S} \overrightarrow{\Delta D} \, V \, d\tau$$

et en faisant tendre la surface S vers l'infini :

$$\Delta W = \int_{\text{espace}} \overrightarrow{\Delta D} \cdot \vec{E} \, d\tau \tag{3.27}$$

Pour trouver l'énergie du système, il faudra sommer toutes les contributions (3.27) pour passer de l'état d'un système ne contenant pas de charges, à celui caractérisé par la distribution ρ_1 finale, c'est-à-dire en faisant varier \vec{D} d'une valeur initial nulle à sa valeur finale. Pour effectuer cela, il faut connaître la relation constitutive entre \vec{D} et \vec{E} . Considérons le cas particulier d'un milieu diélectrique linéaire :

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}$$
$$\frac{1}{2} \Delta(\vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2} \Delta(\varepsilon \mathbf{E}^2) = \varepsilon \overrightarrow{\Delta \mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \overrightarrow{\Delta \mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$$

et donc (3.27) devient :

$$\Delta W = \Delta \int_{\text{espace}} \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

et le travail total pour constituer la configuration finale, c'est-à-dire l'énergie potentielle électrostatique, est :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{espace}} \vec{D} \cdot \vec{E} \, d\tau \tag{3.28}$$

La densité d'énergie potentielle s'écrit donc, pour un matériau linéaire :

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$
 (3.29)

Tandis que dans le vide on avait obtenu :

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$
(3.30)

En remplaçant $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ dans (3.29), on a

$$w_{e} = \frac{1}{2} \varepsilon_{0} E^{2} + \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}$$
(3.31)

Le deuxième terme est donc l'énergie additionnelle qui doit être fournie par les sources pour établir le champ \vec{E} dans un milieu diélectrique. C'est l'énergie nécessaire pour polariser le diélectrique.

3.5 Condensateurs

3.5.1 Condensateur plan

Reprenons le condensateur plan, en supposant que l'espace entre les armatures est rempli d'un diélectrique linéaire de permittivité ɛ. Lorsqu'on applique un champ extérieur, les dipôles du diélectrique vont s'orienter et faire apparaître une charge superficielle de polarisation à la surface du diélectrique. Ces charges seront de signe opposé à celui de l'armature adjacente, et elles créent donc un champ "induit" (ou champ de réaction) qui est de sens opposé au champ externe.



Fig. 8. Condensateur plan avec diélectrique

En l'absence de diélectrique, le champ entre les armatures est :

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_l}{\varepsilon_0} \vec{1}_z$$

où σ_1 est la densité surfacique de charges libres. Si on considère maintenant la présence d'un diélectrique, celui-ci va se polariser et peut être remplacé par des charges de polarisation sur les faces supérieure et inférieure :

$$\sigma_{\rm p} = \vec{\rm P} \cdot \vec{\rm l}_{\rm n}$$

 \vec{l}_n étant la normale sortante du diélectrique. Ces charges de polarisation sont, sur chaque armature, de signe opposé aux charges libres et elles créent donc un champ électrique dans le sens opposé à \vec{E}_0 . Le champ résultant sera :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 - P}{\epsilon_0} \vec{1}_z$$

Pour un diélectrique linéaire

$$P = \chi_e \epsilon_0 E$$

et

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \frac{1}{1 + \chi_e} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \frac{1}{\varepsilon_r}$$
(3.32)

Le champ est donc réduit du facteur ε_r , par rapport à la valeur qu'il aurait sans le diélectrique.

La tension entre les armatures est :

$$V = E \cdot d = \frac{\sigma_1 \cdot d}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon_r}$$
(3.33)

La charge totale (libre) d'une armature est

$$Q = \sigma_1 \cdot A$$

et la capacité est donnée par

$$C = \varepsilon_r \cdot \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon A}{d}$$
(3.34)

La capacité est donc multipliée par le facteur ε_r , dans le cas d'un diélectrique homogène, par rapport à sa valeur dans le vide.

En pratique, les condensateurs plans sont fait de deux feuilles métalliques séparées par des feuilles diélectriques. Le tout est enroulé sous forme de cylindre, puis recouvert. En plus d'augmenter la capacité pour une géométrie donnée, l'utilisation d'un diélectrique permet aux armatures d'un condensateur d'être très rapprochées sans risque de se toucher.



Fig. 9 Condensateur avec diélectrique

La relation linéaire (3.11) reliant $\vec{E} \ a \ \vec{P}$ n'est valable que si le champ n'est pas trop grand. En particulier si le champ \vec{E} dépasse une limite, appelée rigidité diélectrique, les électrons seront arrachés des molécules et ils formeront un courant de conduction.

Le matériau aura perdu ses propriétés d'isolant et il sera traversé par une décharge, ou claquage. Les diélectriques présentent également l'avantage d'avoir une rigidité diélectrique supérieure à celle de l'air.

Quelques valeurs

	permittivité relative	rigidité diélectrique
	٤ _r	MV/m
air	1,0006	3
verre	5 à 10	30
papier	2 à 4	15
polystyrène	2,6	20
mica	6	200
eau	80	-

3.5.2 Force sur un diélectrique entre plaques parallèles

Considérons un condensateur partiellement rempli par un diélectrique de permittivité ε , le milieu dans l'autre partie étant le vide.



Fig. 10 Force sur un diélectrique

La capacité dans ce cas est :

$$C = \frac{\varepsilon_0 w}{d} (\varepsilon_r x + L - x)$$
(3.35)

où L est la longueur des plateaux, w la largeur, d l'écartement et x la longueur de la portion de diélectrique. Pour que l'approximation (3.35) du condensateur plan soit valable, il faut que d soit petit par rapport à x et à L-x. Le principe des travaux virtuels donne :

$$F_m = \frac{dW}{dx}$$

pour un système isolé, où W est l'énergie potentielle du système et F_m la force mécanique exercée par l'extérieur.

A charge constante :

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$F_{m} = \frac{dW}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{Q^{2}}{C^{2}} \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2} V^{2} \frac{dC}{dx}$$

Comme

$$\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{dx}} = \frac{\varepsilon_0 \ \mathrm{w}}{\mathrm{d}} \left(\varepsilon_r - 1\right)$$

la force est :

$$F_{\rm m} = -\frac{1}{2} V^2 \,\frac{\varepsilon_0 w}{d} \left(\varepsilon_{\rm r} - 1\right) \tag{3.36}$$

On obtiendrait le même résultat à potentiel constant, à condition de tenir compte du travail de la source.

Cette force mécanique (négative pour un accroissement de x) doit équilibrer la force électrique interne du système :

$$F_m = -F$$

et donc le diélectrique est attiré vers l'intérieur des plaques.

On peut remarquer que la force qui s'exerce sur le diélectrique doit nécessairement être due à la déformation du champ sur les bords des plateaux. En effet, si le champ était partout uniforme et perpendiculaire aux plaques, il ne pourrait pas y avoir de force. On peut donc obtenir la force résultante en appliquant le principe de conservation de l'énergie et sans devoir analyser de manière précise les lignes de champ sur les bords.



Fig. 11 Déformation du champ sur les bords de deux plaques parallèles

3.5.3 Expression générale de la capacité

Reprenons le cas général du condensateur, en supposant cette fois que l'espace entre les conducteurs (armatures) est entièrement rempli par un diélectrique linéaire et homogène de permittivité ε .

La capacité est définie par :



Fig. 12 Capacité entre deux conducteurs

Toutes les lignes de champ partent du conducteur positif pour aboutir au conducteur négatif. L'expression générale de la capacité sera donc

$$C = \frac{\oint_{S} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{dS}}{-\int_{1} \vec{E} \cdot \vec{dl}}$$
(3.38)

où S est une surface entourant le conducteur positif et l est un chemin allant du conducteur négatif (potentiel bas) au conducteur positif (potentiel haut).

Exemple : condensateur cylindrique

Le condensateur cylindrique est constitué d'un conducteur intérieur de rayon a et d'un conducteur extérieur de rayon b. l'espace entre les conducteurs est rempli d'un diélectrique de permittivité ε , et la longueur est L.

On suppose L suffisamment grand pour pouvoir négliger les effets de bords.



Fig. 13 Condensateur cylindrique

Par application de la loi de Gauss, en exploitant la symétrie cylindrique du problème, on obtient pour le champ entre les conducteurs :

$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{-\mathrm{Q}}{\varepsilon \, 2\pi \mathrm{r} \, \mathrm{L}} \vec{\mathrm{l}}_{\mathrm{r}}$$

où Q est la charge totale (charge libre) d'une armature. La différence de potentiel entre les armatures est :

$$V = -\int_{a}^{b} \vec{E} \, \vec{dl} = \int_{a}^{b} \frac{Q}{\epsilon \, 2\pi \, r \, L} dr = \frac{Q}{\epsilon \, 2\pi \, L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

et la capacité

$$C = \frac{2\pi \varepsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$
(3.39)

4 MILIEUX CONDUCTEURS - COURANTS

4.1 Courants et loi d'Ohm

4.1.1 Courant et densité de courant

Les charges en mouvement constituent des courants. On appelle intensité de courant électrique ou simplement courant électrique, I, la charge totale qui traverse une certaine surface, par unité de temps. Le courant est donc un débit de charges.

Si, pendant l'intervalle de temps Δt , une charge ΔQ traverse la surface, le courant est :

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$
(4.1)

Si le débit n'est pas constant, la valeur instantanée du courant est

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$
(4.2)

Il est utile d'introduire une grandeur locale : la densité de courant.

Considérons des particules de charge q animées, d'une vitesse moyenne \vec{u} , et N est le nombre de particules par unité de volume.



Fig. 1 Courant de charges

Pendant un temps Δt , chaque particule parcourt une distance $\Delta l = u \Delta t$.

La quantité de charge ΔQ traversant une surface élémentaire ΔS , normale à \vec{u} , pendant le temps Δt est donc :

$$\Delta Q = N q u \Delta t \Delta S$$

De manière générale, pour une surface ΔS quelconque (pas nécessairement normale à \vec{u}), il faudra faire intervenir un produit scalaire

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{N} \mathbf{q} \, \vec{\mathbf{u}} \, . \, \overrightarrow{\Delta \mathbf{S}} \, \Delta \mathbf{t}$$

Le courant à travers la surface élémentaire sera

$$\Delta \mathbf{I} = \frac{\Delta \mathbf{Q}}{\Delta t} = \mathbf{N} \mathbf{q} \, \vec{\mathbf{u}} \cdot \overrightarrow{\Delta \mathbf{S}}$$

On définit la densité de courant \vec{J} par

$$J = N q \vec{u} \qquad (A/m^2) \qquad (4.3)$$

et l'élément de courant est donc

$$\Delta I = \dot{J} \cdot \Delta S \tag{4.4}$$

Le vecteur \vec{J} est défini en tout point et il représente le courant par unité de surface normale à la direction du mouvement.

Le courant total à travers une surface quelconque S est donc le flux de $\vec{J}\,$:

$$I = \int_{S} \vec{J} \cdot \vec{dS}$$
(4.5)

On remarque dans (4.3) que la densité de courant dépend du produit de la charge par la vitesse. Du point de vue du courant, un flux de charges positives dans un sens est donc équivalent à un flux de charges négatives dans le sens opposé.

Le sens conventionnel du courant est celui du mouvement des charges positives, même si dans la plupart des cas, le courant est constitué par des électrons en mouvement. Le produit Ng dans (4.3) est la charge par unité de volume, et on peut donc écrire

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\rho} \, \vec{\mathbf{u}} \tag{4.6}$$

où ρ est la densité volumique des charges.

Dans le cas où il y a plusieurs types de charges (par exemple des électrons et différents types d'ions) animées de différentes vitesses, on peut généraliser la relation (4.3) par

$$\vec{J} = \sum_{i} N_{i} q_{i} \vec{u}_{i} = \sum_{i} \rho_{i} \vec{u}_{i}$$
(4.7)

On distingue deux types de courants : le courant de convection et le courant de conduction. Un courant de convection correspond au déplacement réel de matière chargée, comme par exemple le faisceau d'électrons dans un tube à rayons cathodiques. Un courant de conduction est dû au mouvement relatif des électrons à l'intérieur d'un conducteur. Les courants de convection et de conduction correspondent à des mécanismes physiques différents, on verra que le courant de conduction obéit à la loi d'Ohm, ce qui n'est pas le cas du courant de convection.

Dans la suite nous nous intéresserons uniquement au courant de conduction qui est la forme la plus connue et la plus fréquente du courant électrique.

4.1.2 Courant de conduction et loi d'Ohm

Un milieu conducteur est un milieu matériel où il existe des charges libres, c'est-à-dire des charges qui ne peuvent demeurer au repos que si le champ électrique est nul. Dans les métaux, ces charges libres sont les électrons le moins liés au noyau (électrons périphériques ou électrons de valence). Ces électrons forment, au sein du métal, un gaz électronique libre dont le mouvement relatif par rapport à la masse du conducteur constitue le courant de conduction. Les charges positives, constituées par les noyaux et les électrons liés sont immobiles par rapport à la masse et n'interviennent donc pas dans le courant de conduction. Quoique siège d'un courant, un conducteur peut donc être neutre dans son ensemble, les charges positives immobiles équilibrant dans un volume élémentaire, les charges négatives mobiles.

En reprenant (4.7), on écrira pour la densité de courant

$$\mathbf{J} = \rho_e \, \vec{\mathbf{v}}_e + \rho_p \, \vec{\mathbf{v}}_p \tag{4.8}$$

où ρ_e est la densité des charges négatives et \vec{v}_e leur vitesse, et ρ_p la densité des charges positives et \vec{v}_p leur vitesse. Si le conducteur est neutre dans son ensemble

$$\rho_e + \rho_p = 0 \tag{4.9}$$

S'il n'y a pas de mouvement d'ensemble du conducteur et que les charges positives restent fixes dans le conducteur

$$\vec{v}_p = 0$$

et \vec{v}_e est alors la vitesse relative des électrons par rapport au conducteur, que nous appellerons la vitesse de dérive \vec{v}_d . Le courant de conduction est :

$$\vec{J} = \rho_e \ \vec{v}_e = \rho_e \ \vec{v}_d \tag{4.10}$$

Ce courant existe donc même dans un conducteur non chargé.



Fig. 2 Représentation schématique du courant de conduction

Pour que les électrons libres soient mis en mouvement il faut qu'ils soient soumis à un champ électromagnétique. La force par unité de charge est alors :

$$\vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{E}} + \left(\vec{\mathbf{v}}_d \times \vec{\mathbf{B}} \right)$$

La vitesse des charges est suffisamment faible pour que la contribution du champ magnétique soit négligeable et donc

$$\vec{f} = \vec{E} \tag{4.11}$$

Pour de nombreuses substances, la densité de courant est proportionnelle à la force par unité de charge

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{4.12}$$

où \vec{E} est le champ électrique au sein du milieu conducteur. Le facteur de proportionnalité σ (à ne pas confondre avec la charge superficielle) est la <u>conductivité</u> du milieu. Ses dimensions sont Ω^{-1} m⁻¹. La relation (4.12) est la forme locale de la <u>loi d'Ohm</u>. Il faut insister sur le fait que la loi d'Ohm est une "loi" expérimentale et approximative, qui s'applique valablement à de nombreuses matières. A ne pas confondre avec les équations de Maxwell qui sont des loi "absolues".

4.1.3 Aspect microscopique de la conduction

Considérons la densité de courant de conduction (4.10)

$$\vec{J} = \rho_e \ \vec{v}_d = N_e \ q_e \ \vec{v}_d \tag{4.13}$$

où N_e est le nombre d'électrons libres par unité de volume et q_e leur charge.

En comparant (4.13) avec la loi d'Ohm (4.12) on voit que celle-ci implique que la vitesse \vec{v}_d doit être proportionnelle au champ \vec{E} . Sous l'effet d'un champ \vec{E} , les charges subissent une force $q_e\vec{E}$, et on pourrait penser que les électrons vont accélérer et que le courant va donc augmenter avec le temps durant lequel on applique le champ. La loi d'Ohm implique au contraire qu'un champ constant produit un courant constant donc une vitesse constante des électrons.

On peut donner l'explication simplifiée suivante.

Nous supposons que le conducteur est composé d'un réseau d'ions et d'un gaz d'électrons libres. Même en l'absence de champ électrique extérieur, les électrons libres sont animés des vitesses thermiques importantes et entrent souvent en collision avec les ions immobiles. Les vitesses thermiques des électrons ont des directions aléatoires, et ne contribuent à aucun écoulement net dans une direction donnée et il n'y a donc aucun courant.

La distance parcourue entre les collisions, appelée libre parcours moyen est :

$$\lambda = v_{\text{th}} \cdot t_{\text{c}} \tag{4.14}$$

où v_{th} est la vitesse thermique moyenne et t_c le temps moyen entre deux collisions (il s'agit de moyennes statistiques).

Pour les métaux à température ambiante, les ordres de grandeur sont : $v_{th} \approx 10^5 \text{ à } 10^6 \text{ m/s}, t_c \approx 10^{-14} \text{ s}, \lambda \approx 10^{-8} \text{ m}.$

En présence d' un champ électrique, un mouvement de dérive des électrons va se superposer à leur mouvement aléatoire. A cause des nombreuses collisions dans le réseau, la vitesse de dérive due au champ électrique est très inférieure à leur vitesse thermique moyenne. Les électrons seront soumis à une accélération

$$\vec{a} = \frac{q_e \vec{E}}{m_e}$$

pendant l'intervalle de temps $\Delta t = t_c$ entre deux collisions. La variation de vitesse qui en résulte sera la vitesse moyenne de dérive

$$\vec{v}_d = \overrightarrow{\Delta v} = \frac{q_e \vec{E}}{m_e} t_c \tag{4.15}$$

où m_e est la masse de l'électron. Le facteur de proportionnalité entre \vec{v}_d et \vec{E} est la mobilité μ_e des électrons de conduction

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{e}} \ \vec{\mathbf{E}} \tag{4.16}$$

Comme la vitesse de dérive est très faible par rapport à la vitesse thermique, le temps moyen t_c ne variera pas suite à l'application du champ électrique et la vitesse de dérive sera bien proportionnelle à \vec{E} .

Pour un fil de cuivre de 1mm de rayon, transportant un courant de 1A, la densité de courant est :

$$J = \frac{I}{S} = \frac{1}{\pi \cdot 10^{-6}} = 3,18 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$$

A partir de (4.13), la vitesse de dérive est

$$v_d = \frac{J}{N_e q_e}$$

comme dans le cuivre il y a un seul électron libre par atome, la densité des électrons libres N_e est la même que celle des atomes de cuivre, qui est de $8,45.10^{28}$ atomes/m³. On obtient alors pour la vitesse de dérive

$$v_{d} = \frac{3,18.10^{5}}{(8,45.10^{28})(1.6.10^{-19})} = 2,3.10^{-5} \text{ m/s}$$
(4.17)

Avec (4.12) (4.13) et (4.15) l'expression de la conductivité pour notre modèle simplifié est donc :

$$\sigma = \frac{N_e q_e^2 t_c}{m_e}$$
(4.18)

Les relations (4.12) (4.18) sont valables pour un champ électrique constant ou variable dans le temps. Dans ce cas il faut que le champ reste approximativement constant sur un temps largement supérieur à t_c .

4.1.4 Conductivité des matériaux

Un milieu conducteur est caractérisé par l'équation constitutive

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

où σ est la conductivité. On utilise souvent l'inverse

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

qui est la résistivité (à ne pas confondre avec la densité volumique de charge).

Quelques valeurs

	résistivité	coefficient de température
	Ω.m	$(^{\circ}C)^{-1}$
cuivre	1,7.10 ⁻⁸	3,9 . 10 ⁻³
aluminium	2,8 . 10 ⁻⁸	$3,9.10^{-3}$
fer	8,8 . 10 ⁻⁸	5.10 ⁻³
manganèse	4,4 . 10 ⁻⁷	5.10 ⁻⁷
graphite	1,4 . 10 ⁻⁵	-5.10 ⁻⁴
eau distillée	$\sim 10^4$	
mica	$\sim 10^{15}$	-7.10 ⁻²
verre	$\sim 10^{12}$	-7.10 ⁻²

Les métaux ont une résistivité très faible (et une conductivité très grande) et sont donc des excellents conducteurs, par contre la résistivité des isolants ou diélectriques est extrêmement grande (mais non infinie).

La résistivité d'un matériau dépend généralement de la température, de manière significative.

Dans un métal, tous les électrons de conduction sont des charges libres à température ambiante. Les ions fixes du réseau vibrent autour de leur position d'équilibre. Lorsque la température augmente, l'amplitude des vibrations augmente et la probabilité de collisions avec les électrons de conduction augmente. Le temps moyen t_c entre deux collisions diminue et la résistivité augmente.

Pour d'autres matériaux, non métalliques, et mauvais conducteur, il y a peu d'électrons libres à température ambiante. Une augmentation de température peut augmenter le nombre d'électrons qui deviennent libres pour la conduction et donc diminuer la résistivité.

En première approximation, on peut utiliser la relation suivante, qui suppose que la résistivité varie linéairement avec la température :

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$$
(4.19)

où ρ_0 est la résistivité à la température de référence T_0 (souvent 20°C) et α est le coefficient de température.

Pour certains matériaux appelés supraconducteurs, la résistivité devient nulle en dessous d'une certaine température critique. Lorsqu'un courant est établi dans un supraconducteur, il persiste indéfiniment à condition que la basse température soit maintenue.

4.2 Milieux conducteurs – Résistance

Lorsqu'un conducteur est le siège d'un courant de conduction, le champ électrique ne sera pas nul comme en électrostatique (lorsque toute les charges sont au repos). Bien sûr, pour un conducteur parfait (ce qui est quasiment le cas pour les métaux) la conductivité est infinie et le champ $\vec{E} = \vec{J}/\sigma$ est nul, même en présence de courant.

En pratique, les résistances utilisées dans les circuits sont réalisées avec des matériaux de conductivité plus faible, comme le graphite.

La présence d'un champ électrique implique également que le conducteur ne constituera plus un domaine équipotentiel.

Pour maintenir un courant dans un conducteur il faudra également une source extérieure d'énergie, qui maintiendra par exemple une différence de potentiel aux extrémités de conducteur.

Considérons un morceau de conducteur, de conductivité σ , et entouré d'un isolant parfait ($\sigma = 0$ à l'extérieur). On applique une différence de potentiel entre les surfaces A₁ et A₂.



Fig. 3 Courant dans un conducteur

On peut par exemple placer une couche de cuivre (de conductivité beaucoup plus grande que celle du conducteur considéré) sur les faces A_1 et A_2 qui seront alors des

équipotentielles. Un courant va exister dans le conducteur, et les vecteurs \vec{E} et \vec{J} seront partout proportionnels $\vec{J} = \sigma \vec{E}$.

Le courant ne peut pas s'échapper du conducteur (le milieu extérieur est supposé non conducteur) et la densité volumique de charge dans le conducteur est nulle (div $\vec{E} = 0$). Le courant total traversant deux surfaces quelconques A et A' doit être le même

$$I = \int_{A} \vec{J} \, \vec{dS} = \int_{A'} \vec{J} \, \vec{dS}$$
(4.20)

sinon il y aurait accumulation de charges entre les deux surfaces. Ceci reste vrai quelle que soit la forme du conducteur, même s'il s'agit d'un long fil avec beaucoup de méandres: les lignes de force du champ suivront toujours la forme du conducteur.

A la surface du conducteur, la densité de courant (et donc le champ) doit nécessairement être tangentielle



Fig. 4 Champ et densité de courant à la surface d'un conducteur

$$\vec{J} \cdot \vec{l}_n = 0 \tag{4.21}$$

$$J = J_t \qquad E_t = J_t / \sigma \qquad (4.22)$$

Comme le champ tangentiel est continu à une interface, le champ tangentiel sera le même juste à l'extérieur du conducteur, tandis que la densité de courant y sera nulle.

En l'absence de champ induit (voir plus loin dans le cours), des charges de surface vont se disposer de telle sorte à produire le champ électrique adéquat à l'intérieur du conducteur pour faire circuler le courant, et cela pour n'importe quelle forme compliquée du conducteur. Le champ électrique à l'extérieur du conducteur aura donc une composante normale, qui correspond à cette densité superficielle de charges sur le conducteur (mais il n'y aura pas de charge nette sur le conducteur dans son ensemble).

On a vu que en (4.17) que la vitesse de dérive des électrons dans un conducteur est extrêmement faible (plusieurs heures pour parcourir 1m). Quand on branche une source sur un circuit, le champ électrique s'établit quasi instantanément partout, et tous les électrons libres se mettent à dériver. Le champ électrique se propage à l'extérieur du conducteur, comme une onde électromagnétique, à une vitesse proche de celle de la lumière.

Revenons au conducteur de la figure 3. Si V est la différence de potentiel entre les faces équipotentielles A_1 et A_2 , et I le courant dans le conducteur, on a la relation

$$V = R I \tag{4.23}$$

qui est la forme habituelle de la loi d'Ohm. La proportionnalité entre V et I est une conséquence de la linéarité. Si la tension V est multipliée par un facteur k, le champ E sera multiplie par le même facteur, de même que J (à condition que la conductivité ne change pas) et donc I.

En exprimant la différence de potentiel par

$$V = V_1 - V_2 = -\int_L \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_L \frac{1}{\sigma} \vec{J} \cdot \vec{dl}$$
(4.23.a)

où L est un chemin partant de A_2 (potentiel bas) et aboutissant à A_1 (potentiel haut), et le courant par

$$I = \int_{A} \vec{J} \cdot \vec{dS} = \int_{A} \sigma \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

On obtient la résistance :

$$R = \frac{-\int_{L} \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\int_{A} \sigma \vec{E} \cdot \vec{dS}}$$
(4.24)

4.3 Équation de continuité et loi des nœuds de Kirchhoff

L'équation de continuité qui exprime la conservation de la charge s'écrit sous forme intégrale :

$$\oint_{S} \vec{J} \cdot \vec{dS} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \, d\tau \tag{4.25}$$

où S est la surface fermée entourant le volume τ . Elle exprime que la quantité de charge qui traverse S sous forme de courant doit être égale à la diminution de la charge totale du volume τ .

A partir de théorème de la divergence, la forme locale de l'équation de la continuité est

div
$$\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$
 (4.26)

Pour un courant continu on doit avoir $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et de plus on a vu que la densité volumique de charge reste nulle à l'intérieur d'un conducteur, et donc

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{J}} = 0 \tag{4.27}$$

Et pour un conducteur homogène

$$\operatorname{div} \vec{\mathrm{E}} = 0 \tag{4.28}$$

D'après (4.28), on constate que le potentiel vérifiera l'équation de Laplace dans un conducteur homogène.

Il n'y a donc pas de point d'où les lignes de courant pourraient sortir. Les courants doivent décrire des trajets qui se referment sur eux-mêmes. Ils peuvent circuler dans des circuits formant des boucles complètes et contenant des résistances, des fils et des générateurs (nous considérerons d'autres éléments par la suite).

En revenant à la forme intégrale, on aura pour toute surface fermée

$$\oint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{J}} \, \vec{\mathbf{dS}} = 0 \tag{4.29}$$

Si la surface fermée englobe plusieurs conducteurs qui se rassemblent à une jonction, on en déduit que la somme algébrique des courants incidents au nœud (jonction) est nulle :

$$\sum_{j} I_{j} = 0 \tag{4.30}$$

C'est la loi des nœuds de Kirchhoff qui résulte donc du fait qu'un nœud du circuit ne peut pas accumuler de charges.



Fig. 5 Loi des noeuds

4.4 Exemples de calcul de résistances

4.4.1 Conducteur cylindrique

Considérons une résistance cylindrique, de section A, longueur L, et conductivité σ .



Fig. 6 Conducteur cylindrique de section quelconque

Les surfaces terminales sont maintenues à un potentiel constant :

$$V(z=0) = 0$$
$$V(z=L) = V_0$$

Sur la surface latérale du conducteur (juste à l'intérieur), le champ doit être tangentiel $\vec{E} \cdot \vec{l}_n = 0$

et donc

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \text{grad } V \cdot \vec{l}_n = 0$$

Comme le potentiel ou sa dérivée normale sont spécifiés sur toutes les surfaces extérieures, le problème de Laplace admet une solution unique. On peut donc utiliser la solution (évidente) :

$$V(z) = \frac{V_0 z}{L}$$

Le champ électrique sera donc uniforme

$$\vec{\mathrm{E}} = -\operatorname{grad} \mathrm{V} = -\frac{\mathrm{V}_0}{\mathrm{L}}\vec{\mathrm{I}}_{\mathrm{Z}}$$

La densité de courant sera également uniforme, et le courant est

$$I = J A = \sigma E A = \frac{\sigma A}{L} V_0$$

La résistance est

$$R = \frac{L}{\sigma A}$$
(4.31)

On utilise également la conductance

$$G = \frac{1}{R} = \frac{\sigma A}{L}$$
(4.32)

qui peut être utile pour associer des résistances en parallèle.

Exemple numérique : pour réaliser une résistance sur un circuit imprimé, on utilise un piste de cuivre d'épaisseur 50 μ m et de largeur 0,5 mm. La résistance sera de

$$\frac{10^{-2} .1,710^{-8}}{5010^{-6} .0,510^{-3}} = 6,810^{-3} \ \Omega/cm$$

4.4.2 Conducteur torique

On considère un conducteur en forme de quart de tore à section rectangulaire



Fig. 7 Conducteur torique à section rectangulaire

On applique une différence de potentiel entre les surfaces terminales de la manière suivante :

On utilisera les coordonnées cylindriques. Le potentiel ne dépendra que de ϕ et l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques se réduit à :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{V}}{\mathrm{d} \varphi^2} = 0$$

dont la solution est

$$\mathbf{V} = \mathbf{c}_1 \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{c}_2$$

et en utilisant les conditions (4.33) :

$$V = \frac{2 V_0}{\pi} \phi \tag{4.34}$$

Le champ électrique dans le conducteur est donc

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{I}_{\varphi} = -\frac{2 V_0}{\pi r} \vec{I}_{\varphi}$$
(4.35)

Eventuellement on aurait pu écrire directement l'expression (4.35) pour le champ. Suite à la symétrie le champ doit en effet rester constant le long de chaque ligne de force

$$\vec{E}=-\frac{V_0}{l}\,\vec{l}_\phi$$

où $l = \pi r / 2$ est la longueur d'une ligne de force. Le courant total s'obtient en intégrant \vec{J} sur la section transversale :

$$I = \int_{S} \vec{J} \, \vec{dS} = \int_{S} \sigma \, \vec{E} \, \vec{dS}$$
$$\vec{dS} = -h \, dr \, \vec{l}_{\phi}$$
$$I = \frac{2 \sigma \, V_0 \, h}{\pi} \int_{a}^{b} \frac{dr}{r} = \frac{2 \sigma h \, V_0}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$

et donc la résistance est :

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\pi}{2\sigma h \ln(b/a)}$$
(4.35a)

Dans cet exemple, nous sommes partis de la différence de potentiel V_0 entre les armatures. Nous avons ensuite déduit \vec{E} , puis le courant par intégration et donc la résistance.

Pour certaines géométries de problèmes, notamment lorsqu'on peut prévoir que J est uniforme dans la section transversale, il est plus facile de partir de I, en déduire J et E, et déterminer la différence de potentiel par intégration le long d'une ligne de force

$$V_0 = -\int \vec{E} \, \vec{dl}$$

4.5 Conditions aux limites

Considérons l'interface entre deux milieux de conductivité σ_1 et σ_2 . Comme en statique

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \oint_{S} \vec{J} \ \vec{dS} = 0$$

on a :

$$J_{2n} = J_{1n}$$
(4.36)

$$\sigma_2 E_{2n} = \sigma_1 E_{1n}$$
(4.37)

En particulier si le milieu 2 est un diélectrique parfait ($\sigma_2 = 0$), on doit avoir $J_{2n} = 0$ et donc

$$J_{1n} = 0$$
 $E_{1n} = 0$

et le courant sera donc parallèle à la surface dans un conducteur entouré d'un diélectrique parfait (comme sur la figure 4).

Le champ électrique tangentiel est continu $E_{1t} = E_{2t}$ et donc

$$\frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2} \tag{4.38}$$

La condition (4.37) implique une discontinuité du champ normal, et donc la présence d'une charge libre de surface. On a établi en (3.22) que

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_1 \tag{4.39}$$

et en utilisant (4.37), on a :

$$\sigma_{l} = \left(\varepsilon_{1} \frac{\sigma_{2}}{\sigma_{1}} - \varepsilon_{2}\right) E_{2n} = \left(\varepsilon_{1} - \varepsilon_{2} \frac{\sigma_{1}}{\sigma_{2}}\right) E_{1n}$$
(4.40)

Ne pas confondre σ_1 qui est la charge libre de surface avec les conductivités σ_1 et σ_2 .

4.6 Analogie entre résistance et capacité

Reprenons le cas de deux conducteurs parfaits placés dans un milieu diélectrique linéaire et homogène de permittivité ε .



Fig. 8 Capacité et résistance entre deux conducteurs parfaits

On a vu en (3.38) que la capacité entre les deux conducteurs s'exprime par :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_{S} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{dS}}{-\int_{L} \vec{E} \cdot \vec{dl}}$$
(4.41)

où la surface S entoure le conducteur positif et l'intégrale de ligne du dénominateur part du conducteur négatif (potentiel bas) vers le conducteur positif (potentiel haut). Si le milieu entourant les deux conducteurs parfait présente également une certaine conductivité σ (supposée homogène), il y aura un courant entre les deux conducteurs et la résistance globale sera :

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_{L} \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\int_{S} \sigma \vec{E} \cdot \vec{dS}}$$
(4.42)

ou S et L sont les mêmes que dans (4.41) (voir remarque 1). On en déduit la relation

$$R C = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$
(4.43)

valable dans le cas où l'espace entourant les armatures est linéaire et homogène aussi bien pour la conductivité que pour la permittivité.

Exemple

On a calculé en (3.39) la capacité par unité de longueur d'un câble coaxial

$$C = \frac{2 \pi \varepsilon}{\ln(b/a)}$$
 (F/m)

La résistance de fuite par unité de longueur sera alors

$$R = \frac{1}{2 \pi \sigma} \ln(b/a) \qquad (\Omega.m)$$

La résistance de fuite totale pour une longueur L sera la résistance par unité de longueur divisée par L (et pas multipliée).

Remarque 1

La surface au dénominateur de (4.42) ne peut pas être une surface fermée, sinon le flux de J serait nul! Il faut exclure un petit passage pour le passage du fil provenant de la pile.

Remarque 2

L'analogie entre conducteurs et diélectriques ne doit pas être menée trop loin. Les lignes de courant ne peuvent généralement pas s'échapper des conducteurs, dont la conductivité est très grande par rapport à celle du milieu extérieur isolant. Par contre dans le cas d'un diélectrique de dimension finie, les lignes de champ auront nettement plus tendance à se disperser (se sont les "effets de bords") dans le milieu extérieur, car les permittivités des différents matériaux varient dans une proportion assez faible (cf tableau du §3.4.1). En appliquant la relation (4.43) à la résistance (4.35a), on n'obtiendrait par exemple q'une valeur approximative de la capacité de cet élément torique.

4.7 Temps de relaxation

Considérons un milieu linéaire et homogène de permittivité ε et de conductivité σ . S'il existe dans ce milieu une densité volumique de charge ρ , on aura :

div
$$\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

En utilisant la loi d'Ohm

div
$$\vec{J} = \frac{\sigma \rho}{\epsilon}$$

et en remplaçant dans l'équation de continuité

div
$$\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

on obtient l'équation différentielle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0 \tag{4.44}$$

dont la solution est

$$\rho(t) = \rho_0 \ e^{-(\sigma/\epsilon)t} \tag{4.45}$$

où ρ_0 est la densité de charges à l'instant t = 0. On voit donc que la densité de charges en tout point va décroître exponentiellement.

Le temps $t_r = \epsilon/\sigma$ est le <u>temps de relaxation</u>. C'est le temps nécessaire pour que la densité de charge décroisse jusqu'à 1/e ou 36,8 % de sa valeur initiale.

Pour un excellent conducteur comme le cuivre, $\sigma = 5,8 \ 10^7 \ \text{S/m}$, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,85 \ 10^{-12} \ \text{F/m}$ et le temps de relaxation est $t_r \approx 1,5.10^{-19} \ \text{s}$. Toute densité volumique de charge disparaîtra donc en un temps extrêmement court et réapparaîtra éventuellement sous forme de charges de surface. Il est donc parfaitement justifié de considérer que la densité volumique de charge est nulle dans un (bon) conducteur. Ce qui ne signifie pas qu'il n'y a pas de densité volumique d'électrons au sein de ce conducteur, car ρ est ici la densité de charge totale.

Pour un isolant comme le mica, ont trouve un temps de relaxation de plusieurs heures.

Les matériaux peuvent être classés en conducteurs ou isolants sur base de leur temps de relaxation. Lorsqu'on s'intéresse aux champs variables, avec une certaine fréquence f, on dira qu'un matériau est un bon conducteur si son temps de relaxation est très inférieur à la période T = 1/f de variation des champs, c'est-à-dire : $t_r \ll T$. De même un matériau sera un isolant si : $t_r \gg T$.

Certains matériaux peuvent donc être considérés comme conducteur à basse fréquence et comme isolant à très haute fréquence.

4.8 Puissance dissipée – Effet Joule

Le passage du courant dans un élément conducteur produit une dissipation de puissance sous forme de chaleur. Considérons une densité volumique de charge ρ , soumise à une force par unité de volume $\vec{f} = \rho \vec{E}$ et animée d'une vitesse \vec{v} . La puissance par unité de volume, développée par \vec{f} vaut :

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = \rho \vec{E} \vec{v} = \vec{J} \cdot \vec{E}$$

car $\vec{J} = \rho \vec{v}$ d'après (4.10).

Comme il n'y a pas d'accroissement d'énergie cinétique (la vitesse de dérive est constante), cette densité de puissance

$$\mathbf{p} = \vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \qquad (W/m^3) \tag{4.46}$$

produira un échauffement du milieu. La puissance convertie en chaleur, considérée comme perdue au point de vue électrique, est la puissance perdue par effet Joule.

La puissance totale peut s'obtenir en intégrant la densité (4.46) sur le volume du conducteur. On peut également procéder de la manière suivante. Le travail effectué par la force électrique pour déplacer une quantité de charge dQ à travers une différence de potentiel V est :

$$dW = V dQ$$

La puissance est donc

$$P = \frac{dW}{dt} = V \frac{dQ}{dt} = V I = R I^2$$
(4.47)

puisque le débit total de charges est le courant.

4.9 Force électromotrice et loi des mailles

Pour maintenir le courant dans un circuit, il faut disposer d'une source extérieure d'énergie qui compensera l'énergie dissipée dans les conducteurs sous forme de chaleur. De manière générale ces sources d'énergie sont appelées des générateurs qui transforment une énergie non électrique en énergie électrique. Notons que le générateur proprement dit peut se trouver très éloigné (dans une centrale électrique) et le "générateur" local effectue alors une conversion d'énergie électrique (par exemple de 220V alternatif vers 5V continu).

Nous considérons ici une pile ou batterie, qui convertit de l'énergie chimique en énergie potentielle électrique, et qui peut alimenter un circuit à courant continu.

Considérons un circuit élémentaire constitué d'une pile dont les deux bornes sont reliées par une (ou plusieurs) résistance.



Fig. 9 Circuit élémentaire

Par un mécanisme chimique, la pile va réaliser une séparation des charges positives et négatives, et placer des électrons sur sa borne négative. Ces électrons vont pénétrer dans le fil (le circuit) pour créer le courant. Pour chaque électron quittant la borne négative, un autre électron arrivera sur la borne positive de la pile car le fil lui-même n'acquiert aucune charge nette.

Ce sont des ions présents dans la pile qui sont responsables des réactions sur chaque électrode. Sur la borne positive un ion "accepteur" prend un électron et sur la borne négative un autre ion "donneur" fournit un électron. Ce sont des ions qui transportent les charges à l'intérieur de la pile. Au fur et à mesure de l'utilisation, la concentration en ions va diminuer jusqu'à l'épuisement de la pile.

La force par unité de charge, qui entretient le courant dans le circuit est :

 $\vec{f} = \vec{f}_s + \vec{E}$

où \vec{f}_s est la contribution de la pile (c'est donc une force d'origine non électrique) et \vec{E} est la force électrostatique (le champ électrique est une force par unité de charge). La force \vec{f}_s n'agira qu'à l'intérieur de la source, tandis que le champ électrique est présent tout au long du contour. Sur la figure 9, le champ \vec{E} sera bien plus grand à l'intérieur de la pile que le long du conducteur car il doit vérifier la relation

$$\oint_{\mathbf{c}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = 0 \tag{4.48}$$

pour une intégration tout au long du circuit fermé.

La force électromotrice (en abrégé fem) d'un circuit est définie par :

$$\mathcal{E} = \oint_{c} \vec{f} \cdot \vec{dl} \qquad (V) \qquad (4.49)$$

où c est le contour fermé du circuit. C'est la force par unité de charge intégrée sur toute la longueur du circuit (ce n'est donc pas une force!). Etant donné (4.48), on a aussi

$$\mathcal{E} = \oint_{c} \vec{f} \cdot \vec{dl} = \oint_{c} \vec{f}_{s} \cdot \vec{dl} = \int_{a}^{b} \vec{f}_{s} \cdot \vec{dl}$$

car \vec{f}_s est nulle en dehors de la pile, et la fem est donc également le travail par unité de charge fourni par la source. A l'intérieur de la pile, la force \vec{f}_s doit fournir un travail pour séparer les charges positives et négatives et pour les placer sur les bornes en surmontant la répulsion des charges qui s'y trouvent déjà. A l'intérieur de la source, le courant est opposé à la direction de \vec{E} . Pour une pile idéale, on peut considérer que le champ électrique et la force chimique \vec{f}_s se neutralisent à l'intérieur de la pile :

$$\vec{E} = -\vec{f_s}$$
 (dans la pile) (4.50)

La différence de potentiel entre les bornes a et b est :

$$V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl}$$
(4.51)

Avec (4.50) on a aussi

$$V = \int_{a}^{b} \vec{f}_{s} \cdot \vec{dl} = \mathcal{E}$$
(4.52)

La fonction de la source est donc de maintenir une différence de potentiel égale à sa fem. La fem est donc numériquement égale à la différence de potentiel aux bornes. Il ne faut cependant pas confondre les notions de fem et de différence de potentiel. Une différence de potentiel correspond uniquement à un champ électrique conservatif, tandis que la fem est associée à un mécanisme non électrostatique qui fournit l'énergie pour séparer les charges.

L'égalité (4.52) est une forme de la loi de conservation de l'énergie. La fem \mathcal{E} est le travail fourmi par la source (par unité de charge), tandis que la différence de potentiel V aux bornes de la résistance du circuit est le travail (par unité de charge) effectué par le champ électrique pour faire circuler le courant, et dissipé en chaleur.

La généralisation à un circuit fermé quelconque constitue la loi des mailles de Kirchhoff :

$$\sum \Delta V = 0 \tag{4.54}$$

La somme algébrique des variations de potentiel dans une maille fermée est nulle.

Une batterie réelle ne maintiendra cependant pas parfaitement à ses bornes une différence de potentiel égale à sa fem.

Le courant à l'intérieur de la pile est dû au déplacement des ions. La vitesse de déplacement des ions dépendra de la force nette à laquelle ils sont soumis

$$\vec{v}_{\text{ions}} = \mu_{\text{ions}} \left(\vec{f}_{\text{s}} + \vec{E} \right) \tag{4.55}$$

où μ_{ions} est la mobilité (à comparer à 4.16). De même la densité de courant à l'intérieur de la pile sera de la forme, en utilisant (4.13)

$$\vec{J} = \sigma_{\text{ions}} \left(\vec{f}_{\text{s}} + \vec{E} \right) \tag{4.56}$$

où σ_{ions} est la conductivité interne de la pile.

On a donc, dans la pile

$$\vec{f}_{s} = -\vec{E} + \frac{\vec{J}}{\sigma_{ions}}$$
(4.57)

Tandis que dans (4.50) on avait considéré une conductivité infinie dans la pile. Reprenons le développement précédent, en tenant compte de (4.57)

$$\mathcal{E} = \int_{a}^{b} \vec{f}_{s} \cdot \vec{dl} = -\int_{a}^{b} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_{a}^{b} \frac{J}{\sigma_{ions}} \cdot \vec{dl}$$
(4.58)

Le premier terme à droite est la différence de potentiel entre les bornes de la pile réelle $V = V_b - V_a$, tandis que le deuxième terme peut s'écrire

$$\int_{a}^{b} \frac{J}{\sigma_{\text{ions}}} \cdot \vec{dl} = R_{\text{int}} \cdot I$$
(4.59)

en appliquant la loi d'Ohm (4.23) (4.23.a) (le courant circule dans le sens opposé à \vec{E} dans la pile).

Finalement

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\mathcal{E}} - \mathbf{R}_{\text{int}}\mathbf{I} \tag{4.60}$$

La différence de potentiel aux bornes de la pile est donc plus petite que la fem. Une pile réelle est donc équivalente à une pile idéale en série avec une résistance.

Au fur et à mesure de l'utilisation de la pile, sa concentration en ions diminue, et sa résistance interne augmente.

A circuit ouvert, I = 0, et $V = \mathcal{E}$. Pour recharger une batterie, il faudra la relier à une fem plus puissante, qui fera circuler un courant dans le sens opposé au sens habituel, pour obtenir les réactions chimiques inverses.

5 MAGNÉTOSTATIQUE

5.1 Introduction

La force qui s'exerce sur une charge, appelée la force de Lorentz est :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$
(5.1)

La force électrique

 $\vec{F}_e = q \vec{E}$

ne dépend que de la position (et de la valeur) de la charge, et cette force est décrite au moyen du champ électrique. Le champ électrique lui-même est produit par des (autres) charges.

La force magnétique

 $\vec{F}_{m} = q (\vec{v} \times \vec{B})$

dépend de la vitesse de la charge test, et cette dépendance semble compliquée. La force est toujours normale à la vitesse et aussi bien l'intensité que la direction de la force dépendent du mouvement de la charge. Ce comportement est décrit au moyen du champ magnétique \vec{B} . Le champ magnétique lui-même sera produit par des charges en mouvement, alors que des charges au repos ne produisent qu'un champ électrique.

Nous avons vu que des charges en mouvement constituent des densités de courants.

Considérons par exemple un fil parcouru par un courant et plongé dans un champ magnétique uniforme.

Le courant est constitué d'électrons en mouvement le long du fil, avec une vitesse de dérive v_d . Chaque électron subit donc la force magnétique

$$q_e \ (\overrightarrow{v_d} \times \overrightarrow{B}) \tag{5.1a}$$

La force sur un volume élémentaire $d\tau$ sera :

$$\vec{dF} = N_e \cdot d\tau \cdot q_e (\vec{v_d} \times \vec{B})$$

où N_e est le nombre de charges par unité de volume.

En introduisant la densité de courant (4.13), on obtient :

$$\vec{dF} = (\vec{J} \times \vec{B}) d\tau$$
(5.2)

La force par unité de volume est $J \times B$.

Si la densité de courant est uniforme dans la section (de surface A) :

$$\vec{dF} = (\vec{J} \times \vec{B}) A dl$$

 $\vec{J} = \frac{I}{A} \vec{l_1}$


Fig. 1 Force sur un élément de courant

Ce qui donne la force par unité de longueur du fil. Cette force ne dépend que du courant total dans le fil et non pas séparément de la charge et du signe des particules en mouvement.

5.2 Le champ magnétique

En magnétostatique nous considérons le cas où toutes les densités de charges et toutes les densités de courants sont constantes. Il s'agit donc de courants continus. Les champs électrique et magnétique ne dépendent pas du temps, et les équations de Maxwell, dans le vide, pour la magnétostatique sont :

Sous forme différentielle

$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	(5	1)
$\mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{D} = 0$	()	· –	•)

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{5.5}$$

Sous forme intégrale

$$\oint_{S} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0 \tag{5.6}$$

$$\oint_{c} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I$$
(5.7)

Pour créer un champ magnétique, il faut des courants, et les courants sont des charges en mouvement. La magnétostatique constitue donc une approximation, qui suppose que tous les courants sont continus et obtenus par un flux continu de charges, et avec une densité volumique de charges qui ne varie jamais.

(5.3)

La relation (5.4) indique que la divergence de \vec{B} est toujours nulle. En comparant avec l'électrostatique, div $\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, on en conclut qu'il n'y a pas de charges magnétiques d'où

les lignes de champ de \vec{B} pourraient sortir. Les lignes de \vec{B} doivent donc se refermer sur elles-mêmes en boucles fermées (ou s'étendre jusqu'à l'infini).

On comparera aussi la forme intégrale (5.6) avec la loi de Gauss (1.2).

Les relations (5.5) et (5.7) donne le lien entre le champ magnétique et les courants. La forme intégrale (5.7) de la loi d'Ampère exprime que la circulation de B le long d'une courbe fermée quelconque est égale au courant total à travers la boucle, multiplié par μ_0 .

La forme intégrale de la loi d'Ampère est aussi appelée loi d'Oersted.

Lorsque la symétrie du problème permet de sortir B de l'intégrale (5.7), la loi d'Ampère sera la méthode la plus efficace pour déterminer B (comme la forme intégrale de la loi de Gauss en électrostatique).

Comme la divergence d'un rotationnel est toujours nulle, la relation (5.5) implique que

 $\operatorname{div} \tilde{J} = 0$ (5.8) Les courants doivent donc parcourir des circuits fermés, ce que nous avions déjà obtenu en (4.27).

Les équations (5.4) (5.5) sont linéaires et le principe de superposition s'applique au champ magnétique. Le champ créé par plusieurs courants est la somme des champs créés séparément par chacun des courants.

5.3 Exemples de champ magnétique

5.3.1 Conducteur rectiligne infini

Un courant I circule dans un conducteur rectiligne infini de section circulaire. Les lignes de champ seront des cercles autour du conducteur et le champ aura la même intensité en tous les points d'un cercle.



Fig. 2 Champ magnétique d'un conducteur infini

Si le conducteur est aligné sur l'axe z, en coordonnées cylindriques, on aura

$$\vec{B} = B_{\phi} \hat{1}_{\phi}$$

L'application de (5.7) donne

$$\oint_{c} \vec{B} \cdot \vec{dl} = B_{\phi} \cdot \oint dl = B_{\phi} \cdot 2\pi r = \mu_{0} I$$
$$B_{\phi} = \frac{\mu_{0} I}{2\pi r} \qquad r > b$$

Si la densité de courant est uniforme dans le conducteur, de rayon b, on pourra calculer de la même manière le champ à l'intérieur du conducteur (en supposant que le conducteur a les mêmes caractéristiques magnétiques que le vide). Finalement

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{i}_{\phi} \qquad r > b$$

$$= \frac{\mu_0 I r}{2\pi b^2} \vec{i}_{\phi} \qquad r < b$$
(5.9)

Le sens de B est fixé par la règle du tire-bouchon.



Fig. 3 Champ magnétique d'un conducteur cylindrique infini

5.3.2 Solénoïde infini

On considère un cylindre (très long par rapport à son diamètre), de section circulaire, sur lequel on a enroulé un fil en spirales jointives. On admet avoir une distribution continue de spires et que chaque spire se trouve dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre. Dans ce cas également, la forme intégrale de la loi d'Ampère permet d'établir que le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde et nul à l'extérieur.



Si l'axe du solénoïde est aligné suivant z :

$$\vec{B} = \mu_0 \text{ n I } \vec{l}_z$$
 à l'intérieur (5.9a)
= 0 à l'extérieur

où n est le nombre de spires par unité de longueur.

Fig. 4 Solénoïde

Un solénoïde ne sera jamais infini et les lignes de champ doivent se refermer. Pour un solénoïde réel, les lignes de champ auront l'allure suivante



Fig. 5 Champ magnétique à l'extérieur d'un solénoïde

5.3.3 Tore

En refermant un solénoïde sur lui-même, on obtient une bobine en forme de tore. La section du tore peut être de forme quelconque.

A cause de la symétrie cylindrique, le champ magnétique aura uniquement une composante en φ (ceux qui en doutent pourront utiliser la formule de Biot-Savart pour s'en convaincre).



Fig. 6 Tore

Le champ magnétique se déduit alors de la forme intégrale de la loi d'Ampère :

$\vec{B} = \frac{\mu_0 \text{ N I}}{2\pi \text{ r}} \hat{I}_{\varphi}$	à l'intérieur
= 0	à l'extérieur

ou N est le nombre total de spires.

5.4 Le potentiel vecteur magnétique

En électrostatique, comme le rotationnel de \tilde{E} est toujours nul, il est possible de représenter E comme le gradient d'un champ scalaire V :

$$rot E = 0 \implies E = -grad V$$
(5.10)

On peut suivre une démarche semblable en magnétostatique, mais maintenant c'est la divergence de B qui est toujours nulle (en fait la divergence de B est nulle en général, même pour les champs dynamiques (1.7))

Comme la divergence d'un rotationnel est toujours nulle, on peut écrire

$$\overrightarrow{B} = \operatorname{rot} \overrightarrow{A}$$
 (5.11)

qui garantira d'office que la divergence de B sera nulle.

Le champ \vec{A} s'appelle le <u>potentiel vecteur magnétique</u>, ou simplement le potentiel vecteur.

On sait que (5.10) ne définit pas complètement le potentiel scalaire V. On peut toujours lui ajouter une constante (ou généralement une fonction dont le gradient est nul), sans changer le champ électrique. De même, on peut ajouter à \vec{A} toute fonction vectorielle

dont le rotationnel est nul, sans changer B. Mais une fonction dont le rotationnel s'annule est le gradient de quelque chose, comme en (5.10). Donc si \vec{A} est un potentiel vecteur satisfaisant pour un problème, il en sera de même de

$$\vec{A'} = \vec{A} + \text{grad } \Psi$$

pour tout Ψ . On peut profiter de cette liberté pour imposer une condition supplémentaire sur \vec{A} . De même en électrostatique on impose souvent comme condition d'avoir le potentiel V nul à grande distance.

La condition supplémentaire sera ici d'imposer que la divergence de \vec{A} s'annule :

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} = 0 \tag{5.12}$$

Regardons maintenant ce que devient la relation (5.5):

rot
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

rot (rot \vec{A}) = $\mu_0 \vec{J}$

On utilise l'identité

rot (rot
$$\vec{A}$$
) = grad (div \vec{A}) – $\Delta \vec{A}$

et comme on a choisi de prendre div $\vec{A} = 0$, on obtient

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{5.13}$$

Il s'agit du Laplacien d'un vecteur, qui est en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \cdot \vec{i}_x + \Delta A_y \cdot \vec{i}_y + \Delta A_z \cdot \vec{i}_z$$
(5.14)

avec

$$\Delta A_{x} = \frac{\partial^{2} A_{x}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} A_{x}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2} A_{z}}{\partial z^{2}}$$
$$\Delta A_{y} = \frac{\partial^{2} A_{y}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} A_{y}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2} A_{y}}{\partial z^{2}}$$
$$\Delta A_{z} = \frac{\partial^{2} A_{z}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} A_{z}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2} A_{z}}{\partial z^{2}}$$

L'équation vectorielle (5.13) est équivalente à trois équations de Poisson :

$$\Delta A_{x} = -\mu_0 J_{x} \tag{5.15a}$$

$$\Delta A_y = -\mu_0 J_y \tag{5.15b}$$

$$\Delta A_z = -\mu_0 J_z \tag{5.15c}$$

Chacune de ces équations est mathématiquement équivalente à l'équation de Poisson que nous avons rencontrée en électrostatique

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

et dont nous connaissons la solution :

$$V = \frac{1}{4\pi \,\varepsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho}{R} \,d\tau$$

où l'intégrale porte sur les volumes chargés.

Par analogie, la solution de (5.15a) sera

$$A_{x} = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \int_{\tau} \frac{J_{x}}{R} d\tau$$
(5.16)

et de même pour A_y et A_z . En combinant les trois composantes, on peut écrire la solution de (5.13) sous forme vectorielle :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}}{R} d\tau$$
(5.17)

où l'intégrale porte sur les volumes comportant des densités de courant.

L'équation (5.17) permet donc d'obtenir le potentiel vecteur à partir des densités de courant (pour autant que les densités de courant soient connues). On peut ensuite calculer le champ magnétique en prenant le rotationnel de \vec{A} .

Nous serons amenés plus tard à considérer le flux du champ magnétique à travers une surface S :

$$\Phi = \int_{S} \vec{B} \cdot \vec{dS}$$
(5.18)

Par application du théorème de Stokes :

$$\Phi = \int_{S} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \oint_{c} \vec{A} \cdot \vec{dI}$$
(5.19)

La circulation du potentiel vecteur le long d'un contour fermé est donc égale au flux magnétique à travers une surface s'appuyant sur le contour.

Dans beaucoup d'applications, notamment en circuits, on s'intéresse à des courants parcourant des conducteurs filiformes, c'est-à-dire dont les dimensions transversales sont faibles à côté de la longueur.

Pour un élément dl de longueur de fil, le volume sera $d\tau = S dl$, où S est la section. On peut supposer que J est constant dans une section droite : I = J S, et que la densité de courant a la même direction que \vec{dl} .

On a alors

$$\vec{J} d\tau = J S \vec{dl} = I \vec{dl}$$
(5.20)

L'expression pour le potentiel vecteur devient alors

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{R} \vec{dl}$$
(5.21)

où l'intégrale porte sur les conducteurs filiformes.



Fig. 7 Calcul du potentiel vecteur d'un circuit

De même que nous avons considéré une densité superficielle de charge σ , nous pouvons également avoir une densité superficielle de courant (ou nappe de courant), dans le cas où les charges se déplacent sur une surface :

$$K = \sigma \, \vec{v}_d \tag{5.22}$$

Cette notion sera utile lors de l'étude des milieux magnétiques.

Par exemple pour un solénoïde idéal (cf §5.3.2), on peut considérer que le bobinage constitue un courant de surface, de densité

$$\vec{K} = n \ \vec{I} \ \vec{l}_{\phi}$$
(5.23)

Fig. 8 Courant de surface sur un solénoïde

Dans le cas d'un courant de surface, le potentiel vecteur sera

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}}{R} \, dS \tag{5.24}$$

5.5 Formule de Biot-Savart

En prenant le rotationnel du potentiel vecteur on obtiendra le champ magnétique. Reprenons (5.17) :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{J}}{R} d\tau'$$

en désignant avec des indices prime le point courant (x',y',z') dans le volume d'intégration qui est parcouru par des courants. Nous calculons le potentiel vecteur au point P(x,y,z). Pour obtenir \vec{B} il faut prendre le rotationnel de \vec{A} et donc prendre les dérivées de \vec{A} par rapport aux coordonnées x,y,z du point P. On peut donc faire passer le rotationnel dans l'intégrale :

$$\vec{B} = \operatorname{rot}_{P}\vec{A} = \frac{\mu_{0}}{4\pi}\int_{\tau'}\operatorname{rot}_{P}\left(\frac{\vec{J}}{R}\right)d\tau'$$



Fig. 9 Calcul du champ magnétique

On utilise la formule

$$\operatorname{rot}(\mathbf{f}\vec{G}) = \mathbf{f} \operatorname{rot} \vec{G} + (\operatorname{grad} \mathbf{f}) \times \vec{G}$$
(5.25)

avec f = 1/R et G = J.

Comme $\vec{J}(x',y',z')$ ne dépend pas des coordonnées x,y,z du point P, on a rot_P $\vec{J} = 0$, et il reste

$$\vec{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0}{4 \pi} \int_{\tau'} \operatorname{grad}_{\mathrm{P}} \left(\frac{1}{\mathrm{R}} \right) \times \vec{\mathrm{J}} \, \mathrm{d}\tau'$$

Le gradient donne :

$$R = \left[(x - x')^{2} + (y - y')^{2} + (z - z')^{2} \right]^{1/2}$$

$$grad_{P} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) \vec{l}_{x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) \vec{l}_{y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) \vec{l}_{z} = -\frac{1}{R^{2}} \vec{l}_{R}$$
(5.26)

où le vecteur unité $\vec{1}_R$ est dirigé du point d'intégration vers le point P. Et on obtient pour \vec{B} , en permutant le produit vectoriel

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{J} \times \vec{l}_R}{R^2} d\tau'$$
(5.27)

c'est la formule de Biot-Savart qui permet d'obtenir le champ magnétique à partir des courants. Dans le cas des courants filiformes on aura

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \, d\vec{l} \times \vec{l}_R}{R^2}$$
(5.28)

On peut s'interroger sur l'utilité du potentiel vecteur, dans la mesure où on peut calculer directement \vec{B} par l'intégrale (5.27) et que \vec{A} est également un vecteur avec trois composantes (au contraire du potentiel scalaire électrique V). On peut éventuellement dire que les intégrales (5.17) (équations de Poisson) sont moins compliquées que celles de B (5.27), mais il faudra encore calculer le rotationnel si on doit obtenir le champ B. Néanmoins le potentiel vecteur a une grande importance théorique, qui se manifeste surtout dans le domaine des champs variables. Certains souhaitent même développer la théorie de l'électromagnétisme à partir des potentiels \vec{A} et V.

5.6 Exemples de potentiel vecteur

5.6.1 Segment de fil rectiligne

Un fil rectiligne de longueur 2L est parcouru par un courant I et on cherche le potentiel en un point P du plan bissecteur



Fig. 10 Segment de fil

Le potentiel vecteur est dirigé suivant z, comme le courant.

Bien sûr un courant continu ne peut exister que dans un circuit fermé dont le segment considéré doit constituer une partie.

5.6.2 Solénoïde infini

La géométrie du problème permet d'utiliser la relation (5.19)

$$\oint_{\mathbf{C}} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = \Phi$$

qui est semblable à la loi d'Ampère (5.7), mais \vec{A} remplace \vec{B} et Φ remplace $\mu_0 I$. Le potentiel sera partout tangentiel (suivant \vec{l}_{ϕ}) et on choisira pour c un contour circulaire

de rayon r, et perpendiculaire à l'axe du solénoïde. Le champ \vec{B} est uniforme à l'intérieur du solénoïde (5.9a).

$$\oint_{c} \vec{A} \cdot \vec{dl} = A_{\phi} \cdot 2 \pi r = \mu_{0} n I \cdot \pi r^{2} \qquad r < a$$
$$= \mu_{0} n I \cdot \pi a^{2} \qquad r > a$$

et donc on obtient

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 n I}{2} r \vec{I}_{\phi} \qquad r < a$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{a^2}{r} \vec{I}_{\phi} \qquad r > a$$
(5.30)



Le potentiel vecteur tourne autour de l'axe du solénoïde, et il existe dans tout l'espace (même à l'extérieur du solénoïde, alors que le champ magnétique y est nul).

On voit sur les exemples, comme dans l'équation (5.17) que le potentiel vecteur est globalement orienté dans la même direction que les courants.

Fig. 11 Champ magnétique et potentiel vecteur d'un solénoïde

5.7 Dipôle magnétique

On considère une boucle circulaire et filiforme parcourue par un courant I. On cherche le potentiel vecteur en un point P lorsque la distance de P à la boucle est grande par rapport à la dimension de la boucle (R >> b).

Il s'agit alors d'un <u>dipôle magnétique</u> qui sera utile pour l'étude des milieux magnétiques, par analogie au dipôle électrique utilisé pour l'étude des milieux diélectriques.



Fig. 12 Dipôle magnétique

Le potentiel vecteur à calculer est

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_c \frac{d\vec{l'}}{R_1}$$

La boucle est placée dans le plan xy, et on utilise des coordonnées sphériques. Le potentiel ne dépendra pas de ϕ , et par facilité on peut placer P dans le plan yz.

$$\vec{dl'} = b \, d\phi' \, \vec{l}_{\phi} = (-\sin \phi' \, \vec{l}_x + \cos \phi' \, \vec{l}_y) \, b \, d\phi'$$

Deux points de la boucle, symétriques par rapport à y, correspondront à la même valeur de R_1 , et donneront des contributions opposées suivant $\dot{1}_y$, et égales suivant $\dot{1}_x$.

On a donc :

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b \sin \phi'}{R_1} d\phi' \hat{I}_X$$

Comme P est dans le plan yz ($\phi=\pi/2$), $\,\dot{l}_{\phi}=-\dot{l}_{x}$

$$\vec{A} = \vec{1}_{\phi} \cdot \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin \phi'}{R_1} d\phi'$$

Il faut maintenant évaluer R_1 :

$$R_{1}^{2} = R^{2} + b^{2} - 2b R \cos \Psi$$

$$R \cos \Psi = |OP''| \cdot \sin \varphi' = R \sin \theta \sin \varphi'$$

$$R_{1}^{2} = R^{2} + b^{2} - 2b R \sin \theta \sin \varphi'$$

$$\frac{1}{R_{1}} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^{2}}{R^{2}} - \frac{2b}{R}} \sin \theta \sin \varphi'}$$

Comme $R^2 >> b^2$

$$\frac{1}{R_1} \approx \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2b}{R}\sin\theta\sin\phi'}}$$
$$\frac{1}{R_1} \approx \frac{1}{R} \left(1 + \frac{b}{R}\sin\theta\sin\phi'\right)$$

En remplaçant dans $\overrightarrow{A}\,$:

$$\vec{A} = \vec{i}_{\varphi} \frac{\mu_0 I b}{2\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \frac{b}{R} \sin \theta \sin \phi') \sin \phi' d\phi'$$
$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I b^2}{4R^2} \sin \theta \dot{i}_{\varphi}$$
(5.31)

En prenant le rotationnel en coordonnées sphériques on obtient pour le champ

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I b^2}{4R^3} (2\cos\theta \dot{I}_R + \sin\theta \dot{I}_\theta)$$
(5.32)

On définit le <u>moment dipolaire magnétique</u> par

$$\vec{m} = m \hat{1}_z = I \pi b^2 \hat{1}_z = I S \hat{1}_z$$
 (5.33)

On peut alors écrire les expressions du potentiel et du champ de la manière suivante

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{l}_R}{R^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{R^3} (2\cos\theta \,\vec{l}_R + \sin\theta \,\vec{l}_\theta) \quad (5.35)$$

Ces expressions restent valables (à grande distance) pour une boucle de forme quelconque, en définissant le moment magnétique par

$$\vec{\mathbf{m}} = \mathbf{I} \, \mathbf{S} \, \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}} \qquad (\mathbf{A} \, . \, \mathbf{m}^2) \tag{5.36}$$

où I est le courant, S la surface de la boucle et $\hat{1}_n$ le vecteur normal à la surface en utilisant la règle du tire-bouchon.



Fig. 13 Dipôle magnétique

Si on reprend les expressions du dipôle électrique :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{l}_R}{R^2}$$
(5.37)

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 R^3} \left(2\cos\theta \,\hat{l}_R + \sin\theta \,\hat{l}_\theta \right)$$
(5.38)

on voit que les champs sont identiques dans les deux cas. L'identité n'est valable qu'à grande distance (approximation dipolaire), à proximité des charges ou de la boucle, les lignes de champ n'ont pas la même structure.



Fig. 14 Champ électrique et magnétique des dipôles

5.8 Forces et couples sur des courants

Nous avons calculé en (5.3) l'élément de force sur un courant. La force sur un circuit complet s'obtiendra en intégrant sur tout le circuit :

$$\vec{F} = \oint_{c} I \, \vec{dl} \times \vec{B}$$
(5.39)

Si le champ \vec{B} est dû à la présence d'un autre courant, on utilisera la formule de Biot-Savart pour trouver \vec{B} , et (5.39) donnera la force d'interaction entre les deux courants :

$$\vec{F}_{12} = \oint_{c_2} I_2 \ \vec{dI}_2 \times \vec{B}_1$$
(5.40)

où \vec{B}_1 est le champ produit par le courant I_1 .

Dans un champ magnétique <u>uniforme</u>, la force totale sur un circuit fermé est toujours nulle :

$$\vec{F} = I \oint \vec{dl} \times \vec{B} = I (\oint \vec{dl}) \times \vec{B} = 0$$
(5.41)

mais le champ uniforme produira cependant un couple sur le circuit.

Calculons le couple sur une boucle rectangulaire placée dans un champ uniforme dirigé suivant z.



Fig. 15 Couple sur une boucle de courant

Les forces sur les deux côtés de longueur a sont alignées et opposées et ne produisent aucun couple (pour le sens du courant sur le dessin, elles tendent à agrandir la boucle). Les forces sur les deux côtés de longueur b sont opposées mais non alignées et elles produisent un couple. L'amplitude de chacune des forces est :

$$F = I b B$$

et le couple résultant est

$$\vec{C} = a F \sin \theta \hat{1}_x$$

= I a b B sin $\theta \hat{1}_x$
= m B sin $\theta \hat{1}_x$

qu'on peut écrire

$$\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B} \tag{5.42}$$

en utilisant le moment magnétique m de la boucle.

Le couple résultant sur une boucle a tendance à aligner le moment magnétique m sur le champ \vec{B} .

On peut montrer que l'expression (5.42) pour le couple reste valable pour une boucle de forme quelconque dans un champ uniforme. Pour un champ B non uniforme, l'expression (5.42) reste cependant valable pour un dipôle magnétique de dimension infinitésimale.

On constate que le couple (5.42) est proportionnel au courant I passant dans la boucle. En mesurant ce couple, par exemple au moyen d'un ressort de rappel, on peut donc mesurer le courant. C'est le principe du galvanomètre à cadre mobile.

Le principe du moteur à courant continu est aussi basé sur le couple exercé sur un cadre placé dans un champ magnétique, et parcouru par un courant. Le champ magnétique est produit par un aimant permanent ou par un électro-aimant. Cependant, si le courant conserve toujours le même sens, le couple s'inverse à chaque demi-révolution. Il faut donc inverser le courant pour maintenir le couple dans le même sens. C'est réalisé au moyen d'un commutateur sur lequel le courant est amené au moyen de contacts à balais.



Fig. 16 Principe du moteur à courant continu

Le couple garde alors toujours le même signe mais subit de fortes fluctuations. En pratique un moteur à courant continu aura un grand nombre de spires distribuées sur un rotor pour avoir un couple plus grand et relativement constant.

5.9 Effet Hall

L'effet Hall explique l'apparition d'une différence de potentiel transversale dans un conducteur parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique.

Considérons une plaquette conductrice de largeur L et d'épaisseur ℓ dans laquelle circule un courant I. Un champ magnétique uniforme \vec{B} est orienté perpendiculairement à la plaquette. Supposons que le courant soit dû au déplacement de charges négatives (des électrons) q_e avec la vitesse de dérive \vec{v}_d (qui est donc dirigée dans le sens opposé au courant). Les électrons seront soumis à une force magnétique dirigée vers le haut :

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{B}} = |\mathbf{q}_{\mathbf{e}}| \mathbf{v}_{\mathbf{d}} \mathbf{B} \, \hat{\mathbf{l}}_{\mathbf{z}} \tag{5.43}$$



Fig. 17 Principe de l'effet Hall

Ils seront donc déviés vers le haut dans leur mouvement et la face supérieure de la plaquette va se charger négativement tandis que la face inférieure se chargera positivement. Cette séparation des charges va produire un champ électrique transverse tel que la force électrique compensera exactement la force magnétique à l'état stationnaire, et le mouvement redevient horizontal en moyenne. La force électrique est donc dirigée vers le bas

$$\vec{F}_{E} = - \left| q_{e} \right| \vec{E}_{t} = -\vec{F}_{B}$$
(5.44)

et le champ électrique transverse est

$$\vec{E}_t = v_d \ \vec{B}_z \tag{5.45}$$

Le champ électrique transverse produit une différence de potentiel, ou tension de Hall, entre les côtés opposés de la plaquette

$$V_{\text{Hall}} = E_t L = v_d B L \tag{5.46}$$

En introduisant le courant, et en utilisant (4.13)

 $I = J S = J L \ell = N_e \mid q_e \mid v_d L \ell$

on a aussi

$$V_{\text{Hall}} = \frac{IB}{N_e |q_e| \ell}$$
(5.47)

La mesure de la tension de Hall peut servir à mesurer B si l'on connaît v_d . C'est le principe de la sonde à effet Hall.

On remarque également que la tension de Hall dépend du signe de la charge des particules en mouvement. Si le courant était dû à des charges positives en mouvement, la force magnétique sur ces charges serait toujours dirigée vers le haut, ce qui entraînerait

une accumulation de charges positives sur la face supérieure de la plaquette. Le champ électrique transverse sera dirigé vers le bas et le signe de la tension de Hall aura changé.

L'effet Hall permet également d'expliquer comment la force magnétique (5.3) est transmise à un fil. Le champ magnétique agit sur les électrons libres en mouvement qui constituent le courant (5.1a). Les ions positifs qui forment le réseau d'un conducteur sont immobiles et ne peuvent pas être soumis à une force magnétique. On observe pourtant une force agissant sur le conducteur entier. L'effet Hall explique qu'il se produit une séparation des charges et un champ électrique transverse dans le fil. C'est ce champ transverse qui exercera une force sur les ions positifs du fil. La « force magnétique » sur un fil est en fait une force électrique agissant sur le réseau d'ions.

5.10 Conditions aux limites

De même que le champ électrique subit une discontinuité (de sa composante normale) au passage d'une charge de surface σ , le champ magnétique subit une discontinuité (de sa composante tangentielle) au passage d'un courant de surface \vec{K} .

Considérons une surface parcourue par une densité superficielle de courant K et séparant l'espace en deux parties notées 1 et 2.

$$\frac{\text{espace 1}}{\text{espace 2}}$$

En considérant un volume cylindrique (ou autre) situé de part et d'autre de la surface, on aura (le procédé est semblable à celui des §2.3 et §3.3.3) :



Fig. 18 Continuité du champ normal

$$\oint_{S} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

$$\overrightarrow{B}_{1} \cdot \overrightarrow{dS_{1}} + \overrightarrow{B}_{2} \cdot \overrightarrow{dS_{2}} = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$
(5.48)

La composante normale du champ magnétique est donc continue.

Pour la composante tangentielle, considérons un petit contour normal au courant de surface



Fig. 18 Discontinuité du champ tangentiel

$$\oint_{c} \vec{B} \vec{dl} = \mu_{0} I$$

$$(B_{1t}^{\perp} - B_{2t}^{\perp}) \ell = \mu_{0} K \ell$$

$$B_{1t}^{\perp} - B_{2t}^{\perp} = \mu_{0} K$$

où B_{1t}^{\perp} et B_{2t}^{\perp} sont les composantes de \vec{B} qui sont parallèles à la surface et perpendiculaires au courant. Si on prend un contour situé parallèlement au courant, on trouvera que les composantes tangentielles correspondantes de \vec{B} sont continues. L'expression générale est alors :

$$\vec{l}_n \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \mu_0 \vec{K}$$
 (5.49)

où \hat{l}_n est la normale dirigée de $2 \rightarrow 1$, et qui exprime la discontinuité du champ magnétique tangentiel au passage d'un courant superficiel.

Le potentiel vecteur restera continu :

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 \tag{5.50}$$

On peut par exemple illustrer ces conditions dans le cas du solénoïde infini. Le champ magnétique est donné en (5.9a). En donnant l'indice 2 à l'intérieur du solénoïde :

$$B_1 - B_2 = -\mu_0 n I I_z$$

La densité de courant superficiel équivalente au bobinage est (5.23)

$$\vec{K} = n I \hat{l}_{\phi}$$

On vérifie bien que

$$\vec{l}_n \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \vec{l}_n \times (-\mu_0 \text{ n I}) \vec{l}_z = -\mu_0 \text{ n I} \vec{l}_r \times \vec{l}_z = \mu_0 \text{ n I} \vec{l}_{\phi} = \mu_0 \vec{K}$$

Le potentiel vecteur est continu comme on le voit en (5.30).

6 CHAMP MAGNÉTIQUE DANS LA MATIÈRE - MILIEUX MAGNÉTIQUES

6.1 Diamagnétisme et paramagnétisme

On a vu que les phénomènes magnétiques sont dus à la présence de charges en mouvement, donc de courants. Les propriétés magnétiques de la matière sont également associées à la présence de courants, mais à l'échelle microscopique. L'étude de ces propriétés relève de la mécanique quantique et de la physique atomique et on ne donnera ici que quelques arguments basés sur la mécanique classique. Nous considérerons essentiellement les propriétés macroscopiques, dans des milieux supposés continus.

Les propriétés magnétiques sont associées au mouvement des électrons, et les courants microscopiques sont de deux types : le mouvement orbital de l'électron autour du noyau et d'autre part le spin de l'électron. Chacun de ces courants atomiques correspond à un moment dipolaire magnétique et produit un champ magnétique. En l'absence de champ extérieur, les moments dipolaires orbitaux sont répartis de manière aléatoire et s'équilibrent macroscopiquement.

Dans de nombreux atomes les moments magnétiques de spin sont couplés par paires de sens opposés (suivant le principe d'exclusion) et le moment dipolaire net de spin est nul. Dans certains cas, un ou deux électrons ne sont pas couplés et l'atome acquiert alors un moment dipolaire permanent.

6.1.1 Diamagnétisme

Dans un matériau diamagnétique, les atomes n'ont pas de moment magnétique permanent. Lorsqu'on applique un champ extérieur, le moment orbital des électrons est modifié de telle sorte que la variation de moment dipolaire est dirigée dans le sens <u>opposé</u> au champ externe (suivant la loi de Lenz).

Les moments magnétiques induits des atomes sont dirigés à l'opposé du champ magnétique. Cette variation du courant d'électrons persiste même après que le champ extérieur a atteint une valeur constante. C'est le mécanisme du <u>diamagnétisme</u>.

L'effet diamagnétique, qui est présent dans tous les matériaux, est très faible et il est souvent masqué par les effets paramagnétiques et ferromagnétiques.

Effet du champ magnétique sur l'orbite électronique

Considérons un électron sur une orbite circulaire de rayon R, avec une vitesse v.

On peut assimiler ce mouvement à un courant. Le courant est la charge qui, par unité de temps, passe en tout point de l'orbite :

$$I = \frac{q_e}{T} = \frac{q_e v}{2\pi R}$$
(6.1)

où T = $2\pi r/v$ est la période de rotation et q_e la charge de l'électron.



Fig. 1 Orbite électronique et champ magnétique

Le moment dipolaire magnétique est donc (voir figure 1)

$$\vec{m} = I \pi R^2 \vec{l}_z = \frac{1}{2} q_e v R \vec{l}_z$$
 (6.2)

Si on établit un champ magnétique, perpendiculaire au plan de l'orbite, il y aura un champ électrique induit (voir chapitre suivant) tangentiel :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 2\pi R E_t = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E_t = -\frac{1}{2} R \frac{dB}{dt}$$
(6.3)

La force due à ce champ accélère la particule sur l'orbite et on a :

$$q_e E_t = m_e \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} q_e R \frac{dB}{dt}$$

Si le champ magnétique passe de 0 à ΔB , la vitesse passera de v_0 à $v_0 + \Delta v$ avec

$$\Delta \mathbf{v} = -\frac{1}{2} \, \frac{\mathbf{q}_e \, \mathbf{R}}{\mathbf{m}_e} \, \Delta \mathbf{B}$$

Une variation de la vitesse orbitale produit une variation du moment dipolaire

$$\Delta m = \frac{1}{2} q_e \Delta v R \dot{l}_z = -\frac{q_e^2 R^2}{4m_e} \Delta B$$

Le signe moins signifie que le moment ajouté est opposé au champ magnétique. Conformément à la loi de Lenz, le champ induit s'oppose à la variation du flux. La variation de moment magnétique est donc opposée à la direction de B. Ce phénomène est le <u>diamagnétisme</u>.

6.1.2 Paramagnétisme

Dans un matériau paramagnétique, les atomes ont des moments magnétiques permanents mais leurs orientations sont aléatoires en l'absence de champ extérieur. Lorsqu'on applique un champ extérieur, les dipôles ont tendance à s'aligner suivant l'orientation du champ à cause du couple $\vec{m} \times \vec{B}$ (comme les dipôles électriques d'un diélectrique sont orientés par un champ électrique) mais l'agitation thermique s'oppose à ce processus, et le paramagnétisme reste généralement très faible. L'alignement partiel des moments dipolaires vient ici renforcer le champ extérieur.

Nous parlerons plus loin d'une forme très particulière (et beaucoup plus intense) de magnétisme qui est le ferromagnétisme.

Dans un champ magnétique non uniforme, un dipôle magnétique est soumis à une force :

 $\vec{F} = \text{grad}(\vec{m}, \vec{B})$

(6.6)

en plus du couple $\vec{m} \times \vec{B}$.

Lorsque m et B ont même sens, cette force est dirigée vers la région où le champ est le plus intense. Un matériau paramagnétique sera donc faiblement attiré vers la région de champ intense (un matériau ferromagnétique sera fortement attiré) et sera attiré par un aimant.

Un matériau diamagnétique pour lequel \overline{m} et \overline{B} ont tendance à être opposés, sera attiré vers la région où le champ est plus faible et sera donc repoussé par un aimant.



Fig. 2 (a) Un matériau paramagnétique ou ferromagnétique est attiré vers un aimant (b) Un matériau diamagnétique est repoussé par un aimant

Rappelons qu'un diélectrique était toujours attiré vers la région de champ intense et que la polarisation avait toujours tendance à s'aligner dans la même direction que le champ électrique.

6.1.3 Répartition dipolaire en volume – Vecteur magnétisation

Sous l'effet d'un champ magnétique la matière devient magnétisée (ou aimantée), c'est à dire que les dipôles magnétiques élémentaires prennent, en moyenne, une orientation préférentielle.

Dans un milieu paramagnétique, les moments de spin s'alignent (très faiblement) suivant le champ. Dans un milieu diamagnétique l'effet dominant est que les variations de moments magnétiques orbitaux sont opposées au champ.

Pour étudier les phénomènes d'un point de vue macroscopique, on définit la magnétisation (ou l'aimantation) d'un milieu, comme le moment magnétique résultant par unité de volume :

M : densité de moment magnétique
$$(A/m)$$

Le vecteur \vec{M} joue un rôle semblable à celui de la polarisation \vec{P} dans les milieux diélectriques.

6.2 Champ créé par de la matière magnétisée

6.2.1 Courants de magnétisation

Nous supposons avoir un volume de matière magnétisée, dont la magnétisation M est connue, et nous recherchons le champ produit par ce volume.

On s'intéresse donc au champ produit par la magnétisation elle-même, et pas à la cause de la magnétisation. La démarche est semblable à celle du § 3.2.1 pour les milieux diélectriques. Plutôt que le champ, nous allons calculer le potentiel vecteur. Le potentiel vecteur d'un dipôle magnétique est (5.34) :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{\mathbf{l}}_R}{R^2}$$
(6.7)

Nous considérons que le milieu magnétisé peut être remplacé par une distribution de dipôles magnétiques (c'est à dire de courants élémentaires) dans le vide. Un volume $d\tau'$ contient un moment dipolaire $\vec{M} d\tau'$ et le potentiel vecteur total est donc

$$\vec{A} (\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{M} \times \hat{\mathbf{l}}_R}{R^2} d\tau'$$
(6.8)

On peut écrire

$$\operatorname{grad}'(\frac{1}{R}) = \frac{1_R}{R^2}$$

où le gradient (donc les dérivées) est pris par rapport au point courant du volume τ' .



Fig. 3 Volume magnétisé

Et donc

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \left[\vec{M} \times \text{grad}'(\frac{1}{R}) \right] d\tau'$$

En utilisant la formule

rot (f \vec{G}) = f rot $\vec{G} - \vec{G} \times \text{grad } f$ avec f = 1/R et $\vec{G} = \vec{M} (x', y', z')$

on obtient

$$\vec{A} (\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\operatorname{rot'} \vec{M}}{R} \, \mathrm{d}\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \operatorname{rot'} (\frac{\vec{M}}{R}) \, \mathrm{d}\tau'$$

On utilise ensuite l'identité (voir note)

$$\int_{\tau} \operatorname{rot} \vec{G} \, \mathrm{d}\tau = -\oint_{S} \vec{G} \times \vec{\mathrm{dS}}$$
(6.9)

et on a

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\operatorname{rot'} M}{R} \, \mathrm{d}\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{M} \times \vec{dS'}}{R}$$
(6.10)

où S' est la surface extérieure du volume magnétisé τ' .

En comparant (6.10) à l'expression (5.17) qui donne le potentiel vecteur d'une distribution volumique de courants, ainsi qu'à (5.24) pour une distribution de courants de surface, on peut exprimer le potentiel (6.10) sous la forme :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{J}_{\text{mag}}}{R} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{K}_{\text{mag}}}{R} dS'$$
(6.11)

Le volume magnétisé peut donc être modélisé au moyen d'une densité volumique de courants de magnétisation

$$\vec{J}_{mag} = \operatorname{rot} \vec{M}$$
 (A/m²) (6.12)

et d'une densité surfacique de courants de magnétisation

$$\vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \hat{I}_n$$
 (A/m) (6.13)

Le potentiel vecteur (et donc le champ magnétique) dû au volume magnétisé est donc le même que celui qui serait produit par les densités volumique \vec{J}_{mag} et surfacique \vec{K}_{mag} de courants. Ces courants de magnétisation sont réels, mais attachés à la matière. Après avoir introduit ces courants internes de manière rigoureuse (et mathématique) nous allons essayer d'en donner une interprétation plus intuitive et physique.

<u>Note</u> Partons du théorème de la divergence (Ostrogradski)

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \vec{a} \, \mathrm{d}\tau = \oint_{S} \vec{a} \cdot \vec{\mathrm{dS}}$$
(6.14)

et remplaçons \vec{a} par $\vec{G} \times \vec{c}$ où \vec{c} est un vecteur constant et arbitraire :

div
$$\vec{a} = \text{div} (\vec{G} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot \text{rot} \vec{G} - \vec{G} \cdot \text{rot} \vec{c} = \vec{c} \cdot \text{rot} \vec{G}$$

 $\vec{a} \cdot \vec{dS} = (\vec{G} \times \vec{c}) \cdot \vec{dS} = \vec{c} \cdot (\vec{dS} \times \vec{G})$

Et (6.14) s'écrit alors

$$\int_{\tau} \vec{c} \cdot \operatorname{rot} \vec{G} \, d\tau = \oint_{S} \vec{c} \cdot (\vec{dS} \times \vec{G})$$

Comme \vec{c} est constant

$$\vec{c} \cdot \int_{\tau} \operatorname{rot} \vec{G} \, d\tau = \vec{c} \cdot \oint_{S} \vec{dS} \times \vec{G}$$

et comme \vec{c} est arbitraire, on obtient (6.9)

6.2.2 Interprétation des courants de magnétisation

Considérons d'abord le cas d'une magnétisation uniforme. Cela signifie qu'il y a une densité uniforme de courants atomiques circulant partout à l'intérieur de la matière. Si on imagine une coupe du matériau, on aura une multitude de courants atomiques tournant dans le même sens. A l'intérieur du matériau, il n'y aura aucun courant résultant, car les courants adjacents s'annulent, et donc

$$\vec{J}_{mag} = rot \vec{M} = 0$$

pour une magnétisation uniforme.



Fig. 4 Courants de magnétisation

Par contre, à la surface, il n'y a plus de courant adjacent d'un dipôle voisin, et il y aura un courant résultant circulant toujours dans la même direction, sur la surface du matériau magnétisé.

Considérons un petit bloc à l'intérieur de la matière aimantée



Fig. 5 Courant superficiel

Si la magnétisation est verticale, il y aura un courant superficiel sur les faces verticales du bloc. Le moment magnétique total du bloc est égal au produit de la magnétisation par le volume :

$$m = M a b c$$

Le moment d'un dipôle est par définition le produit du courant par la surface, et la surface de la boucle est S = a c,

$$m = I S = I a c$$

et donc

I = M b

Le courant superficiel est le courant par unité de longueur (verticalement) sur chacune des faces verticales :

$$\mathbf{K} = \mathbf{I}/\mathbf{b} = \mathbf{M} \tag{6.15}$$

Ce raisonnement s'applique à tous les blocs et en particulier à ceux qui touchent la surface externe du matériau. Nous avons considéré jusqu'à présent que la magnétisation était parallèle à la surface extérieure. On voit sur la figure 4 qu'il n'y aura pas de courant superficiel sur une surface extérieure perpendiculaire à \vec{M} ; et l'expression générale, qui tient compte de l'orientation relative de \vec{M} par rapport à la surface est :

$$\vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \vec{i}_n \tag{6.16}$$

Dans le cas d'une magnétisation uniforme, il n'y a pas de courant de volume. Par contre si la magnétisation varie d'un point à un autre, les courants des boucles voisines ne se compenseront plus et il en résultera un courant dans le volume du matériau.



Fig. 6 Courants de volume

Considérons deux blocs voisins avec des magnétisations légèrement différentes. Sur la surface de contact entre les blocs, il y aura un courant (dans la direction des y positifs)

 $I = I_1 - I_2 = M_z b - (M_z + \Delta M_z) b = -\Delta M_z b$

Pour notre figure

$$\Delta M_{z} = \frac{\partial M_{z}}{\partial x} . a$$

et le courant sur l'interface est

$$\mathbf{I} = -\frac{\partial \mathbf{M}_z}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a} \mathbf{b}$$

Pour relier le courant I à la densité de courant en volume, il faut se rendre compte que ce courant I est réparti sur une certaine section. Si on suppose que tout le volume est constitué de tels petits blocs, à chacun de ces blocs doit être associée une de ses faces latérales. Pour passer à la densité de courant, il faut associer au courant I la surface ab de l'une des faces perpendiculaires à l'axe y (ou, ce qui revient au même, le courant I sur chacune des faces doit être séparé par moitié entre les deux blocs adjacents). La densité de courant est alors

$$J_{y} = \frac{I}{a b} = -\frac{\partial M_{z}}{\partial x}$$
(6.17)

Ce n'est pas encore le rotationnel, mais c'est le début. Pour établir complètement l'expression de J_y , il faudrait encore considérer l'empilement de deux blocs suivant z.

On a donc vu que les courants atomiques de la matière magnétisée peuvent donner naissance à des courants macroscopiques qui sont liés à M.

6.3 Équations magnétostatiques en présence de milieux magnétiques

6.3.1 Loi d'Ampère dans un milieu magnétique

La loi d'Ampère exprime que la densité de courant est la source du champ magnétique

rot
$$B = \mu_0 J$$

La densité de courant doit inclure tous les courants :

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{J}}_{\ell} + \vec{\mathbf{J}}_{mag} \tag{6.18}$$

où \vec{J}_{mag} est le courant de magnétisation dû à la présence d'un matériau magnétique et \vec{J}_{ℓ} est le courant « libre ». De manière générale \vec{J}_{ℓ} reprendra tous les autres courants, y compris un courant de conduction qui pourrait circuler dans le matériau magnétique.

La loi d'Ampère s'écrit alors :

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{J} = \vec{J}_{\ell} + \vec{J}_{mag}$$
$$= \vec{J}_{\ell} + \operatorname{rot} \vec{M}$$

ou encore

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu_{0}}\vec{\mathrm{B}}-\vec{\mathrm{M}}\right)=\vec{\mathrm{J}}_{\ell} \tag{6.19}$$

On introduit alors une nouvelle grandeur

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \qquad (A/m)$$
(6.20)

qui est appelée l'excitation magnétique, ou le champ magnétisant.

En fonction de H, la loi d'Ampère s'écrit

$$rot H = J_{\ell} \tag{6.21}$$

et sous forme intégrale (théorème de Stokes)

$$\oint_{\mathbf{c}} \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = \mathbf{I}_{\ell}$$
(6.22)

où $\,I_\ell\,$ est le courant libre total passant à travers le contour fermé c.

Le champ H permet donc d'écrire les relations en fonction des seuls courants libres, c'est à dire des courants que l'on peut contrôler.

Le champs H joue un rôle semblable à celui du champ de déplacement D, qui permettait d'écrire la loi de Gauss en fonction des seules charges libres.

Cependant H est une grandeur plus utilisée que D en pratique. Pour établir un champ magnétique en présence d'un milieu magnétique, on doit amener un certain courant (libre) et ce courant déterminera H (dans un milieu homogène). Tandis que le champ B dépendra des propriétés internes de la matière.

Pour établir un champ électrique, on établira une différence de potentiel (car il est plus facile de mesurer une différence de potentiel que de mesurer des charges) et cette différence de potentiel déterminera directement E (dans un milieu homogène), sans devoir passer par le champ D.

Les relations importantes concernant H sont les relations (6.21) (6.22). Il faut faire attention que, en général, la divergence de H ne s'annule pas.

6.3.2 Milieux magnétiques linéaires

Pour les milieux paramagnétiques et diamagnétiques, la magnétisation est en général proportionnelle au champ magnétique, pour autant qu'il ne soit pas trop intense. Pour des raisons historiques, on écrit cette proportionnalité en fonction de H :

$$\vec{\mathbf{M}} = \chi_{\mathbf{m}} \vec{\mathbf{H}} \tag{6.23}$$

pour un matériau linéaire et isotrope.

La constante χ_m , sans dimension, est la susceptibilité magnétique du milieu. A partir de (6.20) on peut alors écrire

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$
$$= \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$
(6.24)

où μ est la <u>perméabilité</u> du milieu et μ_r la <u>perméabilité relative</u>. La constante μ_0 a reçu le nom de perméabilité du vide.

Dans un milieu linéaire et homogène, la densité volumique de courant de magnétisation sera proportionnelle, en tout point, à la densité de courant libre :

$$\vec{J}_{mag} = \operatorname{rot} \vec{M} = \operatorname{rot} (\chi_m \vec{H}) = (\mu_r - 1) \vec{J}_{\ell}$$
(6.25)

En particulier, s'il n'y a pas de courant libre à l'intérieur du matériau, on y aura $J_{mag} = 0$ et tous les courants de magnétisation seront en surface.

La relation $\vec{B} = \mu \vec{H}$ est appelée la <u>relation constitutive</u> du matériau magnétique linéaire, de même la relation $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ est la relation constitutive d'un diélectrique, et $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ la relation constitutive d'un milieu conducteur.

On peut regretter que les relations entre D et E d'une part et entre H et B d'autre part ne soient pas écrites « dans le même sens ». Il serait plus logique d'écrire $\vec{E} = \epsilon^{-1} \vec{D}$ en utilisant l'inverse de ϵ !

Dans un milieu diamagnétique, la susceptibilité sera un très petit nombre négatif $\chi_m \cong -10^{-5}$, la perméabilité relative sera $\mu_r < 1$, et le champ magnétique sera (très légèrement) plus faible que ce qu'il aurait été dans le vide.

Dans un milieu paramagnétique, la susceptibilité sera un très petit nombre positif $\chi_m \cong 10^{-5}$, la perméabilité relative sera $\mu_r > 1$, et le champ magnétique sera (très légèrement) plus grand que ce qu'il aurait été dans le vide. Notons que ce comportement est contraire à celui des dipôles électriques dans un diélectrique où l'alignement des dipôles donne un champ « de réaction » de sens opposé au champ externe et donc un champ électrique intérieur net plus faible.

diamagnétiques	χ_{m}	paramagnétiques	χ _m
bismuth	-1,6 10 ⁻⁴	aluminium	2,1 10 ⁻⁵
cuivre	-3,4 10 ⁻⁵	magnésium	1,2 10-5
argent	-2,4 10 ⁻⁵	palladium	8 10 ⁻⁴

Quelques valeurs

On voit que la perméabilité est très proche de celle du vide. La théorie qu'on vient de faire ne sera en fait vraiment utile que dans le cas des matériaux ferromagnétiques pour lesquels la perméabilité relative est très grande.

6.4 Exemples

6.4.1 Conducteur cylindrique

Un long conducteur de cuivre est parcouru par un courant (libre) I uniformément distribué sur la section.

Au § 5.3.1 nous avons calculé le champ magnétique pour la même configuration en considérant que le conducteur avait les caractéristiques magnétiques du vide. Tenons compte ici de ce que le cuivre est diamagnétique.

Le champ magnétisant peut se calculer à partir de (6.22) grâce à la symétrie du problème

$$\vec{H} = \frac{Ir}{2\pi b^2} \vec{i}_{\phi} \qquad r < b$$
$$= \frac{I}{2\pi r} \vec{i}_{\phi} \qquad r > b$$



Comme le cuivre est diamagnétique $\vec{M} = \chi_{cuivre} \vec{H}$ (avec $\chi_{cuivre} = -3.4 \, 10^{-5}$), les dipôles vont s'opposer au champ. Le courant de magnétisation

$$\vec{J}_{mag} = \chi_{cuivre} \frac{I}{\pi b^2} \vec{1}_z = \chi_{cuivre} \vec{J}_\ell$$

sera <u>opposé</u> au courant libre, tandis que le courant superficiel \vec{K}_{mag} aura le même sens que I.

A l'intérieur du conducteur le champ magnétique dépendra de la magnétisation $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H}$ tandis que M = 0 à l'extérieur du conducteur, et donc

$$\vec{B} = \frac{\mu I r}{2\pi b^2} \hat{I}_{\phi} \qquad r < b$$
(6.27)
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{I}_{\phi} \qquad r > b$$

A la surface du conducteur, il y a donc une discontinuité de B correspondant à la présence d'un courant superficiel.

Fig. 7 Conducteur diamagnétique

6.4.2 Solénoïde infini

Considérons le même solénoïde qu'au § 5.3.2 mais cette fois rempli d'un matériau magnétique linéaire. On peut calculer H à partir de (6.22) :

$H = n I I_z$	à l'intérieur	(6.28)
=0	à l'extérieur	(0.20)

Et avec (6.24) :

$\vec{B} = \mu n I \hat{1}_z$	à l'intérieur	(629)
= 0	à l'extérieur	(0.27)

(6.26)

$$\vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \dot{i}_n = \chi_m (\vec{H} \times \dot{i}_n) = \chi_m n I \dot{i}_{\phi}$$
(6.30)

est en effet dans le même sens que I dans le cas paramagnétique ($\chi_m > 0$) et dans le sens opposé dans le cas diamagnétique ($\chi_m < 0$). (voir la figure 5.8)

6.5 Conditions aux limites

Les conditions aux limites du § 5.10 peuvent être formulées en fonction du champ H et des courants libres.

Comme le champ magnétique normal est continu $B_{1n} = B_{2n}$ (voir 5.48) et $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$, on en déduit :

$$H_{1n} - H_{2n} = -(M_{1n} - M_{2n})$$
(6.31)

à la surface de séparation entre deux milieux.

Pour le champ H tangentiel on obtient, en appliquant (6.22) à un contour élémentaire (comme au §5.10) :

$$\vec{\mathbf{i}}_{n} \times (\vec{\mathbf{H}}_{1} - \vec{\mathbf{H}}_{2}) = \vec{\mathbf{K}}_{\ell} \tag{6.32}$$

où \vec{l}_n est la normale dirigée de 2 \rightarrow 1 et \vec{K}_{ℓ} est la densité superficielle de courant libre à la surface de séparation.

En l'absence de courant libre de surface, le champ H tangentiel sera donc continu :

$$H_{1t} = H_{2t} \tag{6.33}$$

Dans le cas particulier de l'interface entre <u>deux milieux magnétiques linéaires</u>, la continuité du champ magnétique normal implique que :

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \tag{6.34}$$

Les conditions sur le champ magnétique s'écrivent alors :

$$B_{1n} = B_{2n}$$

 $\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$

6.6 Ferromagnétisme

6.6.1 Introduction

Dans certains corps, comme le fer, le nickel, le cobalt ou leurs alliages, l'effet résultant des moments magnétiques est beaucoup plus grand que dans le cas du paramagnétisme ou du diamagnétisme. Ce phénomène est le <u>ferromagnétisme</u>.

Dans ces substances un faible champ magnétique peut produire une énorme aimantation, qui constitue l'effet dominant dans les champs observés.

Comme dans les milieux paramagnétiques, l'aimantation des matériaux ferromagnétiques provient du moment magnétique associé au spin des électrons dans la couche interne de l'atome. L'élément nouveau est une force d'interaction entre les dipôles voisins, qui est beaucoup plus grande que l'interaction magnétique directe. Cet effet indirect, qui est environ 10 000 fois plus fort que l'interaction magnétique directe, ne peut s'expliquer que par la mécanique quantique. Les moments magnétiques des atomes voisins ont alors tendance à s'aligner parallèlement l'un à l'autre.

Dans la pratique les moments ne s'alignent parfaitement qu'à l'intérieur de petits <u>domaines</u> magnétiques de dimension inférieure à 1 mm et contenant 10^{15} à 10^{16} atomes. Bien que l'alignement soit parfait à l'intérieur de chaque domaine (même en l'absence d'un champ magnétique appliqué), les domaines ont des orientations aléatoires et il n'y a pas de magnétisation globale.



Fig. 8 Répartition aléatoire des domaines magnétique

Les domaines sont séparés par des parois de quelques atomes d'épaisseur dans lesquelles la direction de l'aimantation varie progressivement d'une orientation à l'autre.

Le ferromagnétisme n'apparaît que dans les milieux où l'énergie est réduite si les spins sont parallèles plutôt que s'ils sont opposés. Il y a également une énergie associée aux parois. Les dimensions et l'orientation aléatoire des domaines correspondent à la situation où l'énergie totale du système est minimale.

Lorsqu'on applique un champ extérieur, les domaines réagissent de deux manières. Dans un champ faible les domaines dont les moments sont alignés parallèlement au champ grandissent aux dépens des autres. Dans un champ plus élevé, les domaines subissent également une rotation qui les fait s'aligner sur le champ extérieur. Pour un champ suffisamment élevé, il ne restera qu'un seul domaine et le matériau sera saturé.



Fig. 9 Evolution des domaines magnétiques soumis à un champ extérieur

A très haute température, l'agitation thermique détruit l'organisation des domaines magnétiques. Au-delà d'une température critique précise, appelée point de Curie (770°C pour le fer), le matériau cesse d'être ferromagnétique et devient paramagnétique.

6.6.2 Courbe de première aimantation et cycle d'hystérésis

Considérons un tore en matériau ferromagnétique (en fer par exemple) sur lequel est enroulé un bobinage parcouru par un courant I_{ℓ} .

A l'exception de la présence du fer à l'intérieur du bobinage, la situation est semblable à celle du § 5.3.3.



Fig. 10 Tore en matériau ferromagnétique

En appliquant (6.22) : $\oint_{c} \vec{H} \cdot \vec{dl} = N I_{\ell}$

on obtient le champ H dans le fer :

$$\vec{H} = \frac{N I_{\ell}}{2\pi r} \hat{I}_{\phi} \qquad (A/m)$$
(6.35)

où N est le nombre de spires.

On voit que H est directement proportionnel à I_{ℓ} et c'est pour cela qu'on l'appelle parfois le champ magnétisant. Le champ magnétique B dans le fer est (6.20)

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \tag{6.36}$$

mais il n'y a pas de relation simple entre M et H pour un matériau ferromagnétique.

Nous supposerons ici que le fer est isotrope et que les trois champs \vec{B}, \vec{H} et \vec{M} sont alignés (les lignes de champ sont dirigées suivant ϕ). Nous supposons aussi que H ne varie pas beaucoup dans la section du tore, c'est-à-dire que le tore est suffisamment « délié » :

$$\vec{H} \cong \frac{N I_{\ell}}{2\pi a} \hat{I}_{\phi}$$
(6.36a)

où a est le (grand) rayon du tore.

Pour obtenir le champ magnétique B, il faut le mesurer expérimentalement. Cela peut se faire à partir de la fem induite dans un bobinage auxiliaire comme on le verra plus loin. On peut alors porter B en fonction de H



Fig. 11 Courbe de première aimantation et cycle d'hystérésis

Partant de l'état neutre B = H = M = 0, on augmente progressivement le courant I et donc le champ H. Le champ B augmente également le long de la courbe $0 P_1 P_2 P_3$.

Les parois commencent à se déplacer et des domaines qui ont une orientation alignée sur le champ grandissent. La magnétisation M et donc le champ B augmentent et la magnétisation devient rapidement beaucoup plus grande que H.

Au début (par exemple jusque P_1) le phénomène est réversible : si on annule H, la magnétisation retombe à zéro.

Dans la 2^{ème} partie de la courbe, la rotation des domaines pour s'aligner avec le champ produit des déformations et des dislocations. Le phénomène est alors irréversible et il y a de l'énergie perdue sous forme de chaleur à cause des forces de friction lors des déplacements de parois.

Finalement pour un champ suffisamment élevé presque tous les dipôles seront alignés et on atteindra la <u>saturation</u> vers le point P₃, la magnétisation M n'augmente plus, et pour tout H supplémentaire, B varie simplement comme μ_0 H.

La courbe 0 P₁ P₂ P₃, hautement non linéaire, est la <u>courbe de première aimantation</u> du matériau.

Si, à partir du point P_3 , on réduit le champ H, le champ B ne revient pas sur la même courbe, mais décrit le trajet $P_3 B_r H_c$. Une fois que la plupart des domaines ont tourné pour s'aligner sur le champ, ils ne reprennent pas leur orientation initiale.

Lorsque H est revenu à zéro, il reste un champ magnétique B_r qui s'appelle le <u>champ</u> <u>rémanent</u>, et qui caractérise un aimant permanent.
Pour annuler le champ magnétique et donc détruire l'aimantation d'un échantillon, il faut appliquer un champ H_c , appelé champ coercitif, dans la direction opposée.

Lorsque H devient de plus en plus négatif les domaines commencent à s'aligner dans la direction opposée, jusqu'à la saturation en P_3' .

La boucle complète engendrée de cette façon s'appelle le cycle d'hystérésis du fer.

La surface du cycle d'hystérésis correspond à l'énergie perdue (par unité de volume et par cycle) à cause des phénomènes électromagnétiques et transformée en chaleur dans le fer.

On voit donc qu'il n'y a pas de relation fonctionnelle B = f(H) car la valeur de B ne dépend pas seulement de la valeur de H au même instant mais aussi du « passé » de l'échantillon. Par exemple pour une même valeur H = 0, il existe sur la fig. 11 trois valeurs possibles pour B, en fonction de l' « historique ».

Les courbes de première aimantation et d'hystérésis dépendent de la nature du matériau, de sa composition chimique, de sa préparation, et des traitements physiques qu'il a subis.

Pour démagnétiser un matériau, c'est-à-dire le ramener dans l'état neutre B = H = 0, il faut le soumettre à plusieurs cycles d'hystérésis en faisant décroître progressivement le champ extérieur (par exemple au moyen d'un courant alternatif d'amplitude décroissante).



Fig. 12 Démagnétisation d'un échantillon

6.6.3 Matériaux ferromagnétiques

Pour certaines applications, notamment pour les tôles de transformateur, on souhaite avoir un cycle d'hystérésis aussi étroit que possible, pour réduire les pertes par hystérésis. Une façon de réduire la surface du cycle est de diminuer le champ maximum à chaque cycle.



Fig. 13 Cycle d'hystérésis qui n'atteint pas la saturation

De plus certaines substances sont étudiées pour donner un cycle très étroit, et sont appelées matériaux ferromagnétiques <u>doux</u>.



Fig. 14 Matériau doux

Ce seront des matériaux purs, recuits, possédant très peu de dislocations et d'impuretés de sorte que les parois des domaines puissent se déplacer facilement. Les alliages de fer et nickel, types permalloy ou mumétal sont des matériaux doux qui s'aimantent facilement. Dans le cas d'un matériau doux, la relation entre B et H peut éventuellement être approchée par une relation linéaire

 $B=\mu\;H$

où μ est la perméabilité du matériau ferromagnétique. Il est clair qu'il s'agit d'une approximation valable seulement sur une certaine plage de valeurs et que la quantité

 $\mu = B/H$

varie en fonction de H.

Pour faire un aimant permanent, il faut un matériau dont la courbe d'hystérésis forme une boucle très large de manière à avoir une grande valeur pour le champ magnétique rémanent B_r . De tels matériaux sont appelés matériaux ferromagnétiques <u>durs</u>. Un exemple est

l'alliage « Alnico V » (51% Fe, 8% Al, 14% Ni, 24% Co, 3% Cu), qui subit des traitements physiques particuliers, et dont le cycle d'hystérésis se rapproche d'un "carré".



Fig. 15 Matériau dur

Les ferrites constituent une autre classe de matériaux magnétiques. Certaines ferrites sont des céramiques. Les ferrites sont mauvais conducteurs de l'électricité (résistivité de 1 à $10^3 \Omega . m$, alors que la résistivité du fer est d'environ $10^{-7} \Omega . m$), ce qui limite les pertes par courants de Foucault. Les ferrites sont donc utilisées dans les applications à haute fréquence ainsi que pour l'enregistrement magnétique.

Quelques valeurs (à titre d'exemples)

	B _{sat} (T)	$\mu_{r max}$	B _r (T)	$H_c (A/m)$
Fer doux	2,1	5 000		
cobalt	1,8	250		
nickel	0,6	600		
type permalloy	0,8	150 000	0,006	1,2
type alnico	1,5		1,3	60 000
ferrite doux	0,28	3000	0,1	24
ferrite dur	0,45		0,34	190 000

6.6.4 Blindage magnétique

Le blindage d'un appareil électrique est l'opération qui consiste à le protéger de l'influence des champs extérieurs.

Le blindage électrostatique permet d'éliminer l'influence d'un champ électrique constant en insérant l'appareil dans une enveloppe conductrice. Le champ électrique est alors nul dans la cavité intérieure.

Certains appareils (comme par exemple le tube cathodique d'un téléviseur) sont particulièrement sensibles aux champs magnétiques constants.

Le blindage magnétique consiste à entourer l'appareil à protéger d'un matériau de grande perméabilité.

Reprenons les conditions aux limites du § 6.5 en considérant que le milieu 2 est l'air et le milieu 1 est un matériau ferromagnétique (supposé linéaire) de perméabilité μ . Les conditions sont :

$$B_{1n} = B_{2n}$$



Fig. 16 Réfraction des lignes de champ

On constate donc une réfraction des lignes de champ. Si la perméabilité μ est élevée, les lignes de champ vont avoir tendance à s'aligner le long de la paroi à l'intérieur du matériau magnétique ($\theta_1 >> \theta_2$). Si le matériau magnétique entoure un appareil, la pénétration du champ magnétique dans la zone intérieure sera fortement réduite. L'efficacité d'un tel système ne sera bien sûr pas parfaite.



Fig. 17 Blindage magnétique

6.6.5 Point de fonctionnement d'un aimant

On considère un aimant constitué par une armature en matériau ferromagnétique, autour de laquelle est bobiné un enroulement comportant N spires, et qui est interrompu de manière à présenter un entrefer.

Si l'épaisseur de l'entrefer est petite, on peut, en première approximation, supposer que les lignes de champ de B ferment la boucle comme dans le tore (§ 6.6.2). Il y aura un certain épanouissement dans l'entrefer, que nous négligerons.

On supposera que le flux de B à travers toute section de l'armature est constant et que B est uniforme sur la section.

Comme la composante normale de B est continue à l'interface fer-air, on aura

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 \tag{6.38}$$

où B_1 est le champ dans l'entrefer et B_2 le champ dans le fer. Le champ magnétique B est donc le même partout.



Fig. 18 Electro-aimant

Le champ H prendra des valeurs différentes dans le fer et dans l'air. En appliquant (6.22), on a :

$$\oint_{c} \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = H_{1} \ell_{1} + H_{2} \ell_{2} = N I$$
(6.39)

où ℓ_1 est la longueur de l'entrefer et ℓ_2 est la longueur du trajet dans le fer. Dans l'entrefer, la magnétisation est nulle, M = 0, et on a la relation

$$B_1 = \mu_0 H_1 \tag{6.40}$$

et donc, comme $B_1 = B_2$

$$\frac{B_2}{\mu_0} \ell_1 + H_2 \ \ell_2 = N I \tag{6.41}$$

Ce qui donne une relation entre les valeurs de B_2 et H_2 .

Pour déterminer B_2 et H_2 , il faut une autre relation, à savoir le lien entre les champs B et H dans le fer. Si on fait l'approximation que le milieu magnétique est linéaire $B_2 = \mu H_2$, on peut résoudre algébriquement l'équation (6.41). (Nous ferons cette approximation plus loin dans le cadre des circuits magnétiques).

Considérons cependant le cas général, dans lequel la relation non linéaire entre B_2 et H_2 est celle de la fig. 11.

L'équation (6.41) donne une relation linéaire entre B_2 et H_2 , c'est-à-dire une droite dans le plan (H_2, B_2) :

$$H_2 = -\frac{\ell_1}{\mu_0 \ \ell_2} B_2 + \frac{N I}{\ell_2}$$
(6.42)

dont le coefficient angulaire est négatif. Pour différentes valeurs du courant I, les droites subissent une translation horizontale. Le point de fonctionnement (c'est à dire le couple B,H) de l'<u>électro-aimant</u> sera déterminé par l'intersection de cette droite avec le cycle d'hystérésis du matériau. On voit sur la fig. 19 qu'il y a plusieurs solutions différentes, (les points a, b, c) en fonction de l'historique du matériau. Si le matériau avait préalablement été démagnétisé, on obtiendra le point a. Si on a augmenté le courant jusqu'à la saturation pour le faire ensuite redescendre jusqu'à la valeur I, on aura le point b. Si on a eu un courant négatif qui a ensuite remonté jusque I, on aura le point c. Le champ dans l'entrefer sera toujours le même que le champ dans le fer $B_1 = B_2$.



Fig. 19 Point de fonctionnement d'un aimant

Dans le cas où I = 0, on aura une droite de fonctionnement passant par l'origine. Si le matériau a été préalablement saturé, on aura le point d comme solution, et le champ magnétique pourra être très important pour autant qu'on ait un matériau avec un cycle d'hystérésis très large. On a alors un <u>aimant permanent</u> et une valeur importante du champ magnétique dans l'entrefer.

Dans le cas de l'aimant permanent, les équations précédentes deviennent :

$$B_1 = B_2 = \mu_0 H_1$$

$$H_{1} = -\frac{\ell_{2}}{\ell_{1}} H_{2}$$

$$H_{2} = -\frac{\ell_{1}}{\mu_{0} \ell_{2}} B_{2}$$
(6.43)

Le champ H n'est donc pas nul, même en l'absence de courant magnétisant, et il est de sens opposé dans le fer et dans l'air.

Notons enfin que le champ rémanent B_r de la fig. 11 est celui qui existe dans un aimant permanent fermé, c'est-à-dire sans entrefer, comme le tore de la fig. 10.

6.7 Circuits magnétiques

On appelle <u>circuit magnétique</u> un système dans lequel les lignes de champs magnétiques suivent, sur une partie importante de leur parcours, des milieux magnétiques de formes appropriées, et se ferment éventuellement dans l'air à travers des parcours relativement courts appelés entrefers. Le tore de la fig. 10 et l'aimant de la fig. 18 sont des exemples de circuits magnétiques.

Calculer un circuit magnétique consiste à calculer le champ magnétique ou le flux magnétique pour un certain courant magnétisant (circulant dans des bobinages placés autour des pièces magnétiques) dans un circuit magnétique dont on connaît la constitution et les dimensions.



Fig. 20 Circuit magnétique

Nous considérons ici le calcul des circuits magnétiques en <u>première approximation</u>, en faisant les hypothèses suivantes :

1) On admet que les lignes de champ magnétique suivent, sans dispersion, les pièces ferromagnétiques dont elles épousent la forme et dans les entrefers, on leur suppose une forme schématique simple. Le flux magnétique Φ est donc conservé tout au long du circuit. 2) Dans chaque section, on admet que le champ B est uniforme et que le flux magnétique est donné par :

$$\Phi = \int_{S} \vec{B} \cdot \vec{dS} = BS$$
(6.44)

3) On suppose que les matériaux magnétiques sont linéaires avec une certaine perméabilité μ .

Il s'agit évidemment d'une approximation assez grossière. Pour obtenir des résultats plus précis il faut utiliser des méthodes numériques.

La première hypothèse est justifiée par les conditions aux limites (6.37) qui montrent que les lignes de champ ont tendance à suivre la forme des pièces magnétiques.

Avec ces hypothèses un circuit magnétique est semblable à un circuit conducteur parcouru par un courant, avec les correspondances suivantes :

$$J \Leftrightarrow B \tag{6.45}$$
$$I \Leftrightarrow \Phi$$

On sait que les lignes de courant suivent la forme des conducteurs. Elles ne peuvent en effet pas s'en échapper car le milieu extérieur (l'air) a une conductivité nulle.

Il n'en va pas exactement de même pour les circuits magnétiques car l'air a une perméabilité μ_0 faible (par rapport aux matériaux ferromagnétiques) mais non nulle. De plus, les lignes de B doivent nécessairement traverser les entrefers. L'application des conditions aux limites (6.37) montre que les lignes de champ dans l'air seront pratiquement normales à la surface du matériau ferromagnétique ($\theta_2 \cong 0$ si μ_r est grand).

On écrit la loi d'Ampère (6.22) en intégrant tout au long du circuit magnétique

$$\oint_{c} \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = N I$$
(6.46)

Le flux dans le circuit est

$$\Phi = \int_{S} \vec{B} \cdot \vec{dS}$$
(6.47)

et les champs B et H sont liés par une relation linéaire. Il en résulte une relation linéaire entre N I et Φ , que l'on écrit sous la forme

$$N I = \Re_T \Phi \tag{6.48}$$

Le facteur de proportionnalité s'appelle la <u>réluctance</u> du circuit magnétique.

La relation (6.48) est semblable à la loi d'Ohm (V = R I) pour un circuit électrique, et la réluctance \Re d'un circuit magnétique est analogue à la résistance R d'un circuit électrique. Pour continuer l'analogie, la quantité N I est appelée la « force magnétomotrice » et s'exprime souvent en « ampères-tours » (un tour est un nombre sans dimension) :

$$N I \equiv fmm \qquad (A t) \tag{6.49}$$

En décomposant (6.46) suivant les différentes parties du circuit magnétique :

$$\oint_{c} \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = \sum_{i} \int_{\ell_{i}} \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = \sum_{i} \Re_{i} \Phi$$
(6.50)

et \Re_i est la réluctance de la partie i du circuit. La relation (6.48) est alors semblable à la loi des mailles de Kirchhoff :

$$N I = \sum_{i} \Re_{i} \Phi$$
(6.51)

Pour une section de circuit de longueur ℓ , contenant un matériau linéaire de perméabilité μ , la réluctance est

$$\Re = \frac{\int_{\ell} \vec{H} \cdot \vec{d\ell}}{\Phi} = \frac{\int_{\ell} \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot \vec{d\ell}}{\int_{S} \vec{B} \cdot \vec{dS}}$$
(6.52)

On peut comparer cette expression de la réluctance aux expressions (4.41) et (4.42) qui donnent des valeurs d'une capacité et d'une résistance.

L'unité de réluctance est A/Wb qui est l'inverse du Henry. L'inverse de la réluctance est la perméance.

Si B est constant dans une section normale, $B\!=\!\Phi/S$, et l'expression de la réluctance devient

$$\Re = \frac{\int_{\ell} \frac{\Phi}{\mu S} d\ell}{\Phi} = \int_{\ell} \frac{d\ell}{\mu S}$$
(6.53)

et si la section est constante on a

$$\Re = \frac{\ell}{\mu \, \mathrm{S}} \tag{6.54}$$

qui est semblable à l'expression correspondante (4.31) pour le calcul d'une résistance.

La réluctance permet donc d'exprimer la relation entre le flux et la force magnétomotrice. La réluctance ne dépend que de la géométrie du circuit magnétique et de la perméabilité du matériau.

La réluctance est inversement proportionnelle à la perméabilité. L'utilisation d'un matériau à grande perméabilité permet donc d'obtenir une grande valeur du flux magnétique pour un courant magnétisant donné.

Exemple 1



Fig. 21 Exemple 1

Considérons le circuit magnétique de la fig. 21 comprenant deux matériaux magnétiques différents et un entrefer. On suppose que le flux ϕ est le même partout. Il y a deux enroulements magnétisants qui produisent ici des flux opposés. La force magnétomotrice est donc

$$fmm = N_1 I_1 - N_2 I_2$$

Les caractéristiques sont : matériau 1 : $\ell_1 = 50 \text{ cm}$ $\mu_1 = 200 \mu_0$ matériau 2 : $\ell_2 = 50 \text{ cm}$ $\mu_2 = 2000 \mu_0$ entrefer : $\ell_3 = 0,2 \text{ cm}$ $\mu_3 = \mu_0$ $S = 4 \text{ cm}^2$

La section est constante et la réluctance de chaque partie du circuit peut se calculer par (6.54) :

$$\Re_{1} = \frac{0.5}{200 \,\mu_{0} \,4 \,10^{-4}} = 4.97 \,10^{6} \,\mathrm{H}^{-1}$$
$$\Re_{2} = \frac{0.5}{2000 \,\mu_{0} \,4 \,10^{-4}} = 4.97 \,10^{5} \,\mathrm{H}^{-1}$$
$$\Re_{3} = \frac{2 \,10^{-3}}{\mu_{0} \,4 \,10^{-4}} = 3.98 \,10^{6} \,\mathrm{H}^{-1}$$

Les trois réluctances sont en série, la réluctance totale du circuit est

$$\Re_{\rm T} = \Re_1 + \Re_2 + \Re_3 = 9,44 \ 10^6 \ {\rm H}^{-1}$$

 $N_1 \ {\rm I}_1 - N_2 \ {\rm I}_2 = \Re_{\rm T} \ \Phi$

Avec N₁ = 100, I₁ = 6A, N₂ = 200, I₂ = 2A on obtiendra un flux $\phi = 21 \ 10^{-6}$ Wb et donc un champ B = 5,3 10^{-2} Wb/m²

Exemple 2

Un circuit magnétique peut éventuellement contenir plusieurs « branches » en parallèle. Comme div $\vec{B} = 0$, le flux vérifiera une loi de conservation semblable à la loi des nœuds de Kirchhoff pour un circuit électrique.



Fig. 22 Exemple 2

Par exemple pour le circuit de la fig. 22, on aura la relation

$$\Phi = \Phi_a + \Phi_b$$

Si \Re_a est la réluctance de la branche a et \Re_b la réluctance de la branche b, la réluctance équivalente à la mise en parallèle des branches a et b sera

$$\Re_{\acute{eq}} = \frac{\Re_a \ \Re_b}{\Re_a + \Re_b}$$

Exemple 3

On peut faire un calcul plus précis d'un circuit magnétique si on dispose des courbes de magnétisation des matériaux. Dans ce cas on ne doit plus faire l'hypothèse de linéarité des matériaux mais on ne peut plus utiliser la notion de réluctance.

Considérons le circuit de la fig. 23 (c'est le même qu'à la fig. 21 sauf l'entrefer qui a été supprimé)



Fig. 23 Exemple 3

On souhaite obtenir un flux Φ de 2 10^{-4} Wb dans le circuit. Le champ magnétique sera donc



Fig. 24 Courbes de magnétisation pour l'exemple 3

Sur les courbes expérimentales, on peut lire les valeurs de H correspondant à cette valeur de B :

$$H_1 = 1800$$
 A/m
 $H_2 = 200$ A/m

La force magnétomotrice est donnée par (6.46)

$$fmm = \oint \vec{H} \vec{d\ell} = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 = 1000 \text{ A t}$$

Les deux bobinages sont ici concordants, et on doit donc réaliser

$$fmm = N_1 I_1 + N_2 I_2 = 1000 A t$$

pour obtenir la bonne valeur du flux dans le circuit.

La même méthode peut être utilisée pour des circuits magnétiques présentant des dérivations en parallèle.

<u>Remarque</u>

Le sens du champ magnétique correspond à la direction vers laquelle pointe le nord de l' aiguille d'une boussole plongée dans ce champ. Le pôle nord d'un aimant attire le pôle sud d'un autre aimant et repousse son pôle nord. Par conséquent le Nord géographique est un pôle sud magnétique.

Les lignes de champ magnétique forment des boucles fermées. A l'extérieur de l'aimant, les lignes émergent du pôle nord et entrent par le pôle sud; à l'intérieur, elles sont dirigées du pôle sud vers le pôle nord, comme représenté à la fig 25. La configuration des lignes de champ est semblable à celle d'un solénoïde (fig 5.5).



Fig. 25 Lignes de champ magnétique d'un aimant

7 LES CHAMPS VARIABLES

7.1 La loi de Faraday

Nous abordons maintenant l'étude des champs variables avec le temps, c'est à dire l'électrodynamique.

En statique, les champs électriques et magnétiques ne sont pas reliés. On peut ainsi traiter séparément le problème de l'électrostatique qui ne fait intervenir que \vec{E} et celui de la magnétostatique qui ne fait intervenir que \vec{B} .

Il n'en va plus de même lorsque les champs varient temporellement. Un champ magnétique variable produit un champ électrique et vice versa. C'est précisément ce couplage entre les champs qui produit des ondes électromagnétiques capables de se propager.

La loi de Faraday ou loi de l'induction électromagnétique, sous forme différentielle, et valable en tout point de l'espace est :

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}}$$
(7.1)

et exprime un lien entre les dérivées spatiales de \vec{E} et la dérivée temporelle de \vec{B} .

L'expression « induction électromagnétique » désigne la production d'effets électriques à partir de champs magnétiques. Un champ électrique <u>induit</u> est associé à un champ magnétique variable.

Comme la divergence de \vec{B} est toujours nulle (même pour les champs variables), on peut utiliser le potentiel vecteur magnétique \vec{A} (cf. § 5.4) :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$
 (7.2)

En substituant (7.2) dans (7.1) on a

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{A})$$
$$\operatorname{rot} (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$$

on voit que $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est un vecteur dont le rotationnel s'annule, et il peut donc être exprimé comme le gradient d'une fonction scalaire

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } V$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
(7.3)

Dans le cas statique, $\frac{\partial \dot{A}}{\partial t} = 0$, et on retrouve l'expression $\vec{E} = -\text{grad } V$ de l'électrostatique.

La fonction V est donc bien le potentiel électrique et dans le cas statique, \vec{E} ne dépend que de V. Dans le cas général \vec{E} dépend à la fois de V et de \vec{A} , et résulte des densités de charges $(-\operatorname{grad} V)$ et des courants variables $(-\partial \vec{A}/\partial t)$.

En prenant l'intégrale de surface de (7.1) et en appliquant le théorème de Stokes, on obtient la forme intégrale de la loi de Faraday :

$$\oint_{c} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\int_{S} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$
(7.4)

où l'orientation relative du contour c et de la normale à la surface est déterminée par la règle de la main droite. La relation (7.4) est valable pour n'importe quel contour c, indépendamment de la présence ou non d'un circuit conducteur.

Considérons un champ magnétique uniforme $\vec{B}(t)$ présent dans la surface S (et nul en dehors). Le champ est dirigé suivant z, de même que la normale à la surface \vec{dS} .



Fig. 1 Champ électrique induit

Par symétrie, le champ électrique induit sera tangentiel (comme le champ magnétique d'un conducteur rectiligne) et l'application de (7.4) donne :

$$\oint_{c} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = E \ 2\pi \ r = -\pi \ r^{2} \ \frac{\partial B}{\partial t} \qquad \text{pour} \quad r < a$$

où a est le rayon du disque S. Et donc

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\mathbf{r}}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}} \vec{\mathbf{l}}_{\boldsymbol{\varphi}}$$
(7.5)

Si \vec{B} est croissant, \vec{E} sera dirigé dans le sens horlogique (vu d'en haut).

Plaçons maintenant une boucle conductrice perpendiculaire à la direction de B.



Fig. 2 Boucle dans un champ magnétique variable

Il apparaît alors dans la boucle une force électromotrice induite :

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot \vec{d\ell}$$
(7.6)

Si la boucle est ouverte, il apparaîtra une tension, égale à cette fem, entre les bornes 1 et 2 de la boucle. Si la boucle est fermée sur une résistance R, il y aura un courant :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i}$$
(7.7)

où R_i est la résistance interne de la boucle et le circuit équivalent est donc le suivant:



Fig. 3 Circuit équivalent

Une fem positive donnerait un courant dans le sens positif du contour c (ce signe est indiqué par le + et le - sur la figure). La fem induite s'exprime suivant (7.4) par :

$$\mathcal{E} = \oint_{c} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\frac{d\Phi}{dt}$$
(7.8)

où Φ est le flux du champ magnétique à travers la surface S formée par le circuit.

Si le champ B (et donc Φ) est croissant, la fem induite sera négative, le potentiel de la borne 2 sera supérieur à celui de la borne 1, et le courant I circulera dans le sens horlogique (vu d'en haut).

Le signe de la fem induite est donné par la <u>loi de Lenz</u> : la fem induite tend à s'opposer à toute variation de flux.

La fem produit donc un courant, lequel produit son propre champ magnétique B_{ind} qui s'oppose à la <u>variation</u> du flux.

7.2 Conducteurs en mouvement dans un champ magnétique

Considérons une tige conductrice animée d'une vitesse u et située dans un champ magnétique constant.



Fig. 4 Tige conductrice en mouvement dans un champ magnétique

Les charges libres du conducteur seront soumises à une force magnétique

$$\vec{F}_{m} = q \vec{u} \times \vec{B} \tag{7.9}$$

qui va produire une séparation des charges.

Cette séparation des charges va produire un champ électrique \vec{E}_{es} (de type électrostatique) tel que la force électrique compensera exactement la force magnétique :

$$\vec{E}_{es} = -\vec{u} \times \vec{B} \tag{7.10}$$

de sorte que la force totale sur les charges libres s'annule.

Il apparaît donc une tension, induite par le mouvement, entre les extrémités de la tige :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = -\int_2^1 \vec{\mathbf{E}}_{es} \cdot \vec{\mathbf{d}\ell} = \int_2^1 (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \vec{\mathbf{d}\ell} = -\mathbf{u} \mathbf{B} \mathbf{h}$$
(7.11)

où h est la longueur de la tige.

La tige est donc devenue l'équivalent d'une pile de fem $\mathcal{E} = -u B h$.

Si le conducteur mobile fait partie d'un circuit fermé, la force électromotrice du circuit sera

$$\mathcal{E} = \oint_{c} (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{d\ell}$$
(7.12)

Supposons maintenant que la tige glisse sur deux rails conducteurs et que le circuit soit fermé sur une résistance R. La force électromotrice dans le circuit sera :

$$\mathcal{E} = \oint_{c} (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{d\ell} = \int_{2'}^{1'} (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{d\ell} = -u B h$$
(7.13)

La valeur négative indique que la borne 2 sera positive par rapport à la borne 1.



Fig. 5 Tige conductrice glissant sur deux rails

Cette fem va produire un courant dans la boucle :

$$I = \frac{\left| \mathcal{E} \right|}{R} = \frac{u B h}{R}$$
(7.14)

dans le sens horlogique. On suppose pouvoir négliger le champ magnétique créé par ce courant. On suppose également que la résistance totale du circuit ne varie pas significativement avec le mouvement de la tige.

Si nous évaluons maintenant le flux coupé par le circuit de la fig. 5:

$$\Phi = B h x_0$$

où x_0 repère la position de la tige. On obtient donc la même valeur qu'en (7.13) pour la fem, en prenant la dérivée du flux :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B h \frac{dx_0}{dt} = -B h u$$
(7.15)

On peut montrer que ce résultat est général : pour n'importe quel circuit dont les éléments se déplacent dans un champ magnétique fixe, la fem est la dérivée du flux, indépendamment de la forme du circuit.

On voit donc que la « règle du flux »

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{7.16}$$

selon laquelle la fem dans un circuit est égale à l'opposé de la dérivée du flux à travers le circuit, s'applique aux variations de flux dues, soit à des variations du champ magnétique, soit à un déplacement du circuit (soit aux deux).

Il ne faut pas oublier qu'il y a cependant deux mécanismes différents : la loi de Faraday (rot $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) dans le cas du champ variable et la force de Lorentz ($\vec{u} \times \vec{B}$) dans le cas du

circuit mobile.

Dans le cas général d'un circuit en mouvement dans un champ variable avec le temps, l'expression de la fem sera, en combinant (7.4) et (7.12)

$$\mathcal{E} = -\int_{\mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{\mathbf{dS}} + \oint_{\mathbf{C}} (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \vec{\mathbf{d\ell}}$$
(7.17)

et on peut montrer que (7.17) est mathématiquement équivalente à la règle du flux

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B} \cdot \vec{dS}$$
(7.18)

Dans certains cas il se peut qu'on n'arrive pas à identifier un contour fermé (et donc un flux), il faut alors revenir aux lois fondamentales, à savoir la loi de Faraday et la force de Lorentz.

Reprenons maintenant l'exemple de la fig. 5.

Le courant I, donné par (7.14) circule dans le sens horlogique. Conformément à la loi de Lenz, on voit qu'il s'oppose à la variation du flux due au mouvement de la tige. La puissance électrique dissipée dans la résistance est

$$P_{elec} = R I^{2} = \frac{(B h u)^{2}}{R}$$
(7.19)

A cause du courant induit qui la traverse, la tige est soumise à une force magnétique

$$\vec{F}_{m} = \int_{2'}^{1'} I \vec{d\ell} \times \vec{B} = -I B h \vec{1}_{x}$$

dirigée dans le sens opposé à celui de \vec{u} . Pour maintenir le déplacement à la vitesse u, il faut exercer sur la tige une force mécanique extérieure

$$\vec{F}_{ext} = I B h \dot{1}_x$$

La puissance mécanique fournie est donc

$$P_{m\acute{e}ca} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{u} = \frac{(B h u)^2}{R} = P_{\acute{e}lec}$$
 (7.20)

On constate donc que l'énergie mécanique est convertie en énergie électrique puis en énergie thermique. Il s'agit d'un exemple simple de générateur électrique.

7.3 Applications

7.3.1 Générateur de courant alternatif



Fig. 6 Bobine en rotation dans un champ magnétique

Une bobine constituée de N spires tourne avec une vitesse angulaire constante ω dans un champ magnétique uniforme et constant. Les deux extrémités de la bobine sont reliées à une résistance de charge par des contacts à balais.

Le flux total coupé par la bobine est

$$\Phi = N B S \cos \omega t$$

et la fem induite sera
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = N B S \omega \sin \omega t$$
(7.21)

En circuit ouvert, il apparaîtra donc aux bornes de la bobine une différence de potentiel alternative

$$V = \mathcal{E} = N B S \omega \sin \omega t = V_0 \sin \omega t$$

Si on ferme le circuit, et que la résistance totale est R, on aura un courant

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t$$
(7.22)

Le schéma équivalent est donné à la fig. 7



Fig. 7 Schéma équivalent

La fem est la force par unité de charge intégrée sur la longueur du circuit. C'est donc aussi le travail fourni par le générateur (c'est à dire la bobine en rotation), pour faire circuler une

unité de charge dans le circuit. Comme le courant est égal au débit total de charges, la puissance totale fournie au circuit par le générateur est :

$$P_{\text{élec}} = \mathcal{E} I \tag{7.23}$$

Comme la bobine est parcourue par un courant, et situé dans un champ magnétique, elle est soumise à un couple (5.42) qui s'oppose à la rotation

$$\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B} = -N B S I \sin \omega t \hat{1}_z$$
(7.24)

La puissance mécanique qu'il faut fournir pour maintenir la bobine en rotation est

 $P_{méca} = \omega C = \omega N B S I \sin \omega t$

Cette puissance est égale à la puissance électrique

$$P_{méca} = P_{élec}$$

et est d'autant plus grande que le courant débité par le générateur est important.

7.3.2 Moteur linéaire et force contre-électromotrice

Un « moteur linéaire » simple est constitué d'une tige glissant sur deux rails reliés à une pile. L'ensemble est placé dans un champ magnétique constant.

	8	8	4	Ē [⊗]	8	8
- 3	⊥ ⊗	8	h	8	\otimes	\otimes
	8	8		I 🛞	8	⊗̈́B

Fig. 8	8	Moteur	linéaire
--------	---	--------	----------

Le dispositif est donc semblable à celui de la fig. 5 mais nous allons maintenant considérer le fonctionnement en moteur et non plus en générateur.

Au départ, lorsque la tige est immobile, elle sera parcourue par un courant

 $I = \mathcal{E}/R$

où \mathcal{E} est la fem de la pile et R la résistance totale du circuit. La tige subit alors une force magnétique $F_m = I h B$ qui l'accélère vers la droite. On se trouve alors dans une situation semblable à celle de la fig. 5 (conducteur en mouvement dans un champ) et il apparaît dans la tige une force contre-électromotrice fcem donnée par (7.13) $\mathcal{E}' = u B h$ qui vient s'opposer à la fem externe (loi de Lenz).

S'il n'y a pas de force mécanique, la tige accélèrera jusqu'à atteindre une vitesse limite telle que $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$. Les deux fem se compensent alors, le courant et la force magnétique deviennent nuls et la tige continue son mouvement à une vitesse constante.

Le même phénomène se produit dans le moteur dont on a vu le principe à la fig. 5.16. Le cadre est en effet soumis à un couple, mais ne va pas accélérer indéfiniment son mouvement de rotation ! Lorsque le cadre tourne dans le champ magnétique, il est le siège d'une fem induite, semblable à celle d'un générateur (7.21) et qui s'oppose à la fem extérieure. Cette force contre-électromotrice fcem est proportionnelle à la vitesse angulaire ω du moteur.

Lorsqu'on met le moteur en marche, le cadre est au repos et il n'y a donc pas de fcem. Le courant de démarrage peut être assez intense parce qu'il n'est limité que par la résistance de la bobine.

Au fur et à mesure que la vitesse augmente l'augmentation de fcem réduit le courant, qui dépend de la fem totale.

En l'absence de travail mécanique (et de frottements) la vitesse augmenterait jusqu'à ce que la fcem devienne égale (et opposée) à la fem extérieure.

Lorsque le moteur effectue un travail mécanique, la vitesse angulaire diminue, ce qui réduit la fcem, et provoque une augmentation du courant. La puissance fournie par la source extérieure est donc convertie en puissance mécanique par le moteur.

7.4 Energie magnétique

Nous ferons ici <u>l'approximation quasi-statique</u> pour l'étude des champs variables.

Cette approximation consiste à utiliser les formules de la statique pour calculer les champs, même lorsque les charges ou les courants sont variables.

En particulier on utilisera les formules de la magnétostatique pour calculer les champs magnétiques variables qui interviennent dans la loi de Faraday. Cela revient à considérer que le champ magnétique à un instant est produit par les valeurs des courants à ce même instant.

Cette approximation restera valable pour autant que les vitesses de fluctuations ne deviennent pas trop grandes et pour autant qu'on ne calcule pas les champs en des points très éloignés des sources.

Les expressions (2.38) (2.39) donnent l'énergie nécessaire pour assembler un système de charges et donc aussi l'énergie électrostatique contenue dans le système de charges.

Nous considérons ici l'énergie nécessaire pour établir une certaine configuration de densités de courants.

Nous considérons le travail réversible que l'on doit effectuer pour contrer le champ électrique induit (et donc la fem induite) lorsqu'on établit le courant. Cette énergie est réversible dans la mesure où on pourrait la récupérer en annulant le courant. Nous ne considérons donc pas l'énergie dissipée dans les résistances et définitivement perdue.

Soit un volume D contenant une densité de charge ρ immobile. Lorsque cette densité de charges est mise en mouvement à l'intérieur du volume D fixe, elle produit un potentiel vecteur \vec{A} qui induira une force par unité de volume :

$$\vec{f} = \rho \vec{E} = -\rho \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
 (7.25)

(on ne prend donc que le champ induit $-\partial \vec{A}/\partial t$ dans l'expression générale (7.3) du champ électrique)

Si \vec{v} est la vitesse des charges , la puissance par unité de volume qui doit être fournie au système pour contrer cette force de réaction vaut

$$p = -\vec{v} \cdot \vec{f} = \rho \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
(7.26)

En introduisant la densité de courant $\vec{J} = \rho \vec{v}$, la puissance totale est donnée par

$$P = \frac{d W_m}{dt} = \int_D \vec{J} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\tau$$
(7.27)

Dans le cas quasi-statique où le potentiel vecteur varie linéairement avec la densité de courant, cette relation peut encore s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d} \mathbf{W}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{1}{2} \int_{\mathrm{D}} \vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{A}} \, \mathrm{d\tau} \tag{7.28}$$

et l'énergie totale qui a du être fournie au système pour créer la densité de courant \vec{J} vaut :

$$W_{\rm m} = \frac{1}{2} \int_{\rm D} \vec{J} \cdot \vec{A} \, \mathrm{d}\tau \tag{7.29}$$

et est généralement appelée énergie magnétique du système.

Comme \vec{A} et \vec{J} peuvent tous deux être reliés à \vec{B} , après quelques calculs (voir note), on peut exprimer l'énergie magnétique, dans le vide, des courants constants en fonction seulement du champ magnétique, par :

$$W_{\rm m} = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau$$
 (7.30a)

où l'intégrale est étendue à tout l'espace. Dans un milieu magnétique linéaire et homogène, l'expression devient

$$W_{\rm m} = \frac{1}{2\mu} \int B^2 \, \mathrm{d}\tau \tag{7.30b}$$

On remarquera la similitude entre les expressions (7.29) (7.30) pour l'énergie magnétostatique et les expressions (2.39) (2.44) pour l'énergie électrostatique :

$$W_{e} = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau = \frac{\varepsilon_{0}}{2} \int E^{2} d\tau$$
(7.31)

$$W_{\rm m} = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{J} \, d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \, d\tau$$
(7.32)

Note : démonstration de (7.30) pour un système de courants constants.

$$W_{\rm m} = \frac{1}{2} \int_{\rm D} \vec{A} \cdot \vec{J} \, d\tau$$

où l'intégrale porte sur les volumes parcourus par des courants (libres). Considérons le cas d'un milieu magnétique linéaire

rot
$$\vec{B} = \mu$$
 rot $\vec{H} = \mu \vec{J}$

où \vec{J} désigne donc les courants libres.

$$W_{\rm m} = \frac{1}{2\mu} \int_{\rm D} \vec{\rm A} \cdot \operatorname{rot} \vec{\rm B} \, \mathrm{d}\tau$$

On utilise l'identité

div
$$(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}$$
. rot $\vec{A} - \vec{A}$. rot \vec{B}

ce qui donne, avec $\vec{B} = rot \vec{A}$

$$\vec{A}$$
. rot $\vec{B} = \vec{B}$. $\vec{B} - \text{div} (\vec{A} \times \vec{B})$

Et donc

$$W_{\rm m} = \frac{1}{2\mu} \left[\int_{\rm D} B^2 d\tau - \int_{\rm D} \operatorname{div} \left(\vec{A} \times \vec{B} \right) d\tau \right]$$

En appliquant Ostrogradsky

$$W_{\rm m} = \frac{1}{2\mu} \left[\int_{\rm D} B^2 d\tau - \oint_{\rm S} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{dS} \right]$$

où S est la surface entourant le volume D.

En intégrant sur tout l'espace, la contribution de l'intégrale de surface sera nulle car les champs deviennent nuls à l'infini, et donc

$$W_{\rm m} = \frac{1}{2\mu} \int_{\rm espace} B^2 \, \mathrm{d}\tau$$

Dans le vide on remplacera μ par μ_0 .

7.5 Coefficients de couplage

Considérons maintenant un ensemble de volumes D_i parcourus par des courants constants I_i , de densité \vec{J}_i . L'énergie magnétique totale, suivant (7.29) est :

$$W_{\rm m} = \frac{1}{2} \sum_{i} \int_{D_i} \vec{J}_i \cdot \vec{A} \, \mathrm{d}\tau_i \tag{7.33}$$

Le potentiel vecteur peut être écrit sous la forme

$$\vec{A} = \sum_{j} \vec{A}_{j}$$
(7.34)

où \vec{A}_j est le potentiel produit par les sources du volume j. Après normalisation par les courants I_i , l'énergie peut encore s'écrire

$$W_{m} = \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j} I_{i} I_{j} \int_{D_{i}} \frac{\tilde{J}_{i} \cdot \tilde{A}_{j}}{I_{i} I_{j}} d\tau_{i}$$
(7.35)

et nous définirons les coefficients de couplage inductifs L_{ij} par les relations

$$L_{ij} = \frac{1}{I_i I_j} \int_{D_i} \vec{J}_i \cdot \vec{A}_j d\tau_i$$
(7.36)

de sorte que l'énergie s'écrit

$$W_{m} = \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j} L_{i j} I_{i} I_{j}$$
(7.37)

En utilisant (5.17) pour le potentiel vecteur :

$$\vec{A}_{j} = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \int_{D_{j}} \frac{\vec{J}_{j}}{R} d\tau_{j}$$
(7.38)

les coefficients de couplage peuvent se mettre sous la forme symétrique

$$L_{i j} = \frac{\mu_0}{4\pi I_i I_j} \int_{D_i} \int_{D_j} \frac{\vec{J}_i \cdot \vec{J}_j}{R} d\tau_i \cdot d\tau_j$$
(7.39)

La relation (7.39) est appelée formule de Neumann.

Les coefficients $L_{i j}$ traduisent les interactions mutuelles entre les différents volumes D_i parcourus par des densités de courants. Ils s'expriment en Henry (V.s/A). Ils ne dépendent que de l'agencement spatial des différents éléments et pas de l'intensité des courants (l'intégrale dans (7.39) donnera un résultat proportionnel au produit $I_i I_j$).

 L_{ij} (i \neq j) est l'inductance mutuelle entre D_i et D_j , tandis que L_{ii} est l'inductance propre (ou auto-inductance ou self-inductance) de D_i . On voit que $L_{ij} = L_{ji}$ d'après (7.39).

L'énergie W_m doit être positive quelles que soient les valeurs des courants, et donc (7.37) est une forme quadratique définie positive. La matrice $[L_{i j}]$ est donc symétrique et définie positive, et en particulier ses éléments diagonaux sont positifs :

$$L_{11} > 0$$
 (7.40)

Nous n'avons fait jusqu'à présent aucune hypothèse concernant les volumes D_i parcourus par les densités de courants. Si les domaines D_i représentent des portions de circuits filiformes c_i , les expressions (7.36) et (7.39) deviennent, avec $\vec{J} d\tau = I \vec{d\ell}$:

$$L_{ij} = \frac{1}{I_j} \int_{c_i} \vec{A}_j \cdot \vec{d\ell}_i$$
(7.41)

$$L_{i j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{c_i} \int_{c_j} \frac{d\ell_i \cdot d\ell_j}{R}$$
(7.42)

et l'énergie magnétique est toujours donnée par (7.37). Notons que ces expressions divergent pour i = j.

Si les domaines D_i sont maintenant des circuits filiformes et fermés, on écrira

$$L_{ij} = \frac{1}{I_j} \oint_{c_i} \vec{A}_j \cdot \vec{d\ell}_i$$
(7.43)

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c_i} \oint_{c_j} \frac{\vec{d\ell}_i \cdot \vec{d\ell}_j}{R}$$
(7.44)

et on pourra introduire la notion de flux coupé par un circuit fermé et de force électromotrice induite.



Fig. 9 Illustration du calcul de L_{21} par (7.44)

Le flux Φ_i coupé par le circuit i est, suivant (5.19) :

$$\Phi_{i} = \oint_{c_{i}} \vec{A} \cdot \vec{d\ell}_{i}$$
(7.45)

en remplaçant \vec{A} par (7.34) et en utilisant (7.43)

$$\Phi_{i} = \sum_{j} \oint_{c_{i}} \vec{A}_{j} \cdot \vec{d\ell}_{i} = \sum_{j} L_{i j} I_{j}$$
(7.46)

Le flux coupé par chaque circuit est une fonction linéaire des courants.

La force électromotrice induite dans le circuit i lorsque les courants varient est, comme on l'a vu au §7.1 :

$$\mathcal{E}_{i} = \oint_{c_{i}} \vec{E} \cdot \vec{d\ell}_{i} = -\oint_{c_{i}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{d\ell}_{i}$$
$$= -\frac{d}{dt} \oint_{c_{i}} \vec{A} \cdot \vec{d\ell}_{i} = -\frac{d \Phi_{i}}{dt}$$
(7.47)

On peut donc écrire

$$\mathcal{E}_{i} = -\frac{d \Phi_{i}}{dt} = -\sum_{j} L_{i j} \frac{d I_{j}}{dt}$$
(7.48)

A partir de (7.37) (7.46) on peut également exprimer l'énergie magnétique par

$$W_{\rm m} = \frac{1}{2} \sum_{\rm i} \Phi_{\rm i} I_{\rm i} \tag{7.49}$$

Illustrons ceci dans le cas de deux circuits filiformes fermés. Un courant I_1 dans le circuit 1 produira un champ \vec{B}_1 . Le circuit 2 coupera un flux $\Phi_2 = L_{21} I_1$ et le circuit 1 coupera également un flux $\Phi_1 = L_{11} I_1$ dû à son propre courant.



Fig. 10 Champ magnétique et flux produit par I₁

Si un courant I₂ parcourt également le circuit 2, le flux total coupé par chaque circuit sera

$$\Phi_1 = L_{11} I_1 + L_{12} I_2$$

$$\Phi_2 = L_{21} I_1 + L_{22} I_2$$
(7.50)

On utilise généralement les notations

$$L_{12} = L_{21} = M \qquad \mbox{inductance mutuelle} \\ L_{11} = L_1 \ , \ L_{22} = L_2 \qquad \mbox{inductances propres}$$

Si les courants varient, les fem induites dans chaque circuit seront

$$\mathcal{E}_{1} = -L_{1} \frac{d I_{1}}{dt} - M \frac{d I_{2}}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{2} = -M \frac{d I_{1}}{dt} - L_{2} \frac{d I_{2}}{dt}$$
(7.51)

L'énergie du système est donnée par

$$W_{m} = \frac{1}{2}L_{1}I_{1}^{2} + MI_{1}I_{2} + \frac{1}{2}L_{2}I_{2}^{2}$$
(7.52)

La matrice

$$\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$$

étant définie positive, on a

$$L_1 > 0$$
 , $L_2 > 0$, $L_1 L_2 > M^2$ (7.53)

On définit le coefficient de couplage par

$$k = |M| / \sqrt{L_1 L_2}$$
, $k < 1$ (7.54)

Si presque tout le flux produit par l'un des circuits traverse l'autre circuit, le coefficient de couplage est proche de l'unité. Si les circuits sont très éloignés le coefficient de couplage est très petit, de même que l'inductance mutuelle.

Dans le cas d'un circuit (filiforme et fermé) isolé, on aura :

 $\Phi = L I \tag{7.55}$

où Φ est le flux coupé par le circuit et dû à son propre courant. La fem induite est

$$\mathcal{E} = -L \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{I}}{\mathrm{d}\mathrm{t}} \tag{7.56}$$

et l'énergie

$$W_{\rm m} = \frac{1}{2} L I^2 \tag{7.57}$$

Dans le cas où le flux ne peut pas être clairement défini pour utiliser (7.55), on déterminera l'inductance L à partir de (7.57) :

$$L = \frac{2W_m}{I^2}$$
(7.58)

en calculant W_m par (7.29) ou (7.30).

7.6 Exemples

7.6.1 Long solénoïde

Considérons un solénoïde suffisamment long pour pouvoir négliger les effets de bords et comportant $\frac{N_1}{\ell_1} = n_1$ spires par unité de longueur.



Fig. 11 Solénoïde avec deux enroulements

Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde et est donné par (5.9a)

$$\vec{B} = \mu_0 \ n_1 \ I_1 \ I_2 \tag{7.59}$$

si l'axe du solénoïde est aligné suivant z. Le flux coupé par chaque spire est

$$\Phi_1' = \mu_0 n_1 I_1 S$$

où S est la section transversale (S = πa^2). Le flux total coupé, par les N₁ spires, est

$$\Phi_1 = N_1 \Phi' = \mu_0 N_1^2 I_1 S/\ell_1$$

et donc l'inductance est

$$L_1 = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 N_1^2 S/\ell_1 \quad (H)$$
(7.60)

Cette expression n'est qu'approximative car nous avons négligé tout flux de dispersion. L'inductance réelle sera en fait inférieure.

On peut également calculer l'énergie magnétique à partir de (7.30)

$$W_{\rm m} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$
. volume $= \frac{1}{2} \mu_0 n_1^2 I_1^2 S. \ell_1$

et on retrouve bien L_1 en appliquant (7.58).

On place un $2^{\text{ème}}$ enroulement sur le même solénoïde, avec $N_2/\ell_2 = n_2$ spires par unité de longueur. Le courant I_1 , provoquera un flux Φ_2 dans ce $2^{\text{ème}}$ enroulement :

$$\Phi_2 = N_2 B S = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} I_1 S$$

et l'inductance mutuelle est donc

$$\mathbf{M} = \frac{\Phi_2}{\mathbf{I}_1} = \mu_0 \, \frac{\mathbf{N}_1 \, \mathbf{N}_2}{\ell_1} \, \mathbf{S} \tag{7.61}$$

Si on place dans le solénoïde un matériau magnétique linéaire de perméabilité μ grande ($\mu >> \mu_0$), le champ magnétique sera renforcé par la magnétisation du matériau, et sera donné par (6.29) :

$$\vec{B} = \mu n_1 I_1 \vec{1}_z$$

et l'inductance

$$L_1 = \mu N_1^2 S/\ell_1$$
 (7.62)

sera augmentée d'un facteur $\mu_r = \mu/\mu_0$. C'est le principe des inductances à noyau. Si le matériau magnétique n'est pas linéaire, le champ magnétique et le flux ne seront plus des fonctions linéaires du courant et la valeur de l'inductance dépendra du courant. Ce sera une inductance non linéaire.

```
Valeurs numériques :

N_1 = 1000 N_2 = 100 \ell_1 = 10 cm \ell_2 = 5 cm a = 1 cm \mu = \mu_0

L_1 = 3.95 mH M = 0.395 mH
```

7.6.2 Tore

On considère un tore, en matériau magnétique, à section rectangulaire sur lequel est enroulé un bobinage de N spires.



Fig. 12 Tore à section rectangulaire

Le champ H, à l'intérieur du tore, a été calculé en (6.35) :

$$\vec{H} = \frac{N I}{2\pi r} \vec{I} \phi$$

Contrairement à ce que nous avons fait au §6.6.2., nous considérons ici que le matériau magnétique est linéaire avec une perméabilité μ . Le champ magnétique sera donc, dans le tore

 $\vec{B} = \mu \vec{H} = \frac{\mu N I}{2\pi r} \dot{i}_{\phi}$ (7.63)

Le flux dans le tore est

$$\Phi = \int_{S} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \int_{S} \frac{\mu N I}{2\pi r} h dr$$
$$= \frac{\mu N I h}{2\pi} \int_{a}^{b} \frac{d r}{r} = \frac{\mu N I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Ce flux est coupé N fois par l'enroulement et l'inductance de la bobine torique est

$$\mathbf{L} = \frac{\mu \,\mathbf{N}^2 \,\mathbf{h}}{2\pi} \ln \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} \tag{7.64}$$

et elle est proportionnelle à μ et à $N^2.$

On peut faire le lien avec la réluctance du circuit magnétique définie en (6.48) :

$$\Re = \frac{NI}{\Phi}$$
$$L = \frac{N\Phi}{I}$$

où \mathfrak{R} est la réluctance du tore. Et donc

$$L = \frac{N^2}{\Re}$$
(7.65)

7.7 Forces magnétiques

Comme en électrostatique, la méthode des travaux virtuels est souvent un moyen adéquat pour trouver des forces ou des couples.

Considérons un circuit fermé, avec une inductance L et parcouru par un courant I. Suite à un déplacement virtuel Δx , le bilan sera :

travail de la source + travail mécanique = variation d'énergie potentielle accompli par l'extérieur

$$\Delta W_{\rm S} + F \cdot \Delta x = \Delta W_{\rm m} \tag{7.66}$$

L'énergie potentielle est $W_m = \frac{1}{2} L I^2$.

Le déplacement produira une variation de flux et une fem induite. Le travail fourni par la source pour contrer cette fem pendant le temps Δt du déplacement est

$$\Delta W_{\rm S} = -\mathcal{E} \, \mathrm{I} \, \Delta t = \mathrm{I} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \,. \, \Delta t = \mathrm{I} \, \Delta \Phi \tag{7.67}$$

7.7.1 Barreau magnétique dans un solénoïde

On considère un solénoïde avec un barreau de perméabilité µ, partiellement introduit.



Fig. 13 Solénoïde avec un barreau mobile

On provoque un déplacement Δx du noyau, et donc une variation de l'inductance, en maintenant le courant constant. Dans ce cas

$$\Delta W_{\rm m} = \Delta \left(\frac{1}{2} L I^2\right) = \Delta \left(\frac{1}{2} I \Phi\right) = \frac{1}{2} I \Delta \Phi$$
$$= \frac{1}{2} \Delta W_{\rm S}$$
(7.68)

et donc

$$F_{\rm x} \cdot \Delta x = -\Delta W_{\rm m} \tag{7.69}$$

Comme le courant est maintenu constant :

$$\Delta W_{\rm m} = \frac{1}{2} I^2 \Delta L \tag{7.70}$$

et à la limite d'un déplacement infiniment petit :

$$F_{\rm x} = -\frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx} \tag{7.71}$$

Si le barreau est ferromagnétique et qu'il est retiré de dx de la bobine, l'inductance L va diminuer et la force mécanique nécessaire est donc positive. Le barreau ferromagnétique est donc attiré vers l'intérieur du solénoïde par les forces magnétiques.

7.7.2 Force portante d'un aimant

On donne un accroissement virtuel Δy à la longueur de l'entrefer d'un électro-aimant.

On suppose que ce déplacement ne produit pas de variation de flux, donc pas de fem induite et pas de travail de la source (la source s'ajuste donc pour maintenir le flux constant). Le bilan est alors

$$F_y \Delta y = \Delta W_m$$



Fig. 14 Électro-aimant

Seule la longueur de l'entrefer a changé et le déplacement Δy ne modifie donc que l'énergie dans les deux entrefers. En appliquant (7.30), S étant la section transversale

$$\Delta W_m = 2 \, \frac{B^2}{2 \, \mu_0} \, S \, \Delta y$$

Il faut exercer une force positive pour séparer les armatures et il y a donc une force d'attraction entre les armatures

$$F_{y} = \frac{B^{2} S}{\mu_{0}} = \frac{\Phi^{2}}{\mu_{0} S}$$
(7.73)

et la pression portante sur les armatures est

$$p = F/2 S = \frac{B^2}{2 \mu_0}$$
 (N/m²) (7.74)

La pression portante étant proportionnelle au carré de B, un électro-aimant peut parfaitement fonctionner en courant alternatif, mais dans ce cas la source doit également fournir l'énergie perdue par hystérésis.

L'expression de la pression portante ne dépend que de la valeur prise par le champ magnétique B dans le circuit et restera valable pour un aimant permanent.

7.8 Le courant de déplacement

Il reste à examiner la forme complète de la dernière équation de Maxwell (1.9), qui est aussi appelée la loi d'Ampère :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
(7.75)

Le rotationnel de \vec{B} est donc déterminé, non seulement par les densités de courant, mais aussi par la variation temporelle du champ électrique.

Ce deuxième terme est bien indispensable, pour qu'en prenant la divergence de (7.75), on obtienne bien l'équation de conservation de la charge :

div
$$\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$
 (7.76)

En appliquant le théorème de Stokes, la forme intégrale de la loi d'Ampère s'écrit donc

$$\oint_{c} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \int_{S} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$
(7.77)

Pour des raisons historiques, on appelle

$$I_{\rm D} = \varepsilon_0 \int_{\rm S} \frac{\partial \vec{\rm E}}{\partial t} . \, \vec{\rm dS} \tag{A}$$

le courant de déplacement à travers la surface S, et on écrit

$$\oint_{c} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \mu_0 (I + I_D)$$
(7.79)

Il ne s'agit en fait <u>pas</u> d'un courant mais d'une quantité qu'il faut ajouter au courant dans la loi d'Ampère.

On peut illustrer la forme générale de la loi d'Ampère en considérant le processus de charge d'un condensateur.



Fig. 15 Charge d'un condensateur

Soit un condensateur plan que l'on charge par un courant de conduction I_c . Ce courant I_c produit un champ magnétique, et l'application de (7.77) donne

$$\oint_{c} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \int_{S} (\mu_{0} \vec{J}_{c} + \varepsilon_{0} \mu_{0} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot \vec{dS}$$
(7.80)

où S est n'importe quelle surface s'appuyant sur le contour fermé c. Prenons successivement la surface S_1 et la surface S_2 .

Sur la surface S_1 , il n'y a pas de champ électrique (on suppose que le courant I_c circule dans un conducteur parfait) et donc

$$\oint_{c} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \int_{S_{1}} \mu_{0} \vec{J}_{c} \cdot \vec{dS}_{1} = \mu_{0} I_{c}$$
(7.81)

Sur la surface S_2 (qui passe au milieu du condensateur), il n'y a pas de courant de conduction, mais il y a un champ électrique :

$$E(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 A}$$
(7.82)

où Q est la charge du condensateur et A sa surface. A l'intérieur du condensateur on a donc

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 A} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0 A} I_c$$
(7.83)

et l'intégrale sur la surface S₂

$$\int_{\mathbf{S}_{2}} \varepsilon_{0} \mu_{0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \vec{dS}_{2} = \mathbf{A} \varepsilon_{0} \mu_{0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$
(7.84)

donnera bien le même résultat, car la circulation du champ magnétique dans (7.80) doit rester la même quelle que soit la surface choisie.

Notons que dans un conducteur le courant de déplacement est généralement très faible, et donc négligeable, devant le courant de conduction. Considérons un champ électrique alternatif

 $E = E_0 \cos \omega t$

Dans un conducteur métallique, de conductivité σ et de permittivité $\epsilon = \epsilon_0$, la densité de courant de conduction sera

$$J_c = \sigma E$$

tandis que la densité de courant de déplacement sera

$$J_{d} = \varepsilon_{0} \frac{\partial E}{\partial t} = -\omega \varepsilon_{0} E_{0} \sin \omega t$$

On a donc :
$$\frac{\left| \mathbf{J}_{c} \right|_{\max}}{\left| \mathbf{J}_{d} \right|_{\max}} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_{0}}$$
(7.85)

Pour un conducteur métallique, prenons $\sigma = 10^7 \ \Omega^{-1} \ m^{-1}$:

$$\frac{\left| \mathbf{J}_{c} \right|_{\max}}{\left| \mathbf{J}_{d} \right|_{\max}} \cong \frac{10^{17}}{f}$$

où $f = \omega/2\pi$ est la fréquence en Hertz. Le courant de déplacement est donc complètement négligeable devant le courant de conduction, jusqu'à des fréquences très élevées.

Par contre dans un isolant, la conductivité sera très faible, et ce sera le courant de conduction qui sera faible devant le courant de déplacement.

Enfin dans le vide, il n'y a plus aucun courant de conduction et le courant de déplacement est le seul terme qui subsiste dans (7.75), et qui est indispensable pour expliquer la propagation des ondes électromagnétiques.

7.9 Les équations de Maxwell dans la matière

Reprenons la forme complète des équations de Maxwell :

div
$$\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
 (7.86)

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{7.87}$$

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7.88}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$
(7.89)

qui expriment le lien entre les sources (charges et courants) et les champs.

Ces équations sont complètes, à condition que ρ et \vec{J} tiennent compte de <u>toutes</u> les charges et de <u>tous</u> les courants.

Dans certains cas, lorsque l'on travaille avec des matériaux diélectriques ou magnétiques, on préfère une autre présentation des équations de Maxwell, en faisant apparaître explicitement les seuls charges et courants <u>libres</u>, par opposition aux charges et courants qui sont liés à la matière.

Dans un diélectrique, la polarisation \vec{P} produit une densité de charges (3.3)

$$\rho_{\text{pol}} = -\text{div P} \tag{7.90}$$

Lorsque \vec{P} varie avec le temps, les charges de polarisation varient également et produisent un <u>courant de polarisation</u> \vec{J}_{pol} . En utilisant une équation de continuité semblable à (1.11)

div
$$\vec{J}_{pol} = -\frac{\partial \rho_{pol}}{\partial t}$$
 (7.91)

on a

div $\vec{J}_{pol} = \frac{\partial}{\partial t} (div \vec{P})$

et donc

$$\vec{J}_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$
(7.92)

Toute variation temporelle de la polarisation est donc équivalente à un courant.

→

De même, dans un milieu magnétique, la magnétisation \overrightarrow{M} produit une densité de courant

$$\vec{J}_{mag} = rot \vec{M}$$
 (7.93)

La charge totale est donc

$$\rho = \rho_{\ell} + \rho_{\text{pol}} = \rho_{\ell} - \text{div P}$$
(7.94)

et le courant total

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{J}}_{\ell} + \vec{\mathbf{J}}_{\text{pol}} + \vec{\mathbf{J}}_{\text{mag}}$$

$$= \vec{\mathbf{J}}_{\ell} + \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{\mathbf{M}}$$
(7.95)

L'équation (7.86) devient

div
$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_\ell - \text{div} \vec{P})$$

et en introduisant le champ de déplacement (3.8)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$
$$div \vec{D} = \rho_\ell$$

L'équation (7.89) devient

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \ (\vec{J}_{\ell} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M}) + \varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

et en introduisant l'excitation magnétique \vec{H} (6.20) :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}}_{\ell} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$$

Les équations de Maxwell peuvent alors s'écrire, en fonction des charges et courants libres :

$$div \vec{D} = \rho_{\ell}$$

$$div \vec{B} = 0$$

$$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$rot \vec{H} = \vec{J}_{\ell} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
(7.96)

Il faut alors ajouter des relations constitutives liant \vec{E} à \vec{D} et \vec{B} à \vec{H} . Dans le cas particulier des milieux linéaires :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

7.10 Conditions aux limites des champs électromagnétiques

Les champs \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{H} présenteront une discontinuité à la surface de séparation entre deux milieux de propriétés différentes. Dans le cas général, la surface peut contenir une charge superficielle (libre) σ_{ℓ} et un courant superficiel (libre) \vec{K}_{ℓ} .

Les équations de Maxwell (7.96) s'écrivent, sous forme intégrale :

$$\oint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = \mathbf{Q}_{\ell} \tag{7.97}$$

$$\oint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = 0 \tag{7.98}$$

$$\oint_{c} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \vec{B} \cdot \vec{dS}$$
(7.99)

$$\oint_{c} \vec{H} \cdot \vec{dl} = I_{\ell} + \frac{d}{dt} \int_{S} \vec{D} \cdot \vec{dS}$$
(7.100)

En appliquant (7.97) (7.98) à un volume situé de part et d'autre de la surface, on obtiendra, comme en (3.18) (5.48) :

$$\mathbf{D}_{1n} - \mathbf{D}_{2n} = \sigma_{\ell} \tag{7.101}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$
 (7.102)

On applique ensuite (7.99) (7.100) à un contour élémentaire situé de part et d'autre de la surface (fig. 5.18). Lorsque la hauteur du contour tend vers zéro, le flux de \vec{B} (ou de \vec{D}) devient nul, et on obtient :

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{l} = 0$$

 $E_{1t} = E_{2t}$ (7.103)

et d'autre part

$$(\vec{H}_{1} - \vec{H}_{2}) \cdot \vec{l} = I_{\text{dans le cadre}} = l \vec{K}_{\ell} \cdot (\vec{l}_{n} \times \vec{l}_{l}) = l (\vec{K}_{\ell} \times \vec{l}_{n}) \cdot \vec{l}_{l}$$

$$\vec{H}_{1} - \vec{H}_{2} = \vec{K}_{\ell} \times \vec{l}_{n}$$

$$\vec{l}_{n} \times (\vec{H}_{1} - \vec{H}_{2}) = \vec{K}_{\ell}$$
(7.104)

Les conditions (7.101) (7.102) (7.103) (7.104) que l'on obtient sont donc les mêmes que pour les champs statiques.

Dans le cas où les milieux sont <u>linéaires</u>, on peut exprimer les conditions en fonction des seuls champs \vec{E} et \vec{B} :

$$\epsilon_{1} E_{1n} - \epsilon_{2} E_{2n} = \sigma_{\ell}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\vec{l}_{n} \times (\frac{\vec{B}_{1}}{\mu_{1}} - \frac{\vec{B}_{2}}{\mu_{2}}) = \vec{K}_{\ell}$$
(7.105)

Et lorsqu'il n'y a pas de charge ni de courant libre de surface :

$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$	
$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}$	
$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}$	(7.106)
$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{B_{2t}}{B_{2t}}$	
μ_1 μ_2	

7.11 Les potentiel retardés

Nous cherchons à exprimer la solution générale des équations de Maxwell en présence de charges et de courants, c'est-à-dire à exprimer les champs \vec{E} et \vec{B} connaissant les charges $\rho(x, y, z, t)$ et les courants $\vec{J}(x, y, z, t)$.

En statique, la réponse est donnée par la loi de Coulomb et la loi de Biot-Savart.

Nous avons vu que les champs électrique et magnétique s'expriment en fonction des potentiels par

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \tag{7.107}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
 (7.108)

Les champs obtenus par ces relations respecteront automatiquement les deux équations de Maxwell : \rightarrow

div
$$\vec{B} = 0$$
 et rot $\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

Les deux autres équations de Maxwell donneront les relations entre les potentiels et les sources (charges et courants).

En substituant (7.108) dans

div
$$\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

on a

div
$$(-\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

 $\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
(7.109)

En substituant (7.107) et (7.108) dans

rot
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

on a

rot (rot
$$\vec{A}$$
) = $\mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$

On utilise l'identité

rot (rot
$$\vec{A}$$
) = grad (div \vec{A}) – $\Delta \vec{A}$

et donc

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \ \vec{J} + \text{grad} \ (\text{div} \ \vec{A} + \varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial V}{\partial t})$$
(7.110)

Rappelons que le potentiel vecteur n'est pas entièrement défini par (7.107) et qu'on peut donc imposer une condition supplémentaire, sans changer les champs \vec{E} et \vec{B} qui résulteront de ces potentiels. En statique, on avait choisi la condition

div $\vec{A} = 0$

Ici on choisira la condition

div
$$\vec{A} = -\varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial V}{\partial t}$$
 (7.111)

afin de simplifier et découpler les équations (7.109) et (7.110). La relation (7.111) entre les potentiels s'appelle la jauge de Lorentz. On obtient alors

$$\Delta V - \varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial^2 \ V}{\partial \ t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{7.112}$$

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial^2 \ \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \ \vec{J}$$
(7.113)

qui sont des équations d'onde non homogènes. La jauge de Lorentz permet de découpler les équations pour \vec{A} et V.

En statique, les relations correspondantes étaient (2.16) (5.13) et leurs solutions (2.15) (5.17).

La solution physique de (7.112) et (7.113) est donnée par les potentiels retardés :

$$V(t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{\rho(t - R/c)}{R} d\tau$$
(7.114)

$$\vec{A}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(t - R/c)}{R} d\tau$$
 (7.115)

où c = $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ est la vitesse de propagation (vitesse de la lumière dans le vide).

Pour obtenir le potentiel à un instant t, il faut donc utiliser les valeurs des sources ρ et \vec{J} à des <u>instants antérieurs</u> (t – R/c) fonctions du temps de propagation.

En comparant avec les solutions statiques (2.15) (5.17), on voit que le seul effet du terme supplémentaire $\partial^2/\partial t^2$ dans (7.112) et (7.113) est d'introduire ce retard (t - R/c) dans l'expression des potentiels.

Les champs \vec{E} et \vec{B} peuvent ensuite être obtenus à partir des potentiels en utilisant les équations (7.107) et (7.108).

L'ensemble des 4 équations (7.107) (7.108) (7.114) (7.115) constitue donc la solution générale des équations de Maxwell.

7.12 Ondes électromagnétiques

Dans le vide, donc dans une région sans charge ni courant, on a

 $\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = 0 \tag{7.116a}$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{7.116b}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}} \tag{7.116c}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
(7.116d)

Calculons :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \operatorname{rot} \left(\varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$
$$= \varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{E}) = -\varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Comme div $\vec{E} = 0$ et div $\vec{B} = 0$, on a

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$
(7.117)
(7.118)

Chaque composante cartésienne de \vec{E} et \vec{B} satisfait donc à l'équation d'onde à trois dimensions, du type :

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$
(7.119)

et se propage, dans le vide, à la vitesse de la lumière

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \ \mu_0}} = 3.10^8 \ m/s$$

Pour illustrer ceci, considérons l'équation d'onde à une dimension

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$
(7.120)

On peut vérifier par substitution que cette équation admet comme solution toutes les fonctions de la forme

$$f(z,t) = g(z - v t)$$
 (7.121)

c'est à dire les fonctions qui dépendent de z et t par la combinaison spéciale z - v t.

La fonction (7.121) représente une forme fixe qui se déplace dans la direction z avec la vitesse v.



Fig. 16 Onde qui se propage à la vitesse v

(La solution générale de (7.120) est en fait donnée par f (z,t) = g (z - v t) + h (z + v t) et on s'intéresse seulement à l'onde qui se propage vers les z positifs)

7.12.1 Ondes planes dans le vide

Supposons que les grandeurs des champs ne dépendent que de z et qu'il n'y a aucune variation des champs avec x et y. Ce sont donc des ondes planes se déplaçant dans la direction z, et les champs sont uniformes dans tout plan perpendiculaire à la direction de propagation.



Fig. 17 Onde plane

Examinons les équations dans ce cas particulier.

div
$$\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

et donc, comme il n'y a pas de variation avec x et y :

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{0}$$

La composante en z de (7.116d) donne, pour la même raison

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{y}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{B}_{x}}{\partial \mathbf{y}} = \varepsilon_{0} \ \mu_{0} \ \frac{\partial \mathbf{E}_{z}}{\partial \mathbf{t}} = 0$$

La composante E_z du champ électrique est donc constante dans l'espace et dans le temps. Nous nous intéressons seulement aux champs dynamiques et nous pouvons donc considérer que $E_z = 0$. Le champ électrique est donc normal à la direction de propagation.

A partir des équations (7.116), en faisant le même raisonnement pour le champ magnétique, on déduira que $B_z = 0$ et le champ magnétique est également normal à la direction de propagation.

Le champ électrique, normal à la direction de propagation, peut avoir une composante E_x et une composante E_y . Pour simplifier le problème, traitons le cas où le champ électrique a seulement une composante E_x , et donc $E_y = 0$:

$$\vec{E} = E_x (z,t) \hat{I}_x$$
(7.122)

Les équations (7.116c) et (7.116d) donnent alors

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{\mathbf{x}}}{\partial z} \mathbf{i}_{\mathbf{y}} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\mathbf{x}}}{\partial t} \mathbf{i}_{\mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{B}_{\mathbf{y}}}{\partial t} \mathbf{i}_{\mathbf{y}}$$
$$-\frac{\partial \mathbf{B}_{\mathbf{y}}}{\partial z} \mathbf{i}_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\mathbf{x}}}{\partial z} \mathbf{i}_{\mathbf{y}} = \varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial \mathbf{E}_{\mathbf{x}}}{\partial t} \mathbf{i}_{\mathbf{x}}$$

on en déduit que

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{t}} = 0$$
 et $\frac{\partial \mathbf{B}_{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{z}} = 0$

et donc $B_x = 0$ et le champ magnétique aura seulement une composante y

$$\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_{\mathbf{y}} \ (\mathbf{z}, \mathbf{t}) \ \hat{\mathbf{1}}_{\mathbf{y}} \tag{7.123}$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} sont donc normaux entre eux, et normaux à la direction de propagation.



Fig. 18 Les champs d'une onde plane

Les composantes E_x et B_y sont liés par :

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{z}} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{t}}$$
(7.124a)

$$\frac{\partial B_{y}}{\partial z} = -\varepsilon_{0} \ \mu_{0} \ \frac{\partial E_{x}}{\partial t}$$
(7.124b)

D'autre part, E_x et B_y sont solutions de l'équation d'onde (7.119) :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{\mathbf{x}}}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{\mathbf{x}}}{\partial t^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}_{\mathbf{y}}}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{\mathbf{y}}}{\partial t^2} = 0$$

et sont donc de la forme (7.121)

$$E_x = p (z - c t)$$
$$B_y = h (z - c t)$$

et les équations (7.124) seront satisfaites à condition que

$$h (z - v t) = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} p (z - c t)$$
$$= \frac{1}{c} p (z - c t)$$

et donc les amplitudes des champs électrique et magnétique sont liés par la relation

$$B_{y}(z,t) = \frac{1}{c} E_{x}(z,t)$$
(7.125)

où c est la vitesse de propagation.

7.12.2 Propagation dans un milieu linéaire

Dans un milieu matériel, et en l'absence de charges et de courants libres, les équations de Maxwell (7.96) sont :

div
$$\vec{D} = 0$$

div $\vec{B} = 0$
rot $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
(7.126)
rot $\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Si le milieu est <u>linéaire et homogène</u>

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$
$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

les équations deviennent

→

div
$$\vec{B} = 0$$

div $\vec{B} = 0$
rot $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
(7.127)
rot $\vec{B} = \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

et sont donc identiques aux équations dans le vide, avec $\varepsilon_0 \mu_0$ qui est remplacé par $\varepsilon \mu$. On peut donc adapter sans difficulté les résultats précédents. En particulier, dans un milieu linéaire et homogène, les ondes électromagnétiques se propageront à une vitesse :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \,\mu}} \tag{7.128}$$

inférieure à la vitesse dans le vide.

7.13 Le spectre électromagnétique

L'allure temporelle des champs dépend des fonctions sources ρ et J, et les fonctions sinusoïdales sont particulièrement importantes dans de nombreux domaines. Des charges ou des courants oscillants de manière sinusoïdale produisent des ondes électromagnétiques qui varient de la même manière.

D'autre part toute grandeur qui varie en fonction du temps peut s'exprimer comme la somme de sinusoïdes de différentes fréquences par la série ou la transformée de Fourier, et donc toute onde peut s'exprimer comme une combinaison linéaire d'ondes sinusoïdales.

L'étude des ondes et des phénomènes qui varient de manière sinusoïdale est donc un outil de base qui permet ensuite de généraliser à d'autres formes d'ondes.

Les phénomènes physiques qui produisent des ondes électromagnétiques sont également associés à certaines fréquences d'oscillations.

Une onde sinusoïdale a la forme

$$f(z,t) = A \cos \left[k (z - v t) \right]$$

= A cos (k z - \omega t) (7.129)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$
 longueur d'onde

$$T = \frac{2\pi}{k v}$$
 période

$$f = \frac{1}{T} = \frac{k v}{2\pi} = \frac{v}{\lambda}$$
 fréquence (Hz)

$$\omega = 2\pi f$$
 pulsation angulaire (rad/s)

Dans le cas d'une onde plane sinusoïdale, dans le vide, les relations (7.122) (7.123) (7.125) deviennent

$$\vec{E} = E_0 \cos(k \ z - \omega \ t) \ \dot{i}_x$$

$$\vec{B} = B_0 \cos(k \ z - \omega \ t) \ \dot{i}_y = \frac{E_0}{c} \cos(k \ z - \omega \ t) \ \dot{i}_y$$
(7.130)



Fig. 19 Onde sinusoïdale

Le spectre électromagnétique reprend les différentes fréquences des ondes électromagnétiques en fonction des applications ou des phénomènes physiques.

	Fréquence (Hz)	Longueur d'onde (dans le vide)
Rayons y	> 10 ²⁰	< 0,01 nm
Rayons X	10^{17} à 10^{20}	0,01 à 1 nm
Ultraviolet	10^{15} à 10^{17}	1 à 300 nm
Lumière visible	violet : 7,5 10 ¹⁴	violet : 400 nm
	rouge : 4 10 ¹⁴	rouge : 750 nm
Infrarouge	10^{12} à 10^{14}	3 à 300 μm
Spectre radio	3kHz à 300 GHz	1 mm à 100 km
Énergie électrique	50 Hz	6000 km

Le spectre électromagnétique

	Fréquence	Longueur d'onde (dans le vide)	Applications	
♠	30 à 300 GHz	1 mm à 1 cm	radar	
	3 à 30 GHz	1 cm à 10 cm	radar	
			communications par satellites	
	300 MHz à 3GHz	10 cm à 1 m	TV	
			GSM (900, 1800 MHz)	
			UMTS (1950, 2150 MHz)	
			BlueTooth (2.45 GHz)	
			WLAN (Wireless local area	
			network, 2.5 et 5 GHz)	
V			four à micro-ondes (2.45 GHz)	
	30 MHz à 300 MHz	1 à 10 m	TV, radio FM, police, traffic aérienradio ondes courtesradio AMradio ondes longues	
	3 à 30 MHz	10 à 100 m		
	0,3 à 3 MHz	0,1 à 1 km		
	30 à 300 kHz	1 à 10 km		
	3 à 30 kHz	10 à 100 km radionavigation		

Le spectre radio

Micro-ondes

8 CIRCUITS

8.1 Introduction

8.1.1 Le modèle de Kirchhoff

Un circuit électrique est constitué par la connexion d'un certain nombre d'éléments : résistances, capacités, bobines, diodes, transistors,....Les circuits sont les composants essentiels des systèmes électriques et électroniques. Par exemple :

- Dans un récepteur de radio on trouve des circuits d'amplification, de détection, d'alimentation,...
- Le réseau téléphonique est constitué d'un grand nombre de circuits dont la fonction est de transmettre un signal d'un point à un autre, éventuellement à grande distance.
- Le réseau de transport et de distribution d'énergie électrique est un très grand circuit.

De manière générale les circuits peuvent être étudiés à partir des équations de l'électromagnétisme et donc du modèle de Maxwell.

Nous nous intéressons cependant à une classe restreinte de circuits : <u>les circuits à éléments</u> <u>concentrés</u> pour lesquels il existe un modèle particulièrement simple et efficace: <u>le modèle</u> <u>de Kirchhoff.</u>

Un circuit à éléments concentrés (ou circuit à constantes localisées) est un circuit dont les dimensions sont suffisamment petites par rapport à la longueur d'onde des champs pour que l'on puisse négliger tout effet de propagation. Un tel circuit n'a plus de dimension puisque les phénomènes s'y propagent instantanément ; il ne subsiste qu'une <u>topologie</u>. Dans le cas contraire, un <u>circuit à éléments distribués</u> (ou circuit à constantes réparties) est constitué entièrement ou partiellement d'éléments distribués.

Soit un générateur sinusoïdal connecté à un circuit RC au moyen de fils de longueur ℓ :





A l'autre extrémité, la tension sera retardée d'un temps $t_d = \ell/c$ où c est la vitesse de propagation (nous négligeons la résistance des fils)

 $\begin{aligned} V_{BB'} &= V_0 \cos \left[\omega (t - t_d) \right] \\ &= V_0 \cos \left(2\pi f t - 2\pi \frac{t_d}{T} \right) = V_0 \cos \left(2\pi f t - 2\pi \frac{\ell}{\lambda} \right) \end{aligned}$

avec T=1/f et $\lambda=c/f$. On pourra donc considérer que $V_{BB'}\approx V_{AA'}$ pour autant que $t_d<< T$, $\ell<<\lambda$. Dans le cas contraire, il faudra traiter les fils comme une ligne de transmission.

Dans un circuit à éléments concentrés, la notion de champs disparaît (il n'y a plus de variable d'espace) et il ne subsiste que les notions de tension et de courant. L'énergie électromagnétique est supposée être confinée à l'intérieur des éléments sans dimension, et pas dans l'espace qui les entoure ; on ne peut donc parler ni du rayonnement, ni de la propagation des ondes. Les lois de Kirchhoff (loi des nœuds et loi des mailles), valables pour tout circuit à éléments concentrés, peuvent se déduire des équations de Maxwell en faisant les hypothèses adéquates. Pour l'étude des circuits à éléments concentrés, également appelés réseaux de Kirchhoff, les lois de Kirchhoff peuvent alors être considérées comme des postulats.

Les circuits à constantes localisées (qui sont décrits par des <u>équations différentielles</u> <u>ordinaires</u>) constituent ainsi une modélisation simplifiée des circuits à constantes réparties qui sont décrits par les équations de Maxwell (<u>équations aux dérivées partielles</u>). Les hypothèses restrictives menant aux réseaux de Kirchhoff sont valables pour de très nombreux cas pratiques, ce qui fait bien sûr l'intérêt du modèle, aussi bien dans le domaine de la transmission et de la transformation de l'énergie que dans celui de la transmission et de la transformation. Comme les équations aux dérivées partielles sont plus difficiles à manipuler, on a tout intérêt à utiliser le modèle de Kirchhoff lorsqu'il est applicable.

Il ne faut cependant pas oublier que la validité du modèle dépend à la fois des dimensions du circuit physique et des fréquences qui s'y propagent. La plus grande dimension du circuit physique, L, doit être « suffisamment » petite par rapport à la longueur d'onde λ . Pour fixer les idées, plaçons la limite à $L < \lambda / 100$ et prenons quelques exemples :

- ampli audio : $f_{max} = 20 \text{ kHz}$, $\lambda = 15 \text{ km} \implies L < 150 \text{ m}$ et la condition est certainement vérifiée.
- ampli video (étage d'entrée avant démodulation) : $f_{max} = 500 \text{ MHz}$, $\lambda = 60 \text{ cm} \implies L < 0.6 \text{ cm}$ on se trouve à la limite.
- antenne : la condition n'est certainement pas vérifiée.
- réseau d'énergie électrique : f = 50 Hz, $\lambda = 6000 \text{ km} \implies L < 60 \text{ km}$ et la condition sera vérifiée pour la plupart des réseaux de distribution mais pas pour les
- grands réseaux de transport.
- un composant (par exemple une résistance) de 2 cm de long devra être considéré comme composant distribué au-delà de 150 Mhz.
- pour un circuit intégré, dont la dimension est de l'ordre du mm, la fréquence limite est de 3 10⁹ Hz = 3 GHz
- pour un ordinateur, les interconnexions qui fonctionnent à 300 Mhz et qui sont supérieures à 1 cm doivent être traitées comme des lignes de transmission, au sens de l'électromagnétisme.

Dans la suite, seuls les circuits <u>à éléments concentrés, ou réseaux de Kirchhoff</u>, seront considérés. On les appellera simplement circuits, sans risque de confusion. Le comportement d'un circuit est décrit à partir de deux grandeurs électriques : le courant et la tension. Le courant i(t) et la tension v(t) sont des fonctions du temps qu'on appelle de manière générale des <u>signaux</u>. Un <u>signal d'entrée, ou excitation</u>, est un courant ou une tension qui constitue une donnée du problème (spécifiée par une source indépendante comme on le verra plus

loin) et qui est appliqué aux points accessibles du circuit. Une excitation peut représenter une information ou une énergie comme une fonction du temps. Un <u>signal de sortie ou réponse</u> est un courant ou une tension qui en résulte, en un point quelconque du circuit. Un circuit est alors un <u>système</u> qui transforme les signaux d'entrée en signaux de sortie, ceux-ci ayant des propriétés particulières que les signaux d'entrée n'avaient pas. <u>L'analyse des circuits</u>, qui nous occupe ici, consiste à calculer les courants et les tensions (c'est-à-dire les réponses) d'un circuit donné pour des excitations données. <u>La synthèse des circuits</u>, bien plus complexe en général, consiste à trouver le circuit lui-même, connaissant les signaux d'entrée et de sortie définis par une application particulière.

8.1.2 Circuit

Un circuit est constitué par la <u>connexion</u> d'un nombre fini d'<u>éléments</u>. Par exemple, voici un circuit :



Un élément possède un certain nombre de <u>bornes</u> qui servent à établir les connexions. Un élément à deux bornes est un <u>dipôle</u> (ou bipôle). Chaque borne d'un élément est caractérisée par deux grandeurs : le <u>potentiel</u> et le <u>courant</u>. Le courant peut être soit entrant dans une borne, soit sortant de cette borne. Le courant et le potentiel sont des fonctions du temps. La différence de potentiel entre deux bornes est appelée <u>tension</u> entre ces deux bornes. La somme des courants entrant dans un élément est nulle. Pour un dipôle cela signifie que le courant entrant par une borne est égal à celui sortant par l'autre borne. Pour commencer, considérons des circuits constitués par l'assemblage de dipôles. La <u>connexion</u> se réalise en faisant coïncider les bornes de certains éléments, qui deviennent les <u>nœuds</u> du circuit. Chaque nœud est alors caractérisé par un potentiel. Des bornes appartenant à des éléments différents auront donc le même potentiel. Les éléments (dipôles) constituent des <u>branches</u> qui joignent les nœuds . Un parcours fermé constitué de branches forme une maille.

<u>Exemple</u> : circuit avec 6 branches et 4 nœuds Les bornes des éléments sont réunies en nœuds :



ce qui donne le circuit :



Le même circuit peut également être représenté de la manière suivante :



8.1.3 Références standard

Le courant i(t) dans un dipôle est une fonction réelle du temps qui peut prendre des valeurs négatives aussi bien que positives. On attribue à chaque courant un sens conventionnel (c'est-à-dire un signe) parfaitement arbitraire, au moyen d'une flèche placée sur la branche.



Cette flèche signifie que lorsque le courant (considéré comme un déplacement de charges positives) est effectivement dans le sens de la flèche, i(t) est positif.

Comme pour les courants, il est nécessaire de choisir un sens conventionnel (un signe) pour les différences de potentiel entre paires de bornes. On utilisera également une flèche, orientée du point au potentiel le plus bas(-) vers le point au potentiel le plus élevé (+).



La tension v(t) est positive si le potentiel de la borne A est supérieur à celui de la borne B. Ces sens conventionnels peuvent être choisis arbitrairement, et indépendamment pour le courant et la tension. Cependant, si on choisit les sens conventionnels de la manière suivante:



avec la flèche du courant dirigée, le long de la branche, du + vers le - de la tension, on parle de <u>références standard</u> ou <u>références associées</u>.

8.1.4 Puissance relative à un dipôle

La puissance instantanée associée à un dipôle est donnée par : p(t) = v(t) i(t) et s'exprime en watts. Cette puissance peut être positive ou négative. Pour les <u>références standard</u> de la tension et du courant, il s'agit de la puissance <u>absorbée</u> par le dipôle :



Considérons en effet que i et v sont positifs sur la fig.4. Les charges positives se déplacent donc du potentiel élevé vers le potentiel bas, c'est à dire dans la direction de la force due à un champ électrique produit par un agent extérieur (par exemple un générateur). Le composant reçoit donc de la puissance de la part de cet agent extérieur.

Tandis que pour les références :



p = v i représente la puissance <u>fournie</u> par le dipôle.

8.1.5 Classification des circuits

On peut classer les circuits de deux manières différentes :

- en spécifiant les catégories d'éléments qui composent le circuit.
- en considérant le circuit comme un « système » et en examinant les propriétés de sa (ses) réponse(s) lorsqu'il est soumis à des excitations. C'est cette seconde approche que nous examinons ici.

Linéarité

Un circuit est linéaire s'il satisfait au principe de superposition : la réponse à une somme d'excitations est égale à la somme des réponses dues à chaque excitation prise séparément, les excitations pouvant être appliquées au même endroit ou à des endroits différents du circuit :

si l'excitation $x_1(t)$	donne la réponse	y ₁ (t)
$\mathbf{x}_{2}(t)$		$y_2(t)$

alors l'excitation a $x_1(t) + b x_2(t)$ donnera la réponse a $y_1(t) + b y_2(t)$ où a et b sont des constantes.

Un circuit linéaire sera décrit par des équations différentielles linéaires.

Permanence

Un circuit est permanent (ou invariant dans le temps) si à un glissement dans le temps de l'excitation correspond le même glissement dans le temps de la réponse :

si l'excitation x(t) donne la réponse y(t), alors l'excitation $x(t-t_0)$ donnera la réponse y(t-t_0) pour toute valeur de t₀.



Fig. 7

Cela implique donc que les valeurs des composants du circuit restent constantes en fonction du temps. Un circuit linéaire et permanent sera décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Passivité

Deux bornes d'un circuit peuvent être associées et constituer un <u>accès</u> si les deux courants sont identiques au signe près :





L'accès est donc caractérisé par deux grandeurs : la tension et le courant. Un circuit ayant un seul accès est un dipôle. Le circuit peut être un simple composant (par exemple une résistance) ou l'assemblage de plusieurs éléments. La puissance instantanée absorbée par le circuit (dipôle), avec les références associées pour v et i, est :

$$p(t) = v(t) i(t)$$
 (8.1)

L'énergie absorbée par le circuit est :

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t) dt$$
(8.2)

Un circuit est passif si cette énergie est toujours non négative :

$$\mathbf{w}(\mathbf{t}) \ge \mathbf{0} \tag{8.3}$$

pour toute tension v(t), et le courant i(t) qui en résulte, et pour tout temps t. Sinon le circuit est <u>actif</u>. Un circuit passif peut éventuellement restituer de l'énergie, mais jamais plus qu'il n'en a précédemment reçue.

8.1.6 Lois de Kirchhoff

La connexion des éléments introduit des contraintes sur les courants et les tensions, exprimées par les lois de Kirchhoff.

Loi des nœuds

La somme algébrique des courants quittant un nœud est nulle.

Pour le circuit suivant,



un sens conventionnel ayant été choisi pour le courant de chaque branche, la loi des nœuds appliquée au nœud b donne :

 $i_4(t) - i_3(t) - i_6(t) = 0$ $\forall t$ La loi des nœuds exprime la conservation de la charge

Loi des mailles

La somme algébrique des tensions aux bornes des branches constituant une maille est nulle.

Pour appliquer la loi des mailles, il faut choisir un sens de parcours de la maille, et attribuer le signe + aux branches dont le sens conventionnel de la tension coïncide avec celui de la maille.

Pour le circuit suivant :



Fig. 10

on aura :

$$\begin{aligned} v_4(t) + v_5(t) - v_6(t) &= 0 & \forall t & \text{pour la maille I} \\ - v_1(t) + v_4(t) + v_5(t) - v_2(t) &= 0 & \forall t & \text{pour la maille II} \end{aligned}$$

La loi des mailles est une conséquence de la définition de la tension entre deux noeuds et de la nature scalaire du potentiel.

Chaque élément du circuit est caractérisé par une tension qui est la différence entre les potentiels de ses nœuds (cf fig.2). La somme algébrique des tensions rencontrées lors d'un parcours fermé doit donc s'annuler.

<u>Remarques</u>

- Les lois de Kirchhoff sont valables pour tout circuit à constantes localisées et sont indépendantes de la nature des composants situés dans chaque branche. Elles sont valables que les éléments soient linéaires ou non, invariants dans le temps ou non
- Les lois de Kirchhoff donnent des équations algébriques linéaires et homogènes.

8.2 Eléments

8.2.1 Résistance

L'effet résistif d'un conducteur s'exprime par la loi d'Ohm :



pour les <u>références associées</u> du courant et de la tension. Si le facteur de proportionnalité R est supposé constant, le modèle est celui de la résistance <u>linéaire et permanente</u>. R est la <u>résistance</u> et G = 1/R est la <u>conductance</u>.

L'énergie électrique fournie pour assurer le passage du courant dans la résistance est transformée en chaleur par effet Joule. La puissance instantanée fournie à la résistance est :

$$p(t) = v(t) i(t) = R i^{2}(t) = \frac{v^{2}(t)}{R}$$
(8.5)

et l'énergie dissipée (sous forme de chaleur) :

$$w_{R}(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t) dt = R \int_{-\infty}^{t} i^{2}(t) dt$$
(8.6)

Deux cas particuliers de résistances sont le <u>court-circuit</u> (R=0) et le <u>circuit ouvert</u> (G=0).

Nous avons étudié les milieux conducteurs et la notion de résistance au §4.2. Ici nous considérons la résistance de manière globale, à partir de la loi d'Ohm, sans nous intéresser à la configuration précise de cette résistance.

Il ne faut cependant pas perdre de vue que la résistance linéaire et permanente est un modèle idéalisé qui néglige un certain nombre de phénomènes, éventuellement à bon escient :

- L'élément résistif comportera toujours une certaine inductance propre.
- La valeur de la résistance varie avec la température, qui elle-même est influencée par l'effet Joule qui dépend du courant.
- Le facteur R peut dépendre directement de u ou de i (résistance non linéaire).
- Toute résistance est caractérisée par une puissance limite qui peut y être dissipée et audelà de laquelle le composant sera endommagé. La relation (8.4) n'est donc certainement pas valable pour toute valeur de i (ou de u).
- La résistance est une fonction de la fréquence par l'effet pelliculaire.
- Les dimensions géométriques de l'élément résistif n'interviennent pas. Tout effet de propagation est donc ignoré.

Malgré toutes ces remarques, on peut construire des composants physiques dont le comportement est très proche de celui de la résistance linéaire. Et on désigne d'ailleurs du même nom de résistance, à la fois le composant physique, le modèle, et le facteur de proportionnalité dans la relation (8.4).

f(v,i,t)=0

Si le temps n'apparaît pas explicitement dans la relation :

f(v,i) = 0

(8.8)

la résistance est permanente.

L'ensemble des points du plan v,i qui vérifient la relation forment la <u>caractéristique</u> de la résistance.

Une résistance est <u>linéaire</u> si, pour toute valeur de t, sa caractéristique est une droite passant par l'origine. Pour la résistance linéaire et permanente, la caractéristique est une droite de pente R, indépendante de t.



Fig. 11

Une résistance linéaire et non permanente est décrite par la relation : v(t) = R(t) i(t) (8.9)

Une résistance non linéaire (et permanente) caractérisée par une relation (8.8) sera représentée par le symbole :



qui fait apparaître que les deux bornes ne sont pas identiques. Une résistance non linéaire est en effet généralement un élément <u>non symétrique</u>, et il faut donc pouvoir distinguer les deux bornes. Une résistance est <u>symétrique (</u> ou bilatérale) si sa caractéristique est symétrique par rapport à l'origine du plan i,v.

Exemples de résistances non linéaires

La diode tunnel possède la caractéristique donnée à la fig.12.

On voit que pour toute valeur de v , il n'existe qu'une seule valeur de i admissible. On peut donc expliciter le courant en fonction de la tension dans (8.8):

$$\mathbf{i} = \mathbf{g}(\mathbf{v}) \tag{8.10}$$

Une telle résistance non linéaire est dite contrôlée en tension.



Fig. 12

De manière analogue, une résistance est contrôlée en courant si sa caractéristique peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{v} = \mathbf{h}(\mathbf{i}) \tag{8.11}$$

La diode à jonction est décrite par la relation :





où I_S , q, k, T sont des paramètres : C'est une résistance non linéaire, non symétrique, contrôlée en tension.

On modélise souvent la diode plus grossièrement, au moyen du modèle de la diode idéale:



Une résistance est toujours définie par une relation entre le courant et la tension au même instant. C'est un élément <u>sans mémoire</u>.

8.2.2 Sources indépendantes

L'apport d'énergie électrique dans un circuit est dû à des générateurs ou sources qui transforment une énergie non électrique (mécanique ou chimique par exemple) en énergie électrique. Nous avons décrit de tels générateurs aux §4.9 et §7.3.1. Nous avons vu que ces générateurs maintiennent à leurs bornes une différence de potentiel égale à leur force électromotrice. Par extension on appelle également générateurs un dispositif actif local qui effectue une conversion d'énergie électrique et que l'on modélise comme une source de tension (au sens du théorème de Thévenin).

Nous ne nous occupons pas du fonctionnement interne de ces générateurs.

Le modèle idéalisé d'un générateur est un élément appelé source de tension indépendante.

Source de tension indépendante

Une source de tension indépendante est un dipôle qui maintient à ses bornes une tension connue $v_S(t)$, quel que soit le courant débité par la source. Si la tension imposée est constante (ne dépend pas du temps), on parle de source continue (ou DC). Si elle varie sinusoïdalement, on parle de source sinusoïdale. Le symbole de la source de tension indépendante est le suivant, où le + et le - indiquent la polarité (le signe) de la source (et non qu'il s'agit d'une source continue).

Une source de tension continue est représentée par :





+ -_____

et peut donc être considérée comme une résistance non linéaire (si $v_S(t) \neq 0$) contrôlée en courant.

Le court-circuit peut être considéré comme une source de tension identiquement nulle.

Remarquons enfin que pour les sources indépendantes on utilise souvent la convention <u>opposée</u> aux références standard. Le produit v(t) i(t) est alors la puissance <u>fournie</u> par la source.

8.2.3 Capacité (ou condensateur)

Nous avons étudié les condensateurs aux chapitres 2 et 3.

Un condensateur est caractérisé par la propriété d'accumuler des charges sous l'effet d'une différence de potentiel. Il est constitué de deux éléments conducteurs séparés par un isolant diélectrique. L'énergie qui est accumulée dans le condensateur sous forme de champ électrique n'est pas dissipée en chaleur comme dans une résistance, mais peut être restituée. Dans le cadre des circuits à éléments localisés et pour le modèle de la capacité idéale, on fait plusieurs hypothèses simplificatrices : on suppose que les armatures et les fils sont des conducteurs parfaits et que l'isolement entre les armatures est parfaite (aucun courant de conduction ne circule entre les armatures). On suppose également que les armatures sont proches l'une de l'autre et éloignées d'autres conducteurs de sorte que toutes les lignes de champs sont limitées à l'espace entre les armatures. On suppose que les armatures portent des charges égales et opposées, et que ces charges sont beaucoup plus grandes que les charges à la surface des fils de liaison.

La charge q est fonction de la tension v :

$$q(t) = C v(t)$$
 (8.14)

et le coefficient C est la capacité. La capacité est linéaire et permanente si le facteur C est constant. La valeur de la capacité dépend de la géométrie du système et de la permittivité du milieu.

Le courant électrique correspond à un débit de charges :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$
(8.15)

En intégrant on obtient :

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(t) dt = q(0) + \int_{0}^{t} i(t) dt$$
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(t) dt = v(0) + \frac{1}{C} \int_{0}^{t} i(t) dt$$
(8.16)

L'instant initial t=0 correspond généralement à un événement particulier, par exemple l'instant à partir duquel une source indépendante est spécifiée. La tension v(t) aux bornes d'une capacité dépend donc de la tension initiale v(0), c'est-à-dire du courant qui a traversé la capacité dans le « passé ». On dit qu'une capacité a de la mémoire. La relation (8.16) indique que la tension v(t) aux bornes d'une capacité dépend non seulement du courant sur l'intervalle (0,t) mais aussi de la valeur initiale v(0). La tension n'est donc une fonction linéaire du courant que si v(0) = 0. Le principe de superposition ne s'applique donc que pour une capacité initialement non chargée. Une capacité ayant une tension initiale v(0) peut être considérée comme la connexion en série de la même capacité, avec une tension initiale nulle, et d'une source de tension indépendante (continue) de valeur v(0) :



La relation (8.16) est vérifiée dans les deux schémas et les deux dipôles sont donc équivalents.

Comportement d'une capacité

En régime continu

Si la tension v(t) est constante, le courant i(t) est nul, et la capacité correspond donc à un circuit ouvert en régime continu.

En régime sinusoïdal

Si la tension est sinusoïdale

 $v(t) = V \sin \omega t$

le courant est également sinusoïdal, de même fréquence :

$$i(t) = I \cos \omega t = I \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$
(8.17)

avec $I = \omega C V = 2 \pi f C V$

Le courant est en avance d'un quart de période sur la tension et l'amplitude du courant est proportionnelle à la fréquence, pour une tension d'amplitude V constante.

Inertie aux variations de tension

A partir de (8.16), on écrit :

$$v(t+dt) - v(t) = \frac{1}{C} \int_{t}^{t+dt} i(t) dt$$
(8.18)

qui indique que <u>la tension aux bornes d'une capacité est une fonction continue</u> du temps si le courant reste borné. La tension d'une capacité ne peut donc pas avoir de discontinuités tant que le courant reste fini.

Energie potentielle

L'énergie potentielle accumulée dans le condensateur est :

$$w_{C}(t) = \int_{-\infty}^{t} v \, i \, dt = \int_{-\infty}^{t} C \, v \, \frac{d \, v}{d \, t} \, dt = \int_{-\infty}^{t} \frac{C}{2} \, d[v^{2}] = \frac{1}{2} C \, v^{2}(t) \tag{8.19}$$

en supposant que $v(-\infty) = 0$. Il s'agit d'une énergie électrostatique qui peut être restituée dans une phase de décharge. La valeur de v(0) spécifie donc le niveau d'énergie dans la capacité à l'instant initial. La continuité de v(t) implique la continuité de l'énergie potentielle. Si ce n'était pas le cas, la puissance deviendrait infinie.

Exemple : Pour une capacité soumise à une tension sinusoïdale :

 $v(t) = V \sin \omega t$

$$w_{C}(t) = \frac{C V^{2}}{2} \sin^{2} \omega t = \frac{C V^{2}}{4} (1 - \cos 2 \omega t)$$

On observe une succession de charges et de décharges du condensateur :



Capacité non permanente

Une capacité linéaire et non permanente est caractérisée par :

q(t) = C(t) v(t)

(8.20)

Pour chaque instant t , la caractéristique dans le plan q,v est une droite passant par l'origine. Le courant est donné par :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C(t)\frac{dv}{dt} + v(t)\frac{dC}{dt}$$
(8.21)

Capacité non linéaire





Fig. 17

Une capacité non linéaire est définie par une caractéristique dans le plan q,v. Pour une capacité contrôlée en tension (ce qui est le cas en pratique) :

$$q = f(v) \qquad \qquad i = \frac{dq}{dt} \qquad (8.22)$$

8.2.4 Inductance

 $\Phi = Li$

D'après la loi de Faraday, tout changement d'un flux magnétique traversant un circuit provoque dans ce dernier une force électromotrice induite :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$$
(8.23)

Il est sans importance que le flux soit créé par le courant dans un autre conducteur, par un aimant ou enfin par le courant dans le même circuit. Dans ce dernier cas, le phénomène est appelé induction propre (ou auto-induction, ou self induction). La force électromotrice induite, définie par (8.23), s'oppose aux variations de flux traversant le circuit, mais pas au flux lui-même (loi de Lenz).

Dans le cas d'une <u>inductance linéaire</u>, le flux Φ est proportionnel au courant :

(8.24)

où Φ est le flux coupé par le circuit (ou l'élément de circuit) et dû au courant i circulant dans le même circuit et le coefficient L , supposé constant, est <u>l'inductance du circuit</u>. Ceci suppose que l'élément se trouve dans un milieu magnétique linéaire.

Pour le modèle de l'inductance "parfaite", nous négligeons la résistance du fil parcouru par le courant ainsi que la charge à la surface du fil. Nous supposons aussi que le champ magnétique créé par le courant reste confiné à l'élément lui-même. Le champ magnétique ne s'étend pas dans tout l'espace et n'entre pas en interaction avec les autres parties du circuit.

La relation (8.23), utilisée en électromagnétisme, considère que la spire agit comme une source qui délivre une puissance e(t) i(t) par son interaction avec le champ magnétique. Nous considérerons la spire comme un récepteur (dipôle passif) qui absorbe une puissance v(t) i(t), en définissant par

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$
(8.25)

la différence de potentiel qui apparaît aux bornes de l'inductance :



Pour vérifier la loi de Lenz, considérons que le courant augmente, donc di/dt > 0. D'après (8.25), v(t)>0, ce qui signifie que le potentiel du point A est supérieur au potentiel du point B, ce qui est la polarité nécessaire pour s'opposer à l'augmentation du courant.

Inductance linéaire et permanente

L'inductance linéaire et permanente est caractérisée par la relation

$$\Phi(t) = Li(t)$$

où le coefficient L est une constante, et Φ désigne le flux magnétique. La tension aux bornes de l'inductance est:

$$v(t) = \frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di(t)}{dt}$$

En intégrant on obtient:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v(t) dt = i(0) + \frac{1}{L} \int_{0}^{t} v(t) dt$$
(8.26)

Le courant i(t) dépend de la tension sur l'intervalle (0,t) ainsi que de la valeur initiale du courant i(0). Le courant n'est donc une fonction linéaire de la tension que si i(0)=0. Le principe de superposition ne s'applique donc que dans la mesure où i(0)=0.

Une inductance dont le courant initial est i(0) peut être considérée comme la connexion en parallèle de la même inductance avec un courant initial nul, et d'une source de courant continu de valeur $I_0 = i(0)$.



En régime continu

Lorsque le courant est constant, la tension aux bornes d'une inductance est nulle, et l'inductance correspond donc à un court-circuit en régime continu.

En régime sinusoïdal

Si le courant est sinusoïdal $i(t) = I \sin \omega t$ on obtient pour la tension

$$v(t) = V \cos \omega t = V \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$
(8.27)

avec $V = \omega L I$

Le courant est en retard d'un quart de période sur la tension.

Inertie aux variations de courant

A partir de (8.26) on a

$$i(t+dt) - i(t) = \frac{1}{L} \int_{t}^{t+dt} v(t)dt$$
 (8.28)

<u>Le courant dans une inductance est une fonction continue</u> du temps si la tension reste bornée. Une inductance s'oppose donc à toute discontinuité du courant qui la traverse.

Energie potentielle

L'énergie potentielle accumulée sous forme électromagnétique est:

$$w_{L}(t) = \int_{-\infty}^{t} v \, i \, dt = \int_{-\infty}^{t} L \, i \, \frac{di}{dt} \, dt = \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{t} d[i^{2}] = \frac{1}{2} L \, i^{2}(t)$$
(8.29)

en supposant que $i(-\infty) = 0$. La valeur de i(0) spécifie donc le niveau d'énergie à l'instant initial. La continuité de i(t) implique la continuité de l'énergie potentielle.

Inductance non permanente

Une inductance linéaire et non permanente est caractérisée par:

$$\Phi(t) = L(t)i(t)$$
$$v(t) = L(t)\frac{di}{dt} + \frac{dL}{dt}i(t)$$

Inductance non linéaire

De manière générale, une inductance est définie par une <u>caractéristique</u> dans le plan ϕ , i qui lie les valeurs instantanées du flux et du courant. L'inductance linéaire et permanente correspond au cas particulier où cette caractéristique est une droite passant par l'origine, avec une pente indépendante de t . On sait cependant que les inductances à noyau ferromagnétique ont des caractéristiques non linéaires à cause du phénomène de saturation. De plus, le phénomène d'hystérésis ne permet plus de définir le flux comme une fonction univoque du courant.

Si on exclut le phénomène d'hystérésis, une inductance non linéaire sera caractérisée par une relation $\Phi = f(i)$.



Fig. 18

8.2.5 Notion de modèle

Les éléments que nous avons introduits sont des <u>éléments idéaux</u> ou éléments mathématiques caractérisés par des équations simples et précises. Les circuits que nous allons résoudre seront constitués par l'assemblage de ces éléments.

Cependant le problème à résoudre par l'ingénieur est de calculer les tensions et les courants dans un assemblage de composants physiques qui ont généralement un comportement plus complexe que nos éléments idéaux.

Chaque élément physique devra donc, dans la mesure du possible, être <u>modélisé</u> par un <u>schéma équivalent</u> constitué d'éléments idéaux. Ce modèle sera d'autant meilleur que son comportement théorique se rapprochera du comportement physique du composant, tel qu'on peut le déterminer expérimentalement.

Par exemple, une bobine (composant physique) peut être modélisée par une inductance. Cependant, le fil aura une certaine résistance et donc, aux basses fréquences la bobine sera en réalité équivalente à une inductance en série avec une résistance. Pour les hautes fréquences il faudra également tenir compte de la présence de capacités "parasites" entre les spires successives de la bobine. Un schéma équivalent plus complet sera donc:



D'autre part, il n'existe pas de dispositif physique qui se comporte comme les sources indépendantes que nous avons définies. Une modélisation adéquate nécessitera de tenir compte d'une résistance interne de la source.

La complexité d'un schéma équivalent dépendra du dispositif physique, du degré de précision souhaité et des conditions de fonctionnement. La validité du schéma équivalent sera toujours limitée à un certain domaine de fonctionnement : tension, courant ou puissance maximum, plage de fréquences, plage de température, etc.

8.3 Résolution des circuits en transitoire

8.3.1 Circuit RL

Considérons un circuit formé d'une pile, d'un interrupteur et d'une bobine.



Fig. 19

Le schéma équivalent, constitué d'éléments idéaux sera alors :



où R représente toute la résistance du circuit : les fils de la bobine, les fils de liaison et la résistance interne de la pile. De même L représente toute l'inductance du circuit, et sera due principalement à la bobine (et un peu aux fils de liaison).

A l'instant t = 0 on ferme l'interrupteur.

$$E - L \frac{di}{dt} = R i$$

Comme on l'a vu en (8.25) on préfère considérer la différence de potentiel aux bornes de l'inductance, en respectant les références associées :

$$v_{L} = v_{B} - v_{C} = L \frac{di}{dt}$$

et écrire l'équation du circuit (loi des mailles) :

$$\mathbf{E} = \mathbf{R} \,\mathbf{i} + \mathbf{L} \,\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}}{\mathrm{d}\mathbf{t}}$$

ce qui revient évidemment au même ! La solution générale est :

$$i(t) = A e^{-(R/L)t} + \frac{E}{R}$$
 (8.30)

Le premier terme est la solution générale de l'équation homogène (terme transitoire) et le deuxième terme est une solution particulière de l'équation avec second membre (terme de régime).

On a nécessairement i = 0 avant la fermeture de l'interrupteur. Le courant dans une inductance est une fonction continue du temps et la condition initiale est donc

i(0) = 0 (8.31) Une discontinuité du courant correspondrait à une variation instantanée de l'énergie et donc à une puissance infinie, et également à une tension infinie.

On peut donc déterminer la constante A dans (8.30) grâce à la condition (8.31), et donc

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

où $\tau = L/R$ est la constante de temps.



L'inductance s'oppose donc à la croissance du courant (en l'absence de L dans le circuit, le courant aurait pris immédiatement la valeur E/R).

Les tensions v_R et v_L aux bornes de l'inductance et la résistance sont données par

$$v_{R} = R i = E (1 - e^{-t/\tau})$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} = E e^{-t/\tau}$$

 $v_R + v_L = E$

La tension E qui initialement apparaît aux bornes de l'inductance seule, est progressivement reprise aux bornes de la résistance.



8.3.2 Circuit RC

Le circuit correspondant à la charge d'un condensateur à travers une résistance est le suivant



L'équation de la capacité est

$$i = C \frac{d v_C}{dt}$$
(8.32)

et on obtient donc par la loi des mailles

$$E = v_{R} + v_{C} = R i + v_{C}$$

$$E = R C \frac{d v_{C}}{dt} + v_{C}$$
(8.33)

La solution générale est

 $v_{\rm C} = A e^{-t/R C} + E$ (8.34)

La charge et la tension d'une capacité sont liées par : $v_C = Q/C$. Supposons que la capacité était déchargée (Q = 0) immédiatement avant la fermeture de l'interrupteur. Comme la charge (et la tension) d'un condensateur ne peuvent pas varier instantanément, on aura aussi v_C (0) = 0 immédiatement après la fermeture de l'interrupteur.

On peut donc déterminer la constante A dans (8.34) :

$$v_{\rm C}$$
 (t) = E (1 - e^{-t/R C}) (8.35)

 $\tau = R C$ est la constante de temps du circuit. Le courant s'obtient à partir de (8.32)

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/R C}$$
(8.36)

L'énergie accumulée dans le condensateur après un temps très long, sera

$$W_{C} = \frac{1}{2} C v_{C}^{2} (\infty) = \frac{1}{2} C E^{2}$$

Cette énergie pourrait être restituée au cours d'une phase de décharge du condensateur. L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance est

$$W_{R} = \int_{0}^{\infty} p_{R} (t) dt = \int_{0}^{\infty} R i^{2} (t) dt$$
$$W_{R} = \frac{E^{2}}{R} \int_{0}^{\infty} e^{-2 t/R C} dt = \frac{1}{2} C E^{2}$$

Cette énergie est donc indépendante de la valeur de la résistance. Enfin l'énergie fournie par la source est :

$$W_{S} = \int_{0}^{\infty} p_{S} (t) = \int_{0}^{\infty} E i (t) dt$$
$$= \frac{E^{2}}{R} \int_{0}^{\infty} e^{-t/R C} dt = C E^{2}$$

On a donc bien le bilan

$$W_{S} = W_{C} + W_{R}$$

8.3.3 Circuit RLC

La capacité a été préalablement chargée à une tension V_0 , et à l'instant t = 0 on ferme l'interrupteur



L'équation du circuit est

$$L\frac{di}{dt} + Ri - \frac{1}{C} \left[Q_0 - \int_0^t i dt \right] = 0$$
(8.37)

et en dérivant on obtient une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^{2} i}{dt^{2}} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$
(8.38)

L'équation caractéristique est

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$$

et on obtient les racines

$$p_{1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^{2}}{4L^{2}} - \frac{1}{LC}}$$

$$p_{2} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^{2}}{4L^{2}} - \frac{1}{LC}}$$
(8.39)

Les conditions initiales sont

i (0) = 0 continuité du courant dans l'inductance (8.40)

$$v_{\rm C}$$
 (0) = V_0 continuité de la tension de la capacité (8.41)

L'équation (8.37) à t = 0 donne

$$L\left(\frac{di}{dt}\right)_{0} + R i (0) - V_{0} = 0$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{0} = \frac{V_{0}}{L}$$
(8.42)

Il faut considérer trois cas

<u>Cas 1</u>: amortissement critique : $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ ou $R = 2\sqrt{L/C}$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = -\frac{\mathbf{R}}{2\mathbf{L}}$$

La solution est de la forme

$$i(t) = (K_1 t + K_2) e^{-(R/2L) t}$$
$$K_1 = V_0 / L \qquad \qquad K_2 = 0$$

et donc

$$i(t) = \frac{V_0}{L} t e^{-(R/2L)t}$$
 (8.43)

La tension aux bornes de la capacité est

$$v_{C}(t) = V_{0} - \frac{1}{C} \int_{0}^{t} i dt$$

= $V_{0} (1 + \frac{R}{2L} t) e^{-(R/2L) t}$ (8.44)



<u>Cas 2 :</u> amortissement sur-critique : $R > 2 \; \sqrt{L/C}$

La solution est de la forme

 $i(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}$

où p_1 et p_2 , donnés par (8.39) sont deux réels négatifs. Les conditions initiales (8.40) (8.41) donnent

$$K_1 = -K_2 = \frac{V_0}{L(p_1 - p_2)}$$

et donc

$$i(t) = \frac{V_0}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

$$v_C(t) = \frac{V_0}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t})$$
(8.45)
(8.46)



<u>Cas 3 :</u> amortissement sous-critique : $R < 2\sqrt{L/C}$

Les valeurs de p_1 et p_2 sont complexes

$$p_1 = -\alpha + j\beta \qquad \alpha = R/2L$$

$$p_2 = -\alpha - j\beta \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

La solution est de la forme

$$i(t) = K_1 e^{-(\alpha - j\beta)t} + K_2 e^{-(\alpha + j\beta)t}$$

Les conditions initiales (8.40) (8.41) donnent

$$\mathbf{K}_1 = -\mathbf{K}_2 = \frac{\mathbf{V}_0}{2\mathbf{j}\,\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{L}}$$

et donc un courant oscillant et progressivement amorti :

$$i(t) = \frac{V_0}{\beta L} e^{-\alpha t} \sin \beta t$$
(8.47)

$$v_{C}(t) = \frac{V_{0}}{\beta \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \phi)$$

$$tg \phi = \frac{\alpha}{\beta}$$
(8.48)



Dans le cas idéalisé (et irréalisable en pratique) d'un <u>circuit LC</u> pur, avec R = 0, on aura :

$$i (t) = I_0 \sin \omega_0 t$$

$$v_C (t) = V_0 \cos \omega_0 t$$
(8.49)
(8.50)
avec
$$I_0 = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et les deux fonctions i (t) et v_C (t) sont déphasées de 90°. Il y a échange entre l'énergie magnétique (dans l'inductance) et l'énergie électrique (dans le condensateur) :

$$W_{\rm m} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L I_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

= $\frac{1}{2} V_0^2 C \sin^2 \omega_0 t$ (8.51)

$$W_{e} = \frac{1}{2} C v_{C}^{2} = \frac{1}{2} V_{0}^{2} C \cos^{2} \omega_{0} t$$
(8.52)

L'énergie totale

$$W = W_{\rm m} + W_{\rm e} = \frac{1}{2} C V_0^2$$
(8.53)

est constante et égale à l'énergie initiale du condensateur.

8.3.4 Tension sinusoïdale appliquée au circuit RL

 $e(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha)$ est appliquée à l'instant t = 0 à un circuit RL.



L'équation du circuit est

$$R i + L \frac{di}{dt} = e(t) \qquad \text{pour } t > 0 \tag{8.54}$$

Le terme transitoire est

$$i_i(t) = A_1 e^{-t/\tau}$$
 $\tau = L/R$ (8.55)

et la solution générale est

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

où i_2 (t) est une solution particulière de l'équation avec second membre.

Supposons que cette solution particulière s'écrive sous la forme :

 $i_2(t) = A \cos(\omega t + \alpha) + B \sin(\omega t + \alpha)$

En substituant dans l'équation (8.54) : R [A cos ($\omega t + \alpha$) + B sin ($\omega t + \alpha$)] + L [$-\omega$ A sin ($\omega t + \alpha$) + ω B cos ($\omega t + \alpha$)] = V_m cos ($\omega t + \alpha$) et en égalant les coefficients des termes correspondants :

$$\begin{bmatrix} R A + \omega L B = V_m \\ -\omega L A + R B = 0 \end{bmatrix}$$

et donc

$$\begin{cases} A = \frac{R V_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ B = \frac{\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ i_2(t) = \frac{R V_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos(\omega t + \alpha) + \frac{\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

que l'on peut aussi écrire

$$i_{2}(t) = \frac{V_{m}}{\sqrt{R^{2} + \omega^{2} L^{2}}} \cos(\omega t + \alpha - \operatorname{arc} tg \frac{\omega L}{R})$$

ou encore

$$i_2(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha - \theta)$$

avec

$$I_{m} = \frac{V_{m}}{\sqrt{R^{2} + \omega^{2} L^{2}}}$$
$$\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega L}{R}$$

Avec la condition initiale i (0) = 0, on obtient la valeur de la constante

$$A_1 = -I_m \cos{(\alpha - \theta)}$$

et l'expression du courant

$$i(t) = I_{m} \left[\cos(\omega t + \alpha - \theta) - \cos(\alpha - \theta) e^{-t/\tau} \right]$$
(8.57)

Le courant comprend d'une part un terme transitoire et d'autre part un terme de régime à la même fréquence que le signal d'entrée.

Dans le cas particulier du circuit RL, on peut faire les commentaires suivants :

- Si $\alpha \theta = \pm \frac{\pi}{2}$, le terme transitoire est identiquement nul et le régime permanent s'établit donc immédiatement. Dans le cas où l'inductance domine ($\omega L >> R$), θ est voisin de $\pi/2$ et cela correspond donc à un enclenchement au moment où la tension est maximale.
- Si $\alpha \theta = 0$ ou π , on a : i(t) = $\pm I_m (\cos \omega t e^{-t/\tau})$

Si $\omega L >> R$, θ est voisin de $\pi/2$ et cela correspond à un enclenchement au moment où la tension est nulle. Le terme transitoire peut alors garder une valeur appréciable pendant un grand nombre de périodes et le courant i (t) atteint son maximum pour

$$t \cong T/2$$
 : $i_{max} \cong I_m (1 + e^{-R T/2L}) \cong 2 I_m, (\frac{R T}{2L} = \pi \frac{R}{\omega L})$. La valeur instantanée du

courant atteint le double de la valeur maximale en régime. En pratique, ce phénomène est encore amplifié par les effets de saturation dans une inductance non linéaire à noyau de fer.

(8.56)

8.3.5 Equations des mailles

Les équations dont on dispose pour analyser les circuits sont de deux types :

- Les équations constitutives ou équations de branches qui résultent de la <u>nature des</u> <u>éléments</u>. Chaque élément (dipôle) d'un circuit est caractérisé par une équation liant la tension et le courant de l'élément.
- Les équations de Kirchhoff qui résultent des connexions.

Dans les exemples précédents, nous avons considéré des circuits simples, comprenant une seule maille, et l'équation différentielle décrivant le circuit pouvait s'écrire directement. Pour des circuits plus compliqués, il faut une méthode générale et systématique permettant d'écrire les équations : c'est le but de la méthode des équations des mailles.

Pour décrire la méthode des équations des mailles, nous nous limitons aux circuits <u>planaires</u> c'est-à-dire aux circuits qui peuvent être dessinés sur un plan sans croisement entre les branches. Dans ce cas, le dessin du circuit définit un ensemble de mailles qui sont les fenêtres du plan.

A chaque maille, préalablement orientée, on associe un <u>courant de maille</u>. Chaque branche du circuit fait partie d'une seule ou de deux mailles, et donc chaque courant de branche peut s'exprimer en fonction d'un ou deux courants de mailles (c'est une conséquence de la loi des nœuds).

A chaque maille du circuit, on applique alors la loi des mailles de Kirchhoff, en exprimant les tensions de branches en fonction des courants de mailles au moyen des équations constitutives. On obtient ainsi un système d'équations dont les inconnues sont les courants de mailles. La résolution du système fournit donc les courants de mailles. Les autres grandeurs du circuit (courants de branches et tensions de branches) s'en déduisent alors. Nous reviendrons sur la méthode des équations des mailles lors de l'étude des circuits en régime sinusoïdal.

Exemple

Pour le circuit suivant:



on obtient un système de deux équations intégro-différentielles à deux inconnues : les courants de mailles i_1 et i_2 :

$$\begin{cases} R_1 i_1(t) + V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t [i_1(t) - i_2(t)] dt = e(t) \\ L \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) - V_0 - \frac{1}{C} \int_0^t [i_1(t) - i_2(t)] dt = 0 \end{cases} \qquad t \ge 0$$

avec la condition initiale : $i_2(0) = I_0$

En éliminant i_1 , on peut se ramener à une équation différentielle du second ordre en i_2 :

$$LC\frac{d^{2}i_{2}}{dt^{2}} + (R_{2}C + \frac{L}{R_{1}})\frac{di_{2}}{dt} + (1 + \frac{R_{2}}{R_{1}})i_{2} = \frac{e(t)}{R_{1}}$$

dont les conditions initiales sont :

$$i_2(0) = I_0$$
 $\frac{di_2}{dt}(0) = \frac{1}{L} (V_0 - R_2 I_0)$

Le but de cet exemple est d'illustrer la manière d'écrire les équations des mailles d'un circuit, et nous ne nous intéressons pas particulièrement à la solution de l'équation obtenue.

8.3.6 Régime sinusoïdal permanent

Nous considérons l'analyse des circuits constitués exclusivement <u>d'éléments linéaires et</u> <u>permanents</u> (les valeurs de R, C et L sont constantes) et de sources indépendantes. De tels circuits sont appelés circuits linéaires et permanents.

La mise en équation d'un circuit conduit à un système d'équation intégro-différentielles. Pour les circuits linéaires et permanents, il s'agit d'un système linéaire à coefficients constants.

La solution de ce système sera la somme de la solution générale du système homogène y_h (t) et d'une solution particulière y_p (t)

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$
 (8.58)

où y (t) est n'importe quel courant ou tension du circuit.

La solution du système homogène est de la forme

$$y_{h}(t) = \sum_{j=1}^{n} k_{j} e^{p_{j} t}$$
 (8.59)

où les p_j sont les racines du polynôme caractéristique (on a supposé que toutes les racines sont simples), et les constantes k_i sont déterminées à partir des conditions initiales.

Si le circuit est alimenté par une source de tension sinusoïdale, la solution particulière sera également sinusoïdale, à la même fréquence et la solution complète sera :

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} k_j e^{p_j t} + A \cos(\omega t + \alpha)$$
(8.60)

Si tous les p_i ont une partie réelle négative

Re
$$p_j < 0$$
 $j = 1,...,n$ (8.61)

la partie y_h (t) sera un terme transitoire

$$y_h(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$
 (8.62)

Et la solution de régime sera

$$y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} y_p(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$$
 (8.63)

La réponse $y_p(t)$ est donc la réponse en <u>régime sinusoïdale permanent</u>. <u>Elle ne dépend pas</u> <u>des conditions initiales</u>. Elle s'obtient le plus facilement par la méthode des phaseurs.

Un circuit linéaire et permanent qui vérifie la condition (8.61) est appelé un circuit <u>stable</u>. Un circuit composé de résistances, capacités et inductances, sera toujours stable.

Pour un circuit linéaire, la réponse de régime satisfait au théorème de superposition : lorsqu'un circuit contient plusieurs sources indépendantes, la réponse de régime (due à toutes les sources agissant simultanément) est égale à la somme des réponses de régime dues à chaque source individuellement.

Ceci est vrai pour n'importe quel courant ou tension du circuit.

8.4 Régime sinusoïdal - Phaseurs

8.4.1 Introduction

Les fonctions sinusoïdales sont particulièrement importantes en électricité. Citons par exemple :

- les tensions sinusoïdales sont utilisées pour la production et le transport de l'énergie électrique.

- les signaux de porteuses utilisées dans la plupart des systèmes de télécommunication sont des sinusoïdes.

On sait qu'un circuit, excité par une source sinusoïdale, fournit une réponse de régime, elle aussi sinusoïdale, de même fréquence, et indépendante des conditions initiales. C'est la seule réponse qui subsiste après un temps généralement assez court. C'est à cette solution de régime que nous nous intéressons ici.

L'intérêt et l'utilisation des fonctions sinusoïdales sont justifiés par plusieurs propriétés remarquables :

- L'addition de plusieurs fonctions sinusoïdales de même fréquence, mais d'amplitude et de phase quelconques, donne une fonction sinusoïdale de la même fréquence.
- Les opérations de dérivation et d'intégration ne changent pas l'aspect sinusoïdal d'une fonction, mais seulement son amplitude et sa phase. Par conséquent, la somme algébrique d'un nombre quelconque de sinusoïdes de même fréquence, et d'un nombre quelconque de leurs dérivées (d'ordre quelconque) donnera une sinusoïde de la même fréquence.

Exemple :
$$f(t) = 2\cos(2t+60^\circ) - 4\sin 2t + \frac{d}{dt} 2\sin 2t$$

peut s'écrire : $f(t) = 7.6 \cos(2t + 48.8^{\circ})$

- Il en résulte que lorsqu'un circuit linéaire et permanent est alimenté par une source sinusoïdale, tous les courants et tensions du circuit sont aussi (en régime) des fonctions sinusoïdales de même fréquence (la sinusoïde est une fonction propre de tout système linéaire et permanent).
- Enfin, la série de Fourier et l'intégrale de Fourier permettent d'exprimer une fonction quelconque comme une somme ou une intégrale pondérée de sinusoïdes. Le principe de superposition permet donc d'obtenir la réponse d'un circuit linéaire à une excitation

quelconque. C'est la base de l'analyse de Fourier (ou analyse fréquentielle) des signaux et des systèmes.

La recherche de la solution de régime d'un circuit par la méthode des coefficients indéterminés devient vite laborieuse, excepté pour des circuits très simples. L'utilisation de grandeurs complexes et de phaseurs permet d'obtenir les solutions de régime beaucoup plus facilement.

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

dont nous recherchons une solution particulière. Si nous remplaçons y(t) par une fonction sinusoïdale de pulsation ω , le membre de gauche sera aussi égal à une fonction sinusoïdale de pulsation ω . La question est de trouver l'amplitude et la phase de cette solution particulière. C'est le but de la méthode des phaseurs.

8.4.2 Représentation complexe des grandeurs sinusoïdales – Phaseurs

Dans un circuit en régime sinusoïdal, chaque courant et chaque tension sera caractérisée par une amplitude et une phase, mais ils auront tous la même fréquence. La notion du phaseur est bien adaptée à cette situation.

A la grandeur sinusoïdale

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha)$$
(8.64)

on associe le phaseur \underline{V}

$$\underline{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_{\mathrm{m}} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\alpha} \tag{8.65}$$

Le phaseur est donc une grandeur complexe qui contient les informations d'amplitude et de phase qui déterminent complètement la grandeur réelle v(t) si la pulsation ω est connue. Il n'y a donc pas de difficulté à passer de la fonction sinusoïdale réelle v(t) au phaseur associé V et inversément

$$v(t) = V_{m}\cos(\omega t + \alpha)$$

= Re(Ve^{j\overline{j}\overline{u}}) \qquad \vee \quad V = V_{m}e^{j\overline{j}\overline{u}} (8.66)}

Exemple :

v (t) =
$$220 \sqrt{2} \cos (2\pi 50t + \frac{\pi}{3})$$

V = $220 \sqrt{2} e^{j \pi/3}$
v (t) = Re (V $e^{j 2\pi 50t}$)

Propriétés :

1)
$$\operatorname{Re}\left[a_{1} z_{1}(t) + a_{2} z_{2}(t)\right] = a_{1} \operatorname{Re}\left[z_{1}(t)\right] + a_{2} \operatorname{Re}\left[z_{2}(t)\right]$$
 (8.67)

 z_1 et z_2 étant des fonctions à valeurs complexes de la variable réelle t, a_1 et a_2 étant des nombres réels.

2)
$$\operatorname{Re}(\underline{A} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\underline{B} e^{j\omega t}) \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A} = \underline{B}$$
 (8.68)

L'égalité des fonctions sinusoïdales temporelle implique l'égalité des phaseurs, et réciproquement.

3)
$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\underline{A} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}\frac{d}{dt}(\underline{A} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(j\omega \underline{A} e^{j\omega t})$$
 (8.69)

On peut donc permuter Re et d/dt, et la dérivation revient à multiplier le phaseur par j ω Soit une grandeur a (t) et son phaseur associé <u>A</u>:

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A} = A_m e^{j\alpha}$$

nction dérivée

La fonction dérivée

$$b(t) = \frac{d a(t)}{dt} = \omega A_m \cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})$$

aura pour phaseur

$$\underline{\mathbf{B}} = \omega \mathbf{A}_{\mathrm{m}} \mathbf{e}^{\mathbf{j}\,(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \mathbf{j}\,\omega \mathbf{A}_{\mathrm{m}} \mathbf{e}^{\mathbf{j}\,\alpha} = \mathbf{j}\,\omega \underline{\mathbf{A}}$$
(8.70)

Remarques

1) On pourrait aussi utiliser des sinus pour définir les phaseurs et on aurait alors $y(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha) \implies \text{phaseur } \underline{A} = A_m e^{j\alpha}$ $y(t) = I_m (\underline{A} e^{j\omega t})$

On s'en tiendra au cosinus et à la partie réelle.

2) La fonction complexe

$$\overline{v}(t) = \underline{V} e^{j \omega t} = V_m e^{j (\omega t + \alpha)}$$

donne une image dans le plan complexe qui est un point tournant autour de l'origine à la vitesse angulaire ω .

Chacune des deux projections, sur l'axe réel et sur l'axe imaginaire, fournit une grandeur sinusoïdale :

$$v(t) = \operatorname{Re}\left(\underline{V} e^{j\omega t}\right) = V_{m} \cos\left(\omega t + \alpha\right)$$
$$y(t) = I_{m}\left(\underline{V} e^{j\omega t}\right) = V_{m} \sin\left(\omega t + \alpha\right)$$



3) Les phaseurs sont utiles pour effectuer l'addition et la soustraction de fonctions sinusoïdales de la <u>même fréquence</u>

Considérons par exemple

 i_1 (t) = 10 cos (220t + 36,9°)

 $i_2(t) = 20 \cos(220t - 90^\circ)$

et cherchons $i_3 = i_1 + i_2$

Les phaseurs associés à i_1 et i_2 sont

$$\underline{I}_1 = 10 e^{j 36,9^\circ} = 8 + j 6$$
$$\underline{I}_2 = 20 e^{-j 90^\circ} = -j 20$$

Par les propriétés (8.67) et (8.68) on a

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 8 - j14 = 16.1 e^{-j60^\circ}$$

 $i_3(t) = 16.1 \cos(220t - 60^\circ)$

On utilise le plus souvent la forme polaire pour représenter les phaseurs. La forme rectangulaire (partie réelle et imaginaire) n'est nécessaire que pour l'addition ou la soustraction.

8.4.3 Application aux équations différentielles

Considérons l'équation de circuit suivante

$$a_{n} \frac{d^{n} y}{dt^{n}} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{1} \frac{dy}{dt} + a_{0} y = e(t)$$
(8.71)

où les coefficients a_i sont réels et constants. La fonction y(t) est une tension ou un courant du circuit. Nous recherchons une solution particulière

 $y(t) = B_m \cos(\omega t + \beta)$

lorsque l'excitation est sinusoïdale

 $e(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$

En introduisant les phaseurs

$$e(t) = \operatorname{Re} (\underline{A} e^{j\omega t}) \qquad \underline{A} = A_m e^{j\alpha}$$
$$y(t) = \operatorname{Re} (\underline{B} e^{j\omega t}) \qquad \underline{B} = B_m e^{j\beta}$$

l'équation s'écrit

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} \operatorname{Re}\left(\underline{B} e^{j\omega t}\right) + \ldots + a_0 \operatorname{Re}\left(\underline{B} e^{j\omega t}\right) = \operatorname{Re}\left(\underline{A} e^{j\omega t}\right)$$

En appliquant les propriétés (8.67) et (8.69) on a

$$\operatorname{Re}\left[\left(a_{n}\left(j\omega\right)^{n}+a_{n-1}\left(j\omega\right)^{n-1}+\ldots+a_{1}\left(j\omega\right)+a_{0}\right)\underline{B}\,e^{j\,\omega t}\right]=\operatorname{Re}\left(\underline{A}\,e^{j\,\omega t}\right)$$

et en appliquant (8.68)

$$\left[a_{n}\left(j\omega\right)^{n}+a_{n-1}\left(j\omega\right)^{n-1}+\ldots+a_{1}\left(j\omega\right)+a_{0}\right]\underline{B}=\underline{A}$$
(8.72)

On obtient donc le phaseur <u>B</u> qui représente la solution particulière que nous recherchons

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{\underline{\mathbf{A}}}{a_{n} (j \omega)^{n} + a_{n-1} (j \omega)^{n-1} + \dots + a_{1} (j \omega) + a_{0}}$$
(8.73)

En écrivant ce phaseur sous forme polaire $\underline{B} = B_m e^{j\beta}$, on aura l'expression de la solution particulière y (t) = $B_m \cos(\omega t + \beta)$.

Remarquons que l'équation (8.72) peut s'écrire directement à partir de l'équation différentielle de départ (8.71) et que (8.72) est une relation algébrique qui permet d'obtenir la valeur de \underline{B} .

Exemple 1 :

Reprenons le circuit RL, alimenté par une source sinusoïdale



$$L\frac{di}{dt} + R i = V_m \cos \omega t$$
(8.74)

Introduisons les phaseurs

$$V_{\rm m}\cos\omega t = \operatorname{Re}\left(\underline{V}\,e^{j\,\omega t}\right) \qquad \underline{V} = V_{\rm m} \,\,(\text{réel})$$

Le phaseur \underline{V} est réel car nous avons donné une phase nulle au signal d'excitation.

$$i(t) = \operatorname{Re}(\underline{I} e^{j\omega t})$$

Et on a

$$L \frac{d}{dt} \operatorname{Re} (\underline{I} e^{j \omega t}) + \operatorname{R} \operatorname{Re} (\underline{I} e^{j \omega t}) = \operatorname{Re} (\underline{V} e^{j \omega t})$$

$$\operatorname{Re} [(j \omega L \underline{I} + \operatorname{R} \underline{I}) e^{j \omega t}] = \operatorname{Re} (\underline{V} e^{j \omega t})$$

$$j \omega L \underline{I} + \operatorname{R} \underline{I} = \underline{V}$$
(8.75)

L'équation (8.75) entre les phaseurs peut s'écrire <u>directement</u> à partir de l'équation du circuit (8.74). C'est ce que nous ferons dorénavant.

A partir de (8.75) on a

$$\underline{\mathbf{I}} = \frac{\underline{\mathbf{V}}}{\mathbf{R} + \mathbf{j}\,\omega\,\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{V}_{\mathrm{m}}}{\mathbf{R} + \mathbf{j}\,\omega\,\mathbf{L}} = \mathbf{I}_{\mathrm{m}}\,\,\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\,\theta} \tag{8.76}$$

$$I_{m} = \frac{V_{m}}{\sqrt{R^{2} + \omega^{2} L^{2}}}$$

$$tg \theta = \omega L/R$$
(8.77)

et la solution <u>de régime</u> est donc :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \theta)$$

Le courant est en retard de θ sur la tension.

Exemple 2 :

On considère le circuit RLC alimenté par une source de tension sinusoïdale



L'équation différentielle du circuit est :

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt = e(t)$$
(8.78)

(la tension initiale de la capacité n'intervient pas pour la détermination de la solution de régime)

L'équation en phaseurs sera

$$j \omega L \underline{I} + R \underline{I} + \frac{1}{j \omega C} \underline{I} = \underline{E}$$

et le phaseur du courant est obtenu par

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$
(8.79)

Prenons les valeurs numériques suivantes

e (t) = 100 cos 25t (V)
E = 100 e^{j0} = 100
R = 25
$$\Omega$$
 L = 0,5 H C = 0,0025 F
On obtient alors pour I :
I = 100 = 100 = 100 = 100

$$I = \frac{1}{25 + j \, 25 \, .0,5 + \frac{1}{j \, 25 \, 0,0025}} = \frac{1}{25 + j \, 12,5 - j \, 16} = \frac{1}{25 - j \, 3,5} = \frac{1}{25,24 \, e^{-j \, 7,97^{\circ}}}$$

$$I = 3,96 \, e^{j \, 7,97^{\circ}}$$
(8.80)
et le courant de régime sera

 $i(t) = 3,96 \cos(25t + 7,97^{\circ})$ (A) (8.81)

Comme le phaseur contient la même information que la fonction temporelle (sauf la fréquence), il arrive souvent de laisser les résultats sous forme de phaseurs, sans écrire explicitement les fonctions temporelles.

Remarque :

Le développement que nous avons fait pour l'équation (8.71) se généralise à une équation différentielle de la forme :

$$a_{n} \frac{d^{n} y}{dt^{n}} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{0} y = b_{m} \frac{d^{m} x}{dt^{m}} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_{0} x \quad (8.82)$$

Si le signal x (t) est sinusoïdal

 $x(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}(\underline{A} e^{j\omega t})$

 $A = A_m e^{j\alpha}$

on obtiendra une solution particulière

 $y(t) = B_m \cos(\omega t + \beta) = \text{Re}(\underline{B}e^{j\omega t})$

$$\underline{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_{\mathrm{m}} \, \mathbf{e}^{\mathrm{J} \mathrm{P}}$$

et le phaseur \underline{B} s'obtiendra par :

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{b}_{m} (\mathbf{j}\,\omega)^{m} + \mathbf{b}_{m-1} (\mathbf{j}\,\omega)^{m-1} + \dots + \mathbf{b}_{1} (\mathbf{j}\,\omega) + \mathbf{b}_{0}}{\mathbf{a}_{n} (\mathbf{j}\,\omega)^{n} + \mathbf{a}_{n-1} (\mathbf{j}\,\omega)^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_{1} (\mathbf{j}\,\omega) + \mathbf{a}_{0}} \underline{\mathbf{A}}$$
(8.83)

8.4.4 Opérations sur les phaseurs

- La somme ou la différence de deux phaseurs est un phaseur qui s'obtient par les règles de calcul sur les nombres complexes. L'addition des phaseurs est généralement plus facile que celle des fonctions temporelles correspondantes. Rappelons que les opérations sur les phaseurs n'ont de sens que s'ils représentent des tensions ou courants à la même fréquence. Lorsqu'un circuit est excité par plusieurs sources de différentes fréquences, la superposition ne peut pas être faite avec les phaseurs mais avec les fonctions temporelles.
- Le quotient de deux phaseurs est une grandeur complexe (par exemple une impédance, un gain en tension). Ce n'est pas un phaseur, il ne représente pas une fonction sinusoïdale du temps.
- Le produit de deux phaseurs n'est pas un phaseur.
- La multiplication ou la division d'un phaseur par un nombre complexe donne un phaseur.

8.5 Circuits en régime sinusoïdal permanent

8.5.1 Notions d'impédance et admittance

Dans un circuit linéaire, permanent et stable en régime sinusoïdal permanent, chaque courant et tension du circuit peut-être représenté par son phaseur.

Nous commençons par établir la relation entre les phaseurs tension et courant pour les éléments de base : résistance, capacité et inductance.

8.5.1.1 Eléments de circuit

Résistance

La tension et le courant sont liés par v (t) = R i (t) En régime sinusoïdal, on a v (t) = V_m cos (ω t + α) = Re (<u>V</u> e^{j ω t}) i (t) = I_m cos (ω t + β) = Re (<u>I</u> e^{j ω t})

et donc

Re $(\underline{V} e^{j \omega t}) = R$ Re $(\underline{I} e^{j \omega t})$ et donc par (8.68)

$$\underline{V} = R \underline{I}$$

$$\begin{cases} V_m e^{j \alpha} = R I_m e^{j \beta} \\ V_m = R I_m \quad \alpha = \beta \end{cases}$$
(8.85)

La tension et le courant sont <u>en phase</u>. Les phaseurs <u>V</u> et <u>I</u> ont le même argument. La relation entre les phaseurs (8.85) est semblable à la relation temporelle (8.84).



(8.84)



<u>Capacité</u>

La tension et le courant d'une capacité sont liés par :

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

et en régime sinusoïdal on aura

$$v(t) = V_{m} \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}(\underline{V} e^{j\omega t})$$

$$i(t) = \omega C V_{m} \cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{Re}(\underline{I} e^{j\omega t})$$

$$\underline{V} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I}$$
(8.86)

Le courant est en avance d'un quart de période sur la tension. La tension et le courant d'une capacité sont en quadrature (deux grandeurs sinusoïdales sont dites en quadrature si leur déphasage est de $\pm 90^{\circ}$).



Inductance

La tension et le courant d'une inductance sont liés par

$$v = L \frac{di}{dt}$$

et en régime sinusoïdal on aura

$$v(t) = \omega L I_{m} \cos (\omega t + \beta + 90^{\circ}) = \text{Re} (\underline{V} e^{J \omega t})$$

$$i(t) = I_{m} \cos (\omega t + \beta) = \text{Re} (\underline{I} e^{j \omega t})$$

$$\underline{V} = j \omega L \underline{I}$$
(8.87)

Le courant et la tension sont également en quadrature, le courant étant en retard d'un quart de période sur la tension.



8.5.1.2 Impédance et admittance

De manière générale pour un dipôle, constitué par la connexion d'un nombre arbitraire d'éléments linéaires et permanents (à l'exclusion donc de sources indépendantes), le rapport entre les phaseurs tension et courant est l'<u>impédance</u> (ou impédance d'entrée) du dipôle :



L'impédance est le quotient de deux nombres complexes et c'est donc également un nombre complexe. L'impédance n'est pas un phaseur, elle ne représente pas une fonction sinusoïdale du temps.

L'unité de l'impédance est l'Ohm, et la relation (8.88) est une forme généralisée de la loi d'Ohm pour les circuits en régime sinusoïdal :

$$\underline{V} = Z \underline{I} \tag{8.89}$$

Le rapport inverse (phaseur courant divisé par phaseur tension) est l'admittance du dipôle.

$$Y(j\omega) = \frac{1}{\underline{V}}$$
(8.90)

et donc l'admittance est l'inverse de l'impédance

$$Y = \frac{1}{Z}$$
(8.91)

Exemple :

Dans l'exemple 2 du §8.4.3., le phaseur de la source est $100 e^{j0^{\circ}}$ et le phaseur courant est 3,96 $e^{j7,97^{\circ}}$. L'impédance du circuit est donc :

$$Z = \frac{100}{3,96 \,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\,7,97}} = 25,24 \,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\,7,97^\circ}$$

Comme tous les nombres complexes, l'impédance et l'admittance peuvent s'écrire en forme polaire ou en forme rectangulaire. Sous forme rectangulaire, on écrit

$$Z (j \omega) = R (\omega) + j X (\omega)$$

$$Y (j \omega) = G (\omega) + j B (\omega)$$
(8.92)
(8.93)

La partie réelle de l'impédance, R (ω) est appelée <u>résistance</u> (à ne pas confondre avec « l'élément » résistance), et la partie imaginaire X (ω) est la <u>réactance</u>.

La fonction G (ω) est la conductance et B (ω) est la susceptance. On a les relations

$$Z (j \omega) = |Z (\omega)| e^{j \theta_{z} (\omega)} = R (\omega) + j X (\omega)$$

$$|Z (\omega)| = \sqrt{R^{2} (\omega) + X^{2} (\omega)}$$

$$\theta_{z} (\omega) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{X (\omega)}{R (\omega)}$$

$$R (\omega) = |Z (\omega)| \cos \theta_{z} (\omega)$$

$$X (\omega) = |Z (\omega)| \sin \theta_{z} (\omega)$$

$$Y (j \omega) = G (\omega) + j B (\omega) = \frac{1}{Z (j \omega)} = \frac{1}{R (\omega) + j X (\omega)}$$
(8.94)

$$G(\omega) = \frac{R(\omega)}{R^{2}(\omega) + X^{2}(\omega)}$$

$$B(\omega) = -\frac{X(\omega)}{R^{2}(\omega) + X^{2}(\omega)}$$
(8.95)

Exemple

Pour l'exemple 2 du §8.4.3., l'impédance du circuit, sous forme symbolique est, d'après (8.79)

$$Z = \frac{\underline{E}}{\underline{I}} = \mathbf{R} + \mathbf{j} \left(\omega \, \mathbf{L} - \frac{1}{\omega \, \mathbf{C}} \right)$$

et donc l'admittance est

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = G + jB$$
$$G = \frac{R}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$
$$B = \frac{-(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

On voit que les fonctions R (ω) et G (ω) ne sont pas l'inverse l'une de l'autre. Dans le cas de l'exemple, G (ω) dépend de la fréquence tandis que R (ω) n'en dépend pas.

A partir des définitions de l'impédance et de l'admittance, on obtient les impédances et admittances des éléments idéaux R, L et C :

	Z (impédance)	Y (admittance)
Résistance R	R	$\frac{1}{R}$
Capacité C	<u>1</u> jωC	jωC
Inductance L	jωL	$\frac{1}{j \omega L}$

8.5.2 Lois de Kirchhoff

Dans un circuit en régime sinusoïdal permanent, les lois de Kirchhoff peuvent s'écrire directement en termes de phaseurs.

Considérons par exemple une équation de maille de la forme :

$$v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = 0$$

Comme chaque tension est une sinusoïde à la <u>même</u> pulsation ω , on a :

$$V_{m_1} \cos (\omega t + \alpha_1) + V_{m_2} \cos (\omega t + \alpha_2) + V_{m_3} \cos (\omega t + \alpha_3)$$

= Re ($\underline{V}_1 e^{j \omega t}$) + Re ($\underline{V}_2 e^{j \omega t}$) + Re ($\underline{V}_3 e^{j \omega t}$)
= Re (($\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3$) $e^{j \omega t}$) = 0

et donc, d'après (8.68) :

$$\underline{\mathbf{V}}_1 + \underline{\mathbf{V}}_2 + \underline{\mathbf{V}}_3 = \mathbf{0}$$

La somme algébrique des phaseurs associés aux tensions aux bornes des branches constituant une maille est nulle.

De la même manière la loi des nœuds peut s'écrire à partir des phaseurs courants.

8.5.3 Associations d'impédance

Dipôles équivalents

Deux dipôles sont dits équivalents s'ils sont caractérisés par la même relation entre leur courant i(t) et leur tension v(t). En régime sinusoïdal, deux dipôles seront donc équivalents s'ils ont la même impédance.

8.5.3.1 Association en série

Des impédances en série sont parcourues par le même courant. En appliquant la loi des mailles :



$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{V}}_1 + \underline{\mathbf{V}}_2 + \dots + \underline{\mathbf{V}}_N$$
$$= (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N) \underline{\mathbf{I}}$$

et donc

$$\underline{\mathbf{V}} = \mathbf{Z}_{\mathrm{T}} \, \underline{\mathbf{I}}$$

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{T}} = \mathbf{Z}_{1} + \mathbf{Z}_{2} + \dots + \mathbf{Z}_{\mathrm{N}}$$
(8.96)

L'impédance équivalente à la mise en série est la somme des impédances individuelles.

En particulier :

- pour deux résistances en série : • $R_{T} = R_{1} + R_{2}$
- pour deux inductances en série : • $L_{\rm T} = L_1 + L_2$
- pour deux capacités en série : •

$$C_{T} = \frac{C_{1} C_{2}}{C_{1} + C_{2}}$$
 $\frac{1}{C_{T}} = \frac{1}{C_{1}} + \frac{1}{C_{2}}$

8.5.3.2 Association en parallèle

Des éléments en parallèle sont soumis à la même différence de potentiel. En appliquant la loi des nœuds



$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2 + \dots + \underline{\mathbf{I}}_N$$
$$= (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \dots + \mathbf{Y}_N) \, \underline{\mathbf{V}}$$

et donc

$$\underline{I} = Y V$$

 $Y_T = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$
(8.97)

L'admittance totale équivalente à la mise en parallèle est la somme des admittances individuelles.

En particulier :

• pour deux résistances en parallèle :

$$R_{T} = \frac{R_{1} R_{2}}{R_{1} + R_{2}}$$
 $G_{T} = G_{1} + G_{2}$

pour deux inductances en parallèle :

$$L_{T} = \frac{L_{1} L_{2}}{L_{1} + L_{2}} \qquad \frac{1}{L_{T}} = \frac{1}{L_{1}} + \frac{1}{L_{2}}$$
pour deux capacités en parallèle :
$$C_{T} = C_{T} + C_{T}$$
(8.97b)

 $C_{T} = C_{1} + C_{2}$

L'application des associations en série et en parallèle permet souvent de simplifier la résolution des circuits, et dans certains cas, permet de résoudre complètement le circuit (c'est à dire d'obtenir tous les courants et toutes les tensions).

(8.96b)

Pour le réseau en échelle suivant



On vérifiera que l'impédance entre les bornes A et B est :

$$Z = Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{\frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5}}}}$$

8.5.4 Equations des mailles

Résoudre un circuit consiste à déterminer les courants et les tensions lorsqu'on a donné les valeurs des sources indépendantes.

Nous nous occupons ici de la solution de régime sinusoïdal permanent (et pas du transitoire). Le circuit peut comporter plusieurs sources indépendantes, mais toutes à la <u>même</u> fréquence. Les tensions et courants sont alors représentés par leurs phaseurs.

L'utilisation de la notion d'impédance va permettre de résoudre les circuits sans devoir écrire les équations différentielles.

Pour la résolution de petits circuits, on utilise souvent la <u>méthode des courants de branches</u>. On commence par définir un courant (au moyen d'une flèche) sur chaque branche du circuit. On écrit alors les équations des mailles, en gardant les courants comme inconnues. On essaye ensuite d'éliminer certains courants, en utilisant la loi des nœuds, pour aboutir à un système d'équations algébrique qu'il faut résoudre. Cette méthode est facile pour des petits circuits, mais ne convient pas pour des circuits de complexité moyenne ou grande car elle n'est pas systématique.

On décrira la méthode des équations des mailles qui est générale et systématique. (Il existe aussi la méthode des équations nodales que nous n'avons pas le temps d'aborder).

On considère un circuit planaire et les mailles qui sont déterminées par le dessin du circuit. A chaque maille on associe un courant (fictif) de maille. Chaque branche du circuit fait partie d'une seule ou de deux mailles, et donc chaque courant de branche peut s'exprimer en fonction d'un ou de deux courants de maille.

Par exemple, dans le cas suivant (Fig 20), les courants de branches $\underline{I}_1, \underline{I}_3$ et \underline{I}_4 sont liés aux courants de mailles $\underline{I}_{m_1}, \underline{I}_{m_2}, \underline{I}_{m_4}$ par

$$\begin{split} \underline{\mathbf{I}}_1 &= \underline{\mathbf{I}}_{m_1} \\ \underline{\mathbf{I}}_3 &= -\underline{\mathbf{I}}_{m_1} + \underline{\mathbf{I}}_{m_2} \\ \underline{\mathbf{I}}_4 &= -\underline{\mathbf{I}}_{m_1} - \underline{\mathbf{I}}_{m_4} \end{split}$$



On écrit alors la loi des mailles de Kirchhoff pour chaque maille du circuit, en ne gardant que les courants de mailles comme inconnues. Pour la maille 1 de la fig 20 :

$$(Z_1 + Z_2) \underline{I}_1 - Z_3 \underline{I}_3 - Z_4 \underline{I}_4 = \underline{E}_1 - \underline{E}_3$$

et en fonction des courants de mailles :

$$(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4) \underline{I}_{m_1} - Z_3 \underline{I}_{m_2} + Z_4 \underline{I}_{m_4} = \underline{E}_1 - \underline{E}_3$$
(8.98)

Sur la relation (8.98) on constate que :

- le coefficient de I_{m_1} est égal à la somme des impédances faisant partie de la maille 1 ;
- le coefficient de \underline{I}_{m_2} vaut $-Z_3$ car les courants de mailles \underline{I}_{m_1} et \underline{I}_{m_2} ont des sens opposés sur l'impédance commune Z_3 ;
- le coefficient de \underline{I}_{m_4} vaut + Z_4 car les courants de mailles \underline{I}_{m_1} et \underline{I}_{m_4} ont le même sens sur l'impédance commune Z_4 ;
- le second membre est la somme algébrique des sources de tension de la maille.

En appliquant la même procédure au circuit de la fig 21,

On obtiendra les équations

$$(Z_{1} + Z_{2} + Z_{3}) \underline{I}_{m_{1}} + Z_{2} \underline{I}_{m_{2}} - Z_{3} \underline{I}_{m_{3}} = \underline{E}_{1}$$

$$Z_{2} \underline{I}_{m_{1}} + (Z_{2} + Z_{4} + Z_{6}) \underline{I}_{m_{2}} + Z_{4} \underline{I}_{m_{3}} = -\underline{E}_{6}$$

$$-Z_{3} \underline{I}_{m_{1}} + Z_{4} \underline{I}_{m_{2}} + (Z_{3} + Z_{4} + Z_{5}) \underline{I}_{m_{3}} = \underline{E}_{5}$$
(8.99)





De manière générale, pour un circuit avec M mailles, on obtiendra un système de M équations à M inconnues (les courants de mailles), qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{m}} \mathbf{I}_{\mathbf{m}} = \mathbf{E}_{\mathbf{m}}$$
(8.100)

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} Z_{m_{11}} & Z_{m_{12}} & \dots & Z_{m_{1M}} \\ Z_{m_{21}} & Z_{m_{22}} & \dots & Z_{m_{2M}} \\ Z_{m_{M1}} & Z_{m_{M2}} & \dots & Z_{m_{MM}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I}_{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{m_1} \\ \underline{I}_{m_2} \\ \vdots \\ \underline{I}_{m_M} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}_{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \underline{E}_{m_1} \\ \underline{E}_{m_2} \\ \vdots \\ \underline{E}_{m_M} \end{bmatrix}$$

 \mathbf{Z}_m est la matrice des impédances de mailles, c'est une matrice symétrique

$$Z_{m_{ij}} = Z_{m_{ji}}$$
 (8.101)

 I_m est le vecteur des courants de mailles E_m est le vecteur des sources de tension de mailles

On a vu les propriétés suivantes :

- l'élément diagonal Z_{m_{ii}} est égal à la somme des impédances des branches de la maille i (toutes comptées positivement);
- l'élément non diagonal Z_{m_{ij}} est égal à la somme algébrique des impédances communes aux mailles i et j, comptées positivement lorsque les orientations des mailles concordent sur la branche et négativement dans le cas contraire ;

l'élément E_{mi} est égal à la somme algébrique des sources de tensions présentes dans la maille i.

La résolution du système des équations de mailles (8.100) fournit les courants de mailles. A partir de ceux-ci on peut obtenir les courants de branches du circuit, et si nécessaire les tensions des branches.

Reprenons l'exemple de la fig.21 en attribuant des valeurs aux éléments



Fig.22

$$\begin{array}{ll} e_1 \ (t) = 10 \ \cos \ (2t + 30^\circ) & \omega = 2 \ rad/s \\ e_5 = e_6 = 0 & & \\ Z_1 = 1 & Z_3 = 1 & Z_5 = 1/j \ 4 \\ Z_2 = j \ 4 & Z_4 = 1 & Z_6 = 2 \end{array}$$

Les équations de mailles sont

$$(2+j4) \underline{I}_{m_1} + j4 \underline{I}_{m_2} - \underline{I}_{m_3} = \underline{E}_1$$

$$j4 \underline{I}_{m_1} + (3+j4) \underline{I}_{m_2} + \underline{I}_{m_3} = 0$$

$$-\underline{I}_{m_1} + \underline{I}_{m_2} + (2+\frac{1}{j4}) \underline{I}_{m_3} = 0$$

La solution pour \underline{I}_{m_2} , par la règle de Cramer, est

$$\underline{I}_{m_{2}} = \frac{\begin{vmatrix} 2+j4 & \underline{E}_{1} & -1 \\ j4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2+\frac{1}{j4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j4 & j4 & -1 \\ j4 & 3+j4 & 1 \\ -1 & 1 & 2+\frac{1}{j4} \end{vmatrix}} = \frac{-2-j8}{12+j22,5} \underline{E}_{1}$$

avec $\underline{E}_1 = 10 e^{j \cdot 30^\circ}$, on obtient $\underline{I}_{m_2} = 3,23 e^{j \cdot 224^\circ}$ i_{m_2} (t) = 3,23 cos (2t + 224°)

Exemple : pont de Wheatstone

Le circuit suivant (fig 23) a pour but de mesurer une impédance inconnue Z_X .





Les éléments Z_1, Z_2 et Z_3 sont des composants dont la valeur est connue avec précision et dont certains sont réglables. L'équilibre du pont est obtenu lorsque le courant dans le détecteur (modélisé par sa résistance R_g) est nul.

Pour chercher la condition d'équilibre, écrivons les équations des mailles

$$\begin{bmatrix} R_{S} + Z_{1} + Z_{3} & -Z_{1} & -Z_{3} \\ -Z_{1} & Z_{1} + R_{g} + Z_{2} & -R_{g} \\ -Z_{3} & -R_{g} & Z_{3} + Z_{X} + R_{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m_{1}} \\ I_{m_{2}} \\ I_{m_{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{S} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le courant dans la résistance R_g (détecteur) est donné par :

$$\underline{\mathbf{I}}_{g} = \underline{\mathbf{I}}_{m_{2}} - \underline{\mathbf{I}}_{m_{3}} = \frac{\Delta_{12} - \Delta_{13}}{\Delta} \underline{\mathbf{V}}_{S}$$

$$(8.102)$$

où Δ est le déterminant de la matrice Z_m et $\Delta_{i \ j}$ le cofacteur de l'élément i j.

On peut vérifier, à partir de (8.102) que la condition à remplir par les différentes impédances pour avoir $\underline{I}_g = 0$ est :

$$Z_1 Z_X = Z_2 Z_3 \tag{8.103}$$

Pour mesurer une résistance inconnue RX, tous les éléments seront des résistances

 $Z_1 = R_1$ $Z_2 = R_2$ $Z_3 = R_3$ $Z_X = R_X$ et le pont pourra fonctionner en courant continu (V_S est une source de tension continue). La résistance R₃ sera un élément réglable, permettant d'obtenir l'équilibre du pont (I_g = 0) et on déterminera alors la résistance inconnue par (8.103)

$$R_X = \frac{R_2}{R_1} R_3$$
 (8.104)

Pour mesurer une capacité, on utilisera le schéma suivant



Fig 24

On souhaite mesurer la capacité C_X ainsi que sa résistance de perte R_X . En ajustant les éléments C_3 et R_3 , on annule le courant dans le détecteur. La condition d'équilibre (8.103) donne alors

$$Z_1 Y_3 = Z_2 Y_X \qquad \Rightarrow \qquad R_1 \left(\frac{1}{R_3} + j \omega C_3\right) = R_2 \left(\frac{1}{R_X} + j \omega C_X\right)$$

En égalant les parties réelle et imaginaire on obtient

$$C_{X} = C_{3} \frac{R_{1}}{R_{2}}$$

$$R_{X} = R_{3} \frac{R_{2}}{R_{1}}$$
(8.105)

8.6 Propriétés des circuits

8.6.1 Théorème de superposition

Pour un circuit linéaire contenant plusieurs sources indépendantes, la réponse de régime est égale à la somme des réponses de régime dues à chaque source agissant individuellement. Si toutes les sources ont la <u>même</u> fréquence, on peut résoudre le circuit, en utilisant les phaseurs et en considérant globalement toutes les sources (c'est généralement la méthode la plus efficace). Le théorème de superposition résulte alors de l'écriture de la solution du système (8.100) des équations des mailles

$$\underline{\mathbf{I}}_{\mathbf{m}_{k}} = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} \underline{\mathbf{E}}_{\mathbf{m}_{1}} + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} \underline{\mathbf{E}}_{\mathbf{m}_{2}} + \dots + \frac{\Delta_{Mk}}{\Delta} \underline{\mathbf{E}}_{\mathbf{m}_{M}}$$
(8.106)

où Δ est le déterminant de la matrice Z_m et Δ_{jk} un cofacteur. On fait alors agir chaque source individuellement et on additionne les phaseurs obtenus pour chaque courant et tension. Cela demande généralement plus d'effort que la résolution globale.

Par contre si les sources ont des fréquences différentes, l'application du théorème de superposition est <u>obligatoire</u>.

La notion de phaseur ne permet de traiter qu'une seule fréquence à la fois. On cherche donc la réponse de régime pour chaque source avec sa fréquence spécifique (en utilisant la méthode des phaseurs) et on effectue la <u>superposition des réponses temporelles</u>.

Pour faire agir une seule source, il faut annuler les autres sources, c'est à dire remplacer les sources de tension par un court-circuit.

Exemple 1 :

Considérons le circuit suivant avec deux sources :

- une source alternative $e(t) = 2 \cos(5000t)$
- une source continue de 3V



Fig 25

On s'intéresse à la tension de sortie v(t).

Lorsque la source continue agit seule, on trouve v = 2V.

Lorsque la source alternative agit seule, on trouve $\underline{V} = 0.16 e^{j 85.6^{\circ}}$.

La solution est donc

$$v(t) = 2 + 0.16 \cos(5000t + 85.6^{\circ})$$

Exemple 2 :

Considérons le circuit suivant





avec le signal d'entrée

 $v_{S}(t) = 50 + 50 \cos 1000t + 50 \cos 3000t$

On s'intéresse à la tension de sortie $v_0(t)$.

Effectuons l'analyse du circuit pour une pulsation ω quelconque :

$$\underline{\mathbf{V}}_0 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \, \underline{\mathbf{V}}_{\mathbf{S}}$$

avec

$$Z_2 = \frac{R}{1 + j \,\omega \, R \, C} \qquad \qquad Z_1 = j \,\omega \, L$$

Le rapport entre le phaseur \underline{V}_0 du signal de sortie et le phaseur \underline{V}_S du signal d'entrée est une grandeur complexe appelée <u>réponse en fréquence</u>. L'impédance et l'admittance sont des cas particuliers de réponse en fréquence.

On obtient pour la réponse en fréquence :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{V}_0}{\underline{V}_S} = \frac{R}{R(1-\omega^2 L C) + j\omega L}$$
(8.107)

Considérons maintenant successivement les trois composantes du signal d'entrée :

Continu (
$$\omega = 0$$
): H (j 0) = 1
 $v_0 = v_S = 50 V$
 $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ H (j 1000) = 0,632 e^{-j162°}
 $\underline{V}_0 = H (j1000) 50 e^{j0} = 31,6 e^{-j162°}$
 $v_0 (t) = 31,6 \cos (1000t - 162°)$
 $\omega = 3000 \text{ rad/s}$ H (j 3000) = 0,0464 e^{-j176°}
 $v_0 (t) = 2,32 \cos (3000t - 176°)$

La tension de sortie est donc, par superposition

$$w_0(t) = 50 + 31.6 \cos(1000t - 162^\circ) + 2.32 \cos(3000t - 176^\circ)$$
 (8.108)

On voit que les différentes composantes du signal d'entrée sont d'autant plus atténuées que leur fréquence est élevée. Le circuit se comporte comme un filtre passe-bas, car le module de sa réponse en fréquence est décroissant lorsque ω augmente.

L'expression (8.108) est la <u>solution de régime</u> du circuit. Elle n'est pas sinusoïdale car la somme de plusieurs sinusoïdes de fréquences différentes n'est pas une sinusoïde.

8.6.2 Théorème de Thévenin

8.6.2.1 Un nouvel élément : la source de courant

Une <u>source de courant indépendante</u> est un dipôle qui maintient un courant connu $i_{S}(t)$, quelle que soit la tension apparaissant à ses bornes. Le symbole est le suivant où la flèche indique le sens conventionnel du courant :



Remarquons que cela n'a pas de sens de représenter une source de courant isolée, elle doit nécessairement être reliée à un circuit extérieur pour pouvoir délivrer son courant.

Pour un temps t fixé, une source de courant indépendante a la caractéristique suivante :



qui est celle d'une résistance non linéaire et non permanente (si i_S varie avec t) contrôlée en tension. Le circuit ouvert peut être considéré comme une source de courant identiquement nul.

8.6.2.2 Théorème de Thévenin et de Norton

Le théorème de Thévenin est particulièrement important en analyse des circuits. Il présente un grand intérêt à la fois pour la résolution et la compréhension des circuits.

Le théorème de Thévenin exprime que tout réseau linéaire et permanent est équivalent à une source de tension unique V_{th} en série avec une impédance Z_{th} .

Considérons la configuration suivante où les réseaux A et B peuvent être de complexité arbitraire :



Fig 26

Tant qu'on ne s'intéresse qu'aux courants et tensions dans le réseau B, on peut remplacer le réseau A par son équivalent de Thévenin :



Fig 27

On voit donc que ce théorème est d'une grande importance pratique car il permet de remplacer un circuit éventuellement très complexe par un schéma équivalent très simple. Bien entendu les courants et tensions à l'intérieur du circuit A ne seront plus accessibles, mais les courants et tensions à l'intérieur du réseau B resteront inchangés.

Les hypothèses sont les suivantes pour pouvoir appliquer le théorème de Thévenin :

- Le circuit A est linéaire et permanent, il contient des sources indépendantes qui sont toutes à la même fréquence.
- Aucune restriction n'est faite concernant le circuit B qui peut contenir des sources, des éléments non linéaires, etc. Cependant, pour utiliser les phaseurs dans la démonstration, nous supposerons que le circuit B est également linéaire et permanent. Une démonstration plus générale se base sur la transformée de Laplace.
- Il n'y a pas de couplage (par mutuelle) entre les réseaux A et B.

Les paramètres V_{th} et Z_{th} de l'équivalent de Thévenin sont obtenus de la manière suivante :

• V_{th} est la <u>tension à vide</u> entre les bornes a et b du réseau A (lorsque le réseau B est déconnecté)



Fig 28

 Z_{th} est l'impédance vue des bornes a et b du réseau A dont les sources indépendantes ont été annulées, et en ayant déconnecté le réseau B :





L'annulation des sources indépendantes signifie que les sources de tension sont remplacées par des court-circuits et les sources de courant par des circuits ouverts. L'impédance vue des bornes a et b se détermine alors soit simplement en appliquant les règles de combinaison d'impédances en série ou en parallèle, soit, pour les réseaux plus compliqués, en plaçant une source de tension E_S et en calculant I_S pour obtenir $Z_{th} = E_S / I_S$.

Le <u>théorème de Norton</u> est le dual de celui de Thévenin. Il exprime que tout réseau linéaire et permanent est équivalent à une source de courant I_N en parallèle avec une impédance Z_N :



L'impédance Z_N s'obtient exactement de la même manière que Z_{th} et donc $Z_N = Z_{th}$ Le courant I_N est le courant de court-circuit entre les bornes a et b du réseau A (lorsque le réseau B est remplacé par un court-circuit) :



Les équivalents de Thévenin et de Norton doivent bien sûr être équivalents entre eux, ce qui implique que :

$$V_{th} = Z_{th} I_N \tag{8.109}$$

8.6.2.3 Exemples d'application du théorème de Thévenin

Exemple 1

Cherchons l'équivalent de Thévenin du circuit suivant, par rapport aux bornes a et b.



Fig 30

$\underline{\mathbf{E}} = 10$	$\omega = 10 \text{ rad/s}$	
L = 0,5 H	$C_1 = 0,02 \text{ F}$	$C_2 = 0.05 F$
$R_1 = 5 \Omega$	$R_2 = 2 \Omega$	

L'impédance de Thévenin est obtenue en court-circuitant la source et en cherchant l'impédance entre les bornes a et b.

$$Z_{\text{th}} = R_2 + \frac{1}{j \omega C_2} + \frac{\frac{1}{j \omega C_1} (R_1 + j \omega L)}{\frac{1}{j \omega C_1} + R_1 + j \omega L}$$

= 7 - j7 = 9,9 e^{-j45°} (Ω)

Pour la tension à vide :

$$\underline{V}_{th} = \underline{E} \frac{R_1 + j\omega L}{R_1 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1}} = 14,14 e^{j45^{\circ}} \quad (V)$$

Le circuit équivalent de Thévenin est donc



et le courant dans l'impédance Z_L est

$$\underline{I}_{L} = \frac{\underline{V}_{th}}{Z_{th} + Z_{L}}$$

si $Z_L = 3 + j7 \quad (\Omega)$, on obtient $\underline{I}_L = 1,414 e^{j45^\circ} A$

Exemple 2

Pour le pont de Wheatstone (fig.23), cherchons l'équivalent de Thévenin par rapport aux bornes a et b.



La tension à vide s'obtient par :

$$\underline{\mathbf{V}}_{\text{th}} = \underline{\mathbf{V}}_{a} - \underline{\mathbf{V}}_{b} = \underline{\mathbf{E}} \frac{Z_{3}}{Z_{1} + Z_{3}} - \underline{\mathbf{E}} \frac{Z_{X}}{Z_{2} + Z_{X}}$$
$$= \underline{\mathbf{E}} \frac{Z_{2} Z_{3} - Z_{1} Z_{X}}{(Z_{1} + Z_{3}) (Z_{2} + Z_{X})}$$

Pour l'impédance de Thévenin, en court-circuitant la source E, on obtient



et donc

$$Z_{\text{th}} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} + \frac{Z_2 Z_X}{Z_2 + Z_X}$$

Si on connecte une résistance R_g entre les bornes a et b, le courant dans R_g sera

$$\underline{I}_{g} = \frac{\underline{V}_{th}}{Z_{th} + R_{g}}$$

et on retrouve bien la condition d'équilibre vue en (8.103)

8.6.2.4 Sources réelles

Nous avons défini les sources de tension et de courant idéales. Une source de tension réelle ne peut maintenir à ses bornes une tension constante lorsqu'elle fournit un courant, et sera donc modélisée par le schéma équivalent suivant :



où R_S est la résistance interne de la source.

De même une source de courant réelle sera modélisée par le schéma équivalent :



où la résistance interne R_S est en parallèle sur la source de courant idéale.

On voit donc que les modèles de sources réelles sont identiques aux circuits équivalents de Thévenin et de Norton. On peut donc convertir une source de tension réelle en source de courant réelle en utilisant la relation entre les circuits équivalents de Thévenin et de Norton.

8.6.2.5 Démonstration du théorème de Thévenin

Il faut démontrer que le circuit équivalent de Thévenin a les mêmes courant et tension à son accès que le réseau A, et cela indépendamment des caractéristiques du réseau B. Donc que I et V sont identiques sur les fig 26 et 27.

Dans le circuit de la fig 26, remplaçons le réseau B par une source de courant indépendante qui a précisément la même valeur que le courant I.



Fig 31

L'ensemble des courants et tensions du réseau A resteront inchangées, et en particulier la tension \underline{V} aux bornes a-b restera la même (cette propriété des circuits est appelée le théorème de substitution).

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{V}}_{\infty} + \underline{\mathbf{V}}_{1} \tag{8.110}$$

où

• \underline{V}_{∞} est la tension produite par les sources indépendantes qui se trouvent à l'intérieur du réseau A, lorsque la source <u>I</u> est annulée. Pour annuler la source de courant <u>I</u>, il faut l'ouvrir, et \underline{V}_{∞} est donc la tension à vide, identique à \underline{V}_{th} de la fig 28

$$\underline{\mathbf{V}}_{\infty} = \underline{\mathbf{V}}_{th}$$

• \underline{V}_1 est la tension produite lorsque la source de courant \underline{I} agit seule. Les sources indépendantes à l'intérieur du réseau A sont alors annulées, ce qui est la situation de la fig 29, et on a donc (en tenant compte des polarités utilisées sur la fig 31 :

$$\underline{\mathbf{V}}_1 = -\mathbf{Z}_{\text{th}} \underline{\mathbf{I}}$$

L'expression (8.110) devient alors :

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{V}}_{\mathrm{th}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{th}} \ \underline{\mathbf{I}}$$

ce qui est précisément l'équation du circuit équivalent de Thévenin de la fig 27.

8.6.3 Théorème de réciprocité

Le théorème de réciprocité s'applique à des circuits qui ne contiennent que des résistances, capacités, inductances et inductances mutuelle. Il n'y a donc pas de sources indépendantes dans le réseau R ci-dessous.

Le théorème de réciprocité exprime alors que le courant dans une branche k dû à l'action d'une source de tension placée dans la branche p est égal au courant qui circulerait dans cette branche p si la même source était insérée dans la branche k.

Considérons la configuration suivante



On choisira les mailles du circuit de manière à ce que la branche p soit uniquement dans la maille 1 et la branche k uniquement dans la maille 2.

En écrivant la solution du système des équations des mailles (8.100) sous la forme (8.106), on aura pour le circuit de gauche :

$$\underline{\mathbf{I}}_{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{I}}_{\mathbf{m}_2} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \underline{\mathbf{E}}_{\mathbf{p}}$$
$$\underline{\mathbf{I}}_{p} = \underline{\mathbf{I}}_{m_{1}} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \underline{\mathbf{E}}_{k}$$

où Δ est le déterminant de la matrice Z_m et Δ_{jk} un cofacteur. Comme la matrice Z_m des impédances de mailles est symétrique, $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ et donc

$$\underline{I}_k = \underline{I}_p$$
 si $\underline{E}_p = \underline{E}_k$ (8.111)

8.7 Inductance mutuelle (ou transformateur)

8.7.1 Equations de l'inductance mutuelle

Si deux spires, ou deux bobines sont situées l'une par rapport à l'autre de façon à ce que le flux magnétique de l'une traverse partiellement l'autre, toute variation du courant dans la première spire produira une variation du flux qui traverse la seconde spire, ce qui fera apparaître dans cette dernière une force électromotrice induite (§7.5.)

Dans le cas <u>linéaire</u>, le flux coupé par chaque circuit s'exprime par (7.50)

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\Phi_2 = M i_1 + L_2 i_2$$
(8.112)

où M est le coefficient d'inductance mutuelle tandis que L_1 et L_2 sont les inductances propres de chaque élément de circuit.

L'inductance mutuelle dépend du nombre de spires de chaque bobine, de leurs dimensions, de leur position réciproque et de la perméabilité du milieu qui les entoure. Pour un milieu magnétique linéaire et pour une position réciproque fixe des bobines, l'inductance mutuelle M est constante (de même que les inductances propres L_1 et L_2) et ne dépend pas des valeurs des courants qui traversent les bobines.

Comme pour l'inductance isolée (§8.2.4.) on adoptera les <u>références associées</u> pour les tensions et les courants, et on représentera deux bobines couplées par inductance mutuelle par le symbole suivant :



qui correspond aux relations entre les tensions et les courants

$$v_{1}(t) = L_{1} \frac{di_{1}}{dt} + M \frac{di_{2}}{dt}$$

$$v_{2}(t) = M \frac{di_{1}}{dt} + L_{2} \frac{di_{2}}{dt}$$
(8.113)

8.7.2 Signe de la mutuelle

Les coefficients d'inductance propre L_1 et L_2 sont toujours positifs, mais la valeur de la mutuelle M peut être positive ou négative selon que les flux créés respectivement par i_1 et i_2 sont de même sens ou de sens contraire. Le signe de la mutuelle dépend donc à la fois de la manière dont les bobinages sont disposés dans l'espace et du sens de circulation adopté pour les courants. Dans les schémas de circuits, il ne serait pas pratique de faire apparaître explicitement la manière dont sont réalisés les bobinages.

On représente le signe de la mutuelle au moyen de deux points sur le symbole de la fig.32. La mutuelle est positive lorsque les sens conventionnels des courants sont choisis entrant par les bornes marquées d'un point. Les termes d'inductance mutuelle et d'inductance propre ont alors le même signe pour chaque bobine.

Par exemple, pour la configuration suivante



lorsque les courants i_1 et i_2 entrent par les bornes A et D, ils produisent des flux concordants. On marquera donc les bornes A et D par un point sur le schéma du circuit, et il ne sera alors plus nécessaire de faire apparaître le sens des bobinages.

Prenons quelques exemples pour illustrer la notation. Pour les courants et tensions de la fig.32 et de la fig.34, on aura les équations (8.113)



Fig. 34



Pour la fig.35, on aura :

$$v_{1}(t) = L_{1} \frac{di_{1}}{dt} - M \frac{di_{2}}{dt}$$

$$v_{2}(t) = -M \frac{di_{1}}{dt} + L_{2} \frac{di_{2}}{dt}$$
(8.114)

Pour la fig. 36, où on n'utilise pas les références associées pour l'accès 1, on aura :

$$v_{1}(t) = -L_{1} \frac{di_{1}}{dt} - M \frac{di_{2}}{dt}$$

$$v_{2}(t) = M \frac{di_{1}}{dt} + L_{2} \frac{di_{2}}{dt}$$
(8.115)

8.7.3 Association d'inductances couplées

8.7.3.1 Association en série

On considère la mise en série de deux inductances couplées par mutuelle



Fig. 37

 $\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \\ v_2 = M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \end{cases}$

et donc

$$v = v_1 + v_2 = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}$$

L'inductance équivalente à la mise en série est

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M \tag{8.116}$$

Tandis que pour la connexion de la fig.38

213





on aura

$$L'_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$$

(8.117)

La mesure de L_{eq} et L'_{eq} permettrait de déterminer M.

En l'absence de mutuelle, on retrouve (8.96b) :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$$

8.7.3.2 Association en parallèle



Fig. 39

$$v = v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$
$$v = v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

On en déduit que

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{L_1 - M}{L_2 - M} \frac{di_1}{dt}$$
$$\frac{d}{dt} (i_1 + i_2) = (1 + \frac{L_1 - M}{L_2 - M}) \frac{di_1}{dt}$$
$$i = i_1 + i_2$$
$$v = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

avec

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

En inversant le sens de L_2 , on aura

$$L_{eq}' = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

Pour M = 0, on retrouve l'expression (8.97b).

(8.118)

8.7.4 Energie

La puissance instantanée absorbée par une inductance mutuelle est

 $p(t) = v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t)$ (avec les références associées). L'énergie absorbée est, en utilisant (8.113) $w(t) = \int_{-t}^{t} (v_1 i_1 + v_2 i_2) dt$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} (v_1 i_1 + v_2 i_2) dt$$

= $\int_{-\infty}^{t} \left[L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M (i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt}) + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \right] dt$
= $\frac{1}{2} L_1 i_1^2 (t) + M i_1 (t) i_2 (t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 (t)$ (8.119)

avec $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, $L_1 L_2 > M^2$. Comme obtenu en (7.52).

8.7.5 Analyse en transitoire

Considérons le circuit suivant





Le secondaire est ouvert, et donc $i_2 = 0$

$$E = R i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}$$
$$i_1 (t) = A e^{-(R/L_1) t} + \frac{E}{R}$$

Le courant doit rester continu dans une inductance, et donc $i_1(0) = 0$ et A = -E/R

$$\dot{a}_1(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-(R/L_1)t})$$

La tension secondaire sera

$$v_2(t) = -M \frac{di_1}{dt} = -E \frac{M}{L_1} e^{-(R/L_1)t}$$

8.7.6 Analyse en régime sinusoïdal

En régime sinusoïdal permanent, les équations (8.113) de la mutuelle (linéaire et permanente) deviennent

$$\underline{\mathbf{V}}_{1} = \mathbf{j} \boldsymbol{\omega} \mathbf{L}_{1} \, \underline{\mathbf{I}}_{1} + \mathbf{j} \boldsymbol{\omega} \, \mathbf{M} \, \underline{\mathbf{I}}_{2}$$

$$\mathbf{V}_{2} = \mathbf{j} \boldsymbol{\omega} \, \mathbf{M} \, \underline{\mathbf{I}}_{1} + \mathbf{j} \boldsymbol{\omega} \, \mathbf{L}_{2} \, \underline{\mathbf{I}}_{2}$$
(8.120)

et on peut utiliser la méthode générale de résolution en phaseurs.

Les théorèmes de superposition, de Thévenin et de réciprocité restent valables en présence d'inductances mutuelles. Par contre la méthode de construction de la matrice $\mathbf{Z}_{\mathbf{m}}$ (§8.5.4.) ne s'applique plus aussi simplement.

Considérons le circuit suivant





Les équations des deux mailles sont

$$\underline{\mathbf{V}}_{\mathbf{S}} = \mathbf{Z}_{\mathbf{S}} \, \underline{\mathbf{I}}_{1} + \mathbf{j} \, \boldsymbol{\omega} \, \mathbf{L}_{1} \, \underline{\mathbf{I}}_{1} + \mathbf{j} \, \boldsymbol{\omega} \, \mathbf{M} \, \underline{\mathbf{I}}_{2}$$

$$0 = \mathbf{j} \, \boldsymbol{\omega} \, \mathbf{M} \, \underline{\mathbf{I}}_{1} + \mathbf{j} \, \boldsymbol{\omega} \, \mathbf{L}_{2} \, \underline{\mathbf{I}}_{2} + \mathbf{Z}_{2} \, \underline{\mathbf{I}}_{2}$$
(8.121)

On s'intéresse aux tensions \underline{V}_1 et \underline{V}_2 aux bornes de la mutuelle

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{j} \,\omega \,\mathbf{L}_1 \,\,\underline{\mathbf{I}}_1 + \mathbf{j} \,\omega \,\mathbf{M} \,\,\underline{\mathbf{I}}_2 \\ \underline{\mathbf{V}}_2 = \mathbf{j} \,\omega \,\mathbf{M} \,\,\underline{\mathbf{I}}_1 + \mathbf{j} \,\omega \,\mathbf{L}_2 \,\,\underline{\mathbf{I}}_2 = -\mathbf{Z}_2 \,\,\underline{\mathbf{I}}_2 \end{cases} \tag{8.122}$$

A partir de (8.122) on obtient

$$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{j \omega M Z_2}{j \omega L_1 (Z_2 + j \omega L_2) + \omega^2 M^2}$$

$$\underbrace{I_2}_{I_2} - j \omega M$$
(8.123)

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-j \,\omega \,M}{Z_2 + j \,\omega \,L_2} \tag{8.124}$$

Le primaire et le secondaire de la mutuelle sont couplés magnétiquement mais il n'y a pas de contact entre les deux parties, qui sont isolées l'une de l'autre. L'origine des potentiels peut être choisie indépendamment pour chacune des parties (par exemple au moyen d'une mise à la terre).

L'impédance vue au primaire de la mutuelle est :

$$Z_{1} = \frac{V_{1}}{I_{1}} = j \omega L_{1} + \frac{\omega^{2} M^{2}}{Z_{2} + j \omega L_{2}}$$
(8.125)

Le premier terme $j \omega L_1$ dépend de l'inductance propre du primaire. Le second terme dépend du couplage et est <u>l'impédance réfléchie</u> Z_r :

$$Z_{\rm r} = \frac{\omega^2 \,{\rm M}^2}{Z_2 + j\,\omega\,L_2} \tag{8.126}$$

L'impédance réfléchie varie inversement avec l'impédance totale du secondaire, et elle est indépendante du signe de la mutuelle

Pour écrire les équations des mailles d'un circuit avec une mutuelle, il est souvent plus prudent de passer par l'intermédiaire des courants de branches pour identifier la contribution de la mutuelle. Considérons par exemple le circuit suivant avec les courants de mailles \underline{I}_1 et





Les tensions \underline{V}_1 et \underline{V}_2 aux bornes de L_1 et L_2 sont

 $\underline{V}_1 = j \omega L_1 \underline{I}_3 - j \omega M \underline{I}_2$ $\underline{V}_2 = j \omega L_2 \underline{I}_2 - j \omega M \underline{I}_3$ Les équations des mailles sont

$$\underline{\mathbf{V}}_{\mathbf{S}} = \mathbf{R}_1 \, \underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{V}}_1$$
$$\mathbf{0} = \mathbf{R}_2 \, \underline{\mathbf{I}}_2 + \underline{\mathbf{V}}_2 - \underline{\mathbf{V}}_2$$

 \underline{I}_2 .

 $0 = R_2 \ \underline{I}_2 + \underline{V}_2 - \underline{V}_1$ et en remplaçant \underline{I}_3 par $\underline{I}_1 - \underline{I}_2$ on obtient le système

$$\begin{cases} (\mathbf{R}_{1} + j \omega \mathbf{L}_{1}) \, \underline{\mathbf{I}}_{1} - j \omega \left(\mathbf{L}_{1} + \mathbf{M}\right) \, \underline{\mathbf{I}}_{2} = \underline{\mathbf{V}}_{S} \\ -j \omega \left(\mathbf{L}_{1} + \mathbf{M}\right) \, \underline{\mathbf{I}}_{1} + \left(\mathbf{R}_{2} + j \omega \left(\mathbf{L}_{2} + \mathbf{L}_{1} + 2\mathbf{M}\right)\right) \, \underline{\mathbf{I}}_{2} = 0 \end{cases}$$
(8.127)

La matrice $\mathbf{Z}_{\mathbf{m}}$ est toujours symétrique, mais il aurait été difficile de la construire directement par inspection du circuit.

8.7.7 Transformateur idéal

Un système de bobines couplées (souvent enroulées sur un noyau) est communément appelé transformateur. L'application essentielle des circuits couplés est en effet de transformer une tension (ou un courant) d'une certaine valeur en une tension (ou courant) d'une autre valeur.

Considérons un circuit magnétique avec deux enroulements de N_1 et N_2 spires. On suppose (comme au §6.7.) que le flux magnétique Φ suit la forme du circuit magnétique et qu'il n'y a donc aucune dispersion.



Fig. 43

L'équation du circuit magnétique est (6.48)

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = \oint \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \Re \Phi$$
(8.128)

où \Re est la réluctance du circuit magnétique. Le flux total coupé par chaque enroulement est :

$$\Phi_{1} = N_{1} \Phi = \frac{N_{1}^{2}}{\Re} i_{1} + \frac{N_{1} N_{2}}{\Re} i_{2}$$

$$\Phi_{2} = N_{2} \Phi = \frac{N_{1} N_{2}}{\Re} i_{1} + \frac{N_{2}^{2}}{\Re} i_{2}$$
(8.129)

Les coefficients d'inductance propre et mutuelle sont donc, d'après (8.112) :

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\Re}$$
 $L_2 = \frac{N_2^2}{\Re}$ $M = \frac{N_1 N_2}{\Re}$ (8.130)

Le couplage est donc parfait :

$$M^2 = L_1 L_2$$
(8.131)

puisque nous avons négligé le flux de dispersion. On obtient pour les tensions :

$$v_{1} = N_{1} \frac{d\Phi}{dt} \qquad v_{2} = N_{2} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{v_{2}}{v_{1}} = \sqrt{\frac{L_{2}}{L_{1}}} = \frac{N_{2}}{N_{1}} \qquad (8.132)$$

Le rapport des tensions est égal au rapport du nombre de spires. On obtiendra le même résultat en utilisant la condition (8.131) du couplage parfait dans (8.123).

Pour le modèle du transformateur idéal, on suppose de plus que la perméabilité μ du circuit magnétique est infinie, et donc que la réluctance est nulle :

$$\mu \to \infty \qquad \Re \to 0 \tag{8.133}$$

Dans ce cas, à partir de (8.128) on a

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} \tag{8.134}$$

La condition (8.133) revient à considérer que les inductances L_1 et L_2 tendent vers l'infini en gardant un rapport constant. On obtiendra alors le même résultat à partir de (8.124).

On obtient ainsi le modèle du transformateur idéal, qui est représenté par le symbole





et les relations

$$v_1 = n v_2$$

 $i_2 = -n i_1$
(8.135)

où n est le rapport de transformation.

Il s'agit d'un modèle très idéalisé (comme son nom l'indique) du transformateur. En particulier aucun transformateur réel ne pourra fonctionner en courant continu comme les équations (8.135) pourraient le laisser croire.

Si on branche une impédance Z_L au secondaire du transformateur idéal (fig.43), l'impédance (réfléchie) vue au primaire sera :

$$Z_{1} = \frac{V_{1}}{I_{1}} = -n^{2} \frac{V_{2}}{I_{2}} = n^{2} Z_{L}$$
(8.136)

Cette propriété de « transformation d'impédance » du transformateur est utilisée pour réaliser une adaptation d'impédance entre une source et une charge afin d'obtenir le transfert maximal de puissance.

La puissance absorbée par le transformateur idéal

$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0$$
(8.137)

est toujours nulle. C'est un élément sans perte qui transmet intégralement la puissance.

8.7.8 Transformateur réel

Un transformateur réel s'écartera évidemment de ce comportement idéalisé. Les enroulements présenteront une résistance et donc des pertes par effet Joule. Il y aura une certaine dispersion du flux et le couplage ne sera donc pas parfait. Les pertes par hystérésis et par courants de Foucault produisent un échauffement du noyau. D'autre part, la nature non linéaire des noyaux ferromagnétiques rend l'analyse beaucoup plus compliquée.

Pertes par hystérésis

L'état magnétique du noyau ferromagnétique d'un transformateur (en courant alternatif) va décrire un cycle d'hystérésis dont la surface correspond à une énergie dissipée sous forme de chaleur.

Reprenons la puissance absorbée par le transformateur

 $p = v_1 i_1 + v_2 i_2$

en tenant compte de la non linéarité du matériau. Les tensions sont données par la dérivée du flux

$$v_1 = N_1 \frac{d \Phi}{dt} = N_1 S \frac{d B}{dt}$$
$$v_2 = N_2 \frac{d \Phi}{dt} = N_2 S \frac{d B}{dt}$$

où S est la section (supposée constante) du circuit magnétique et B le champ magnétique (supposé uniforme)

$$\mathbf{p} = (\mathbf{N}_1 \ \mathbf{i}_1 + \mathbf{N}_2 \ \mathbf{i}_2) \ \mathbf{S} \ \frac{\mathbf{d} \ \mathbf{B}}{\mathbf{dt}}$$

et avec (8.128)

 $N_1 i_1 + N_2 i_2 = \oint \vec{H} \vec{d\ell} = H \cdot \ell$

où ℓ est la longueur du circuit magnétique. La puissance est donc

$$p(t) = S \ell H \frac{d B}{dt} = Vol \cdot H \frac{d B}{dt}$$

Vol étant le volume du circuit magnétique.

L'énergie dissipée, par unité de volume, sera

$$W = \int H d B$$

(8.138)

En régime alternatif, l'état magnétique du matériau va décrire un cycle d'hystérésis lors de chaque période.

L'énergie perdue, lors de chaque période, sera donnée par $\int H dB$, qui est la surface

contenue à l'intérieur de la courbe d'hystérésis. Cette énergie se transforme en chaleur. Il est donc nécessaire d'utiliser des matériaux avec un cycle d'hystérésis étroit pour la fabrication des transformateurs.

La puissance perdue par hystérésis sera proportionnelle à la fréquence des tensions et courants dans le transformateur.

Pertes par courants de Foucault

Le champ magnétique variable dans un transformateur produit une fem induite, suivant la loi de Faraday. Cette fem produit alors des courants induits dans la masse du noyau car celui-ci est généralement assez bon conducteur. Ces courants sont appelés <u>courants de Foucault</u>.

Ils produisent une perte par effet Joule et un échauffement. C'est le principe du chauffage par induction. Dans le cas de transformateurs il s'agit cependant d'un effet non désiré.

L'effet des courants de Foucault est alors réduit en réalisant le noyau au moyen de feuilles de matériau ferromagnétique isolées électriquement entre elles.

On augmente ainsi la résistance électrique des trajets suivis par les courants de Foucault.

Pour les applications haute fréquence, on peut réduire les pertes par courant de Foucault en utilisant des matériaux à haute perméabilité et faible conductivité, comme les ferrites.

Les courants de Foucault sont proportionnels à la dérivée du champ magnétique. Si le champ magnétique est sinusoïdal, les courants de Foucault auront une amplitude proportionnelle à la fréquence. Comme la puissance dissipée par ces courants est proportionnelle au carré du courant, les pertes par courants de Foucault seront proportionnelles au carré de la fréquence.

8.8 Puissances

8.8.1 Fonctions périodiques – Terminologie

8.8.1.1 Sinusoïde

a (t) = $A_m \cos(\omega t + \alpha)$ A_m : amplitude ou valeur de crête ω : pulsation ou fréquence angulaire (rad/s) f : fréquence (Hz) T : période (s) α : phase (rad) f = 1/T $\omega = 2 \pi f$

Valeur moyenne

$$A_{moy} = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} a(t) dt = 0$$
(8.139)

<u>Valeur moyenne simplement redressée</u> : moyenne de la fonction obtenue en annulant la partie négative de a (t)

$$A_{moy1} = \frac{1}{T} \int_0^T a'(t) dt$$
 (8.140)

avec

$$a'(t) = a(t)$$
 si $a(t) > 0$
= 0 si $a(t) < 0$

Pour une sinusoïde : $A_{moy1} = \frac{1}{\pi} A_m = 0.318 A_m$

<u>Valeur moyenne doublement redressée</u> : moyenne de la fonction obtenue en inversant le signe de la partie négative de la fonction

$$A_{moy 2} = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} |a(t)| dt$$
Pour une sinusoïde : $A_{moy 2} = \frac{2}{\pi} A_m = 0,637 A_m$
(8.141)

Valeur efficace : racine carrée de la moyenne du carré de la fonction

$$A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{0}^{T} a^{2} (t) dt}$$
(8.142)

Pour une sinusoïde :
$$A_{eff} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} = 0,707 A_m$$
 (8.143)

Facteur de forme

$$k = \frac{A_{eff}}{A_{moy 2}}$$
(8.144)

Pour une sinusoïde : $k = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$

8.8.1.2 Fonction périodique

Une fonction f (t) périodique, de période T

$$f(t) = f(t+T)$$

peut être développée en série de Fourier

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sin n \omega_0 t)$$

$$\omega_0 = 2\pi/T \text{ est la pulsation fondamentale}$$
(8.145)

Le terme a_0 est la composante continue. Le terme n = 1 est le fondamental. Le terme n = 2 est l'harmonique 2, etc.

$$a_{0} = \frac{1}{T} \int_{t_{0}}^{t_{0}+T} f(t) dt \qquad \text{valeur moyenne}$$

$$a_{n} = \frac{2}{T} \int_{t_{0}}^{t_{0}+T} f(t) \cos n \omega_{0} t dt$$

$$b_{n} = \frac{2}{T} \int_{t_{0}}^{t_{0}+T} f(t) \sin n \omega_{0} t dt$$

On peut aussi établir un développement ne contenant que des termes en cosinus, et une phase, ce qui sera utile pour la méthode des phaseurs.

f (t) =
$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n \omega_0 t + \alpha_n)$$
 (8.146)
 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
tg $\alpha_n = b_n/a_n$ (le quadrant de α_n étant déterminé par les signes de a_n et b_n)

La valeur efficace d'une fonction périodique est

$$F_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{0}^{T} f^{2}(t) dt}$$
$$= \sqrt{A_{0}^{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_{n}^{2}} = \sqrt{A_{0}^{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,eff}^{2}}$$
(8.147)

en introduisant la valeur efficace de chaque harmonique

$$A_{n,eff} = A_n / \sqrt{2}$$

Le taux d'harmonique est défini par

$$\tau = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}}$$
(8.148)

Une fonction périodique à demi-alternances égales possède la symétrie

$$f(t + \frac{T}{2}) = -f(t)$$

Dans ce cas, tous les harmoniques pairs sont nuls :

$$A_0 = 0$$

$$A_n = 0 \quad \text{pour n pair}$$
(8.149)

Les valeurs moyennes simplement et doublement redressées, ainsi que le facteur de forme se définissent comme dans le cas de la sinusoïde.

8.8.2 Puissance instantanée et puissance active

La puissance instantanée fournie à un dipôle est définie comme le produit de la tension par le courant (avec les références associées).



$$p(t) = v(t)i(t)$$

Dans le cas où la tension et le courant sont périodiques, on s'intéresse essentiellement à la valeur moyenne de cette puissance instantanée. La <u>puissance moyenne ou puissance active</u> est définie par

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} p(t) dt$$
(8.150)

où T est la période.

Dans le cas particulier du régime sinusoïdal, la tension et le courant sont de la forme

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha)$$

i(t) = I_m cos(\overline{\overlin}\overlin{\verline{\overlin}\overlin{\

et la puissance instantanée

 $p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta)$ peut s'inscrire

$$p(t) = \frac{1}{2} V_{m} I_{m} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} V_{m} I_{m} \cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$
(8.151)

La puissance instantanée comprend donc une composante constante et une composante sinusoïdale qui varie avec une fréquence double de celle du courant et de la tension. La puissance moyenne est

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} p(t) dt = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\alpha - \beta)$$

= $V_{eff} \cdot I_{eff} \cos(\alpha - \beta)$
= $V_{eff} \cdot I_{eff} \cos \phi$ avec $\phi = \alpha - \beta$ (8.152)

et elle dépend donc de l'amplitude du courant et de la tension et <u>du cosinus de leur</u> <u>déphasage.</u>

Lorsque p (t) est positive, la puissance reçue par le dipôle est positive et lorsque p (t) est négative, la puissance reçue par le dipôle est négative. La puissance instantanée peut être négative sur certains intervalles de temps de chaque période, même si la puissance moyenne est positive.



La puissance instantanée peut également s'écrire

$$p(t) = P[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] + Q\sin(2\omega t + 2\alpha)$$
(8.153)

avec

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi$$

$$Q = \frac{1}{2} V_m I_m \sin \phi$$

Le premier terme correspond à une puissance qui a toujours le même signe, et dont la moyenne est P. Le deuxième terme correspond à une puissance qui s'échange entre le dipôle et le circuit extérieur et dont la valeur moyenne est nulle.

L'amplitude Q de ce deuxième terme s'appelle la puissance réactive.

Considérons maintenant successivement les composants élémentaires : R, C, L. Rappelons que les valeurs de R, C et L sont positives.

<u>Résistance</u>

La puissance

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^{2}(t)$$

est toujours positive ou nulle : la résistance absorbe toujours de la puissance et ne la restitue jamais, c'est un élément <u>dissipatif</u>. L'énergie absorbée par la résistance

$$\mathbf{w}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{R} \, \mathbf{i}^2(t) \, dt \ge 0$$

est évidemment positive et la résistance est un élément passif (§8.1.5.).

En régime sinusoïdal, la tension et le courant sont en phase, et la puissance instantanée est (8.151) (8.153)

$$p(t) = P\left[1 + \cos\left(2\omega t + 2\alpha\right)\right]$$
(8.154)

La puissance moyenne est

$$P = \frac{1}{2} R I_m^2 = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R}$$
(8.155)

et en introduisant les valeurs efficaces

$$P = R I_{eff}^{2} = \frac{V_{eff}^{2}}{R}$$
(8.156)

La <u>valeur efficace</u> d'un courant (d'une tension) est donc égale à la valeur du courant (tension) continu qui produirait la même puissance moyenne dans une résistance. Cela reste vrai pour toute fonction périodique. Ceci constitue la raison du choix des valeurs efficaces pour définir les tensions et courants dans le domaine de l'électrotechnique.

<u>Capacité</u>

La capacité et l'inductance sont des éléments passifs car l'énergie absorbée, $C v^2/2$ et $L i^2/2$, est toujours positive. Contrairement à la résistance, l'inductance et la capacité peuvent restituer cette énergie absorbée : ce sont des éléments <u>non dissipatifs ou réactifs</u>.

En régime sinusoïdal, pour une capacité, on a

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha)$$

i(t) = $\omega C V_m \cos(\omega t + \alpha + 90^\circ)$

et la puissance instantanée est

$$p(t) = -\frac{1}{2} \omega C V_{m}^{2} \sin (2\omega t + 2\alpha)$$

= Q sin (2\omega t + 2\alpha)
P = 0 Q = -\frac{1}{2} \omega C V_{m}^{2}(8.157)

La puissance varie sinusoïdalement avec la fréquence double. La puissance reçue par la capacité est positive lorsque |v(t)| est croissant et négative lorsque |v(t)| est décroissant. La puissance moyenne est nulle.

Inductance

En régime sinusoïdal

$$v(t) = \omega L I_{m} \cos (\omega t + \beta + 90^{\circ})$$

$$i(t) = I_{m} \cos (\omega t + \beta)$$

$$P = 0 \qquad Q = \frac{1}{2} \omega L I_{m}^{2}$$

$$p(t) = -Q \sin (2\omega t + 2\beta) \qquad (8.158)$$

La puissance varie sinusoïdalement avec la fréquence double. La puissance reçue par l'inductance est positive lorsque |i(t)| est croissant et négative lorsque |i(t)| est décroissant. La puissance moyenne est nulle.

8.8.3 Expression de la puissance active

En régime sinusoïdal permanent nous pouvons utiliser les phaseurs pour représenter la tension et le courant du dipôle de la fig. 45.



```
Fig. 47
```

$$\begin{split} \underline{V} &= V_m \ e^{j \ \alpha} \\ \underline{I} &= I_m \ e^{j \ \beta} \\ \text{L'impédance du dipôle est donc} \\ &Z &= \frac{V}{\underline{I}} = \frac{V_m}{I_m} \ e^{j \ (\alpha - \beta)} \\ &= \text{Re } Z + j \ \text{Im } Z \\ &\cos \left(\alpha - \beta\right) = \cos \phi = \frac{\text{Re } Z}{\left| \ Z \ \right|} \quad \text{avec} \quad \phi = \alpha - \beta \\ &V_m &= \left| \ Z \ \right| I_m \end{split}$$

La puissance moyenne (8.152) absorbée par le dipôle peut se mettre sous la forme

$$P = \frac{1}{2} V_{m} I_{m} \cos \phi = V_{eff} I_{eff} \cos \phi$$

$$= \frac{1}{2} I_{m}^{2} \operatorname{Re} Z = I_{eff}^{2} \operatorname{Re} Z$$
(8.159)

Seule la partie résistive de l'impédance (la partie réelle) est donc responsable de l'énergie moyenne dissipée.

Pour un dipôle passif, l'énergie absorbée doit être non négative. Il en résulte que la puissance <u>moyenne</u> sur une période doit également être non négative, $P \ge 0$ et donc Re Z (j ω) ≥ 0 (8.160)

En écrivant $Z = |Z| e^{j\phi}$, la condition de passivité devient

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \tag{8.161}$$

Exemple :





 $e(t) = 100 \cos 100t$

Z = 100 + j100 = 141,4 e^{j45°}
I_m =
$$\frac{V_m}{|Z|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
 (A)

La puissance moyenne délivrée à l'impédance est

$$P = \frac{1}{2} V_{m} I_{m} \cos 45^{\circ} = \frac{100}{2\sqrt{2}} \cos 45^{\circ} = 25 W$$
$$= \frac{1}{2} I_{m}^{2} \text{ Re } Z = 25 W$$

La puissance dissipée dans la résistance de 100Ω

$$P_{\rm R} = \frac{1}{2} \, {\rm R} \, {\rm I}_{\rm m}^2 = 25 \, {\rm W}$$

est égale à la puissance dans Z puisque l'inductance n'absorbe pas de puissance moyenne. La puissance absorbée par la source est

$$P_{S} = \frac{1}{2} V_{m} I_{m} \cos(225^{\circ}) = -\frac{1}{2} V_{m} I_{m} \cos 45^{\circ} = -25 W$$

car le courant de la source est -i (t) pour les références associées. La source fournit donc la puissance de 25 W à la charge.

8.8.4 Facteur de puissance

La puissance moyenne délivrée à une charge est

 $P = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \varphi$

où ϕ est le déphasage entre la tension et le courant.

La puissance apparente est définie par

$$S_{app} = V_{eff} \cdot I_{eff} \qquad (VA) \tag{8.162}$$

Elle s'exprime en volt-ampère, pour la distinguer de P qui s'exprime en watt.

Le facteur de puissance d'une charge est

facteur de puissance =
$$\cos \varphi = \frac{P}{S_{app}}$$
 (8.163)

Pour une charge passive, le facteur de puissance sera compris entre 0 et 1, et il caractérise l'efficacité d'un système de distribution d'énergie. L'équipement utilisé pour la génération, le transport et la distribution de puissance doit être conçu en fonction du courant I_{eff} pour une tension donnée V_{eff} , donc en fonction de la puissance apparente. Pour une tension et puissance donnée, une charge avec un faible facteur de puissance exigera un courant plus important, et donc un investissement plus important pour le matériel et des pertes plus grandes sur le réseau de distribution. Pour un distributeur d'énergie électrique, il est donc souhaitable d'avoir un facteur de puissance aussi proche que possible de 1.

Exemple :

Pour une puissance délivrée P = 100 kW , avec $\,V_{eff}$ = 220 V et $\cos\phi$ = 0.85 , le courant sera

$$I_{eff} = \frac{P}{V_{eff} \cdot \cos \alpha} = 535 \text{ A}$$

et la puissance apparente

 $S_{app} = V_{eff} I_{eff} = 118 \text{ kVA}$

Si on augmente le facteur de puissance à 0.95, le courant et la puissance apparente seront, pour la même puissance active :

$$I_{eff} = 478 \text{ A}$$

 $S_{app} = 105 \text{ kVA}$

Le distributeur doit fournir la puissance délivrée (et facturée) mais aussi les pertes sur les câbles de transmission. Si la résistance de ces câbles est de 0.1Ω , la puissance totale de la source sera :

$$\begin{split} P_{S} &= 100 \text{ kW} + 0.1 \text{ I}_{eff}^{2} \\ P_{S} &= 129 \text{ kW} \qquad \text{si} \qquad \cos \phi = 0.85 \\ &= 123 \text{ kW} \qquad \text{si} \qquad \cos \phi = 0.95 \end{split}$$

Dans le cas assez fréquent où l'utilisateur présente une charge inductive (Im Z > 0), il est possible d'améliorer le facteur de puissance en branchant des condensateurs en parallèle avec la charge.

8.8.5 Puissance complexe

Commençons par définir les phaseurs "efficaces" pour représenter la tension et le courant

$$\underline{V}_{eff} = \frac{\underline{V}}{\sqrt{2}} = V_{eff} e^{j\alpha}$$

$$\underline{I}_{eff} = \frac{\underline{I}}{\sqrt{2}} = I_{eff} e^{j\beta}$$
(8.164)

En électrotechnique, on a l'habitude d'utiliser uniquement les phaseurs "efficaces" (et de ne pas mettre l'indice "eff" puisqu'il n' y a pas de confusion possible). La correspondance entre phaseur et grandeur temporelle est alors (d'après 8.66) :

$$v(t) = V_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha)$$

= Re($\underline{V}_{eff} \sqrt{2} e^{j\omega t}$) $\Leftrightarrow \qquad \underline{V}_{eff} = V_{eff} e^{j\alpha}$

La notion d'impédance, qui est le quotient de deux phaseurs, reste inchangée.

La puissance moyenne s'écrit alors, avec $\varphi = \alpha - \beta$

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos \varphi = Re \left(V_{eff} I_{eff} e^{j \varphi} \right)$$

On définit la puissance complexe par

$$\mathbf{S} = \underline{\mathbf{V}}_{\text{eff}} \ \underline{\mathbf{I}}_{\text{eff}}^{*} \tag{8.165}$$

où \underline{I}_{eff}^* est le complexe conjugué de \underline{I}_{eff} .

C'est une grandeur complexe dont la partie réelle est la puissance moyenne (ou puissance active) et la partie imaginaire est la puissance réactive (cf. (8.153))

$$S = P + jQ$$
(8.166)
$$Q = V_{eff} I_{eff} \sin \phi$$
(8.167)

Pour une impédance Z, on a

$$Q = I_{eff}^2 Im Z = V_{eff}^2 \frac{Im Z}{|Z|^2}$$
 (8.168)

La puissance réactive Q s'exprime en VAR (volt-ampère réactif) pour faire la différence avec le watt.

Le module de la puissance complexe est égal à la puissance apparente

$$|S| = S_{app} = V_{eff} I_{eff}$$
(8.169)

$$\left| \mathbf{S} \right| = \sqrt{\mathbf{P}^2 + \mathbf{Q}^2} \tag{8.170}$$



La puissance complexe délivrée est

$$S = \underline{V}_{eff} \ \underline{I}_{eff}^* = V_{eff} \left(\underline{I}_{1 eff} + \underline{I}_{2 eff} \right)^*$$
$$= \underline{V}_{eff} \ \underline{I}_{1 eff}^* + \underline{V}_{eff} \ \underline{I}_{2 eff}^*$$
(8.171)

La puissance complexe délivrée par la source est la somme des puissances complexes dans chacune des impédances. Cela reste vrai pour un circuit quelconque. C'est le principe de la <u>conservation de la puissance complexe</u>.

On peut utiliser ce principe pour effectuer la compensation du facteur de puissance. Si Z_2 (dans la fig.49) est la charge à corriger, avec la puissance complexe

$$S_2 = P + jQ$$

On connecte en parallèle une réactance pure $Z_1 = j X_1$, avec la puissance complexe

 $S_{1} = j Q_{1}$ La puissance complexe totale sera alors $S = S_{1} + S_{2} = P + j (Q + Q_{1})$ (8.172)

La puissance active P reste inchangée, et on peut choisir Q_1 pour améliorer le facteur de puissance

$$\cos \varphi = \frac{P}{S_{app}} = \frac{P}{|S|}$$
(8.173)

Le courant \underline{I}_2 ne changera pas, mais le courant \underline{I} fourni par le générateur sera modifié.

Exemple :

Reprenons l'exemple de la fig. 48. La puissance complexe de la charge est :

S = P + jQ = 25 + j25

et le facteur de puissance est $\cos 45^\circ = 0.707$.

$$\underline{V}_{eff} = 70.7 \text{ (V)}$$

 $\underline{I}_{eff} = \frac{\underline{V}_{eff}}{Z} = 0.3535 (1 - j)$
 $I_{eff} = 0.5 \text{ A}$

On veut amener le facteur de puissance à la valeur $\cos \phi' = 0.95$. D'après (8.172) on a

tg
$$\phi' = \frac{Q+Q_1}{P}$$

$$Q + Q_1 = P \text{ tg } \phi' = P \text{ tg } (\operatorname{arc} \cos 0.95) = 8.2 \text{ VAR}$$

 $Q_1 = 8.2 - Q = 8.2 - 25 = -16.8 \text{ VAR}$

En appliquant (8.168), avec $Z_1 = j X_1$

$$Q_{1} = V_{eff}^{2} \frac{\text{Im } Z_{1}}{|Z_{1}|^{2}} = \frac{V_{eff}^{2}}{X_{1}}$$
$$X_{1} = -298 \Omega$$

Il faut donc placer une capacité de valeur

$$C_1 = \frac{-1}{\omega X_1} = 33.6 \,\mu F$$

en parallèle sur la charge (fig.50). La puissance complexe deviendra S' = 25 + i8.2

$$s = 25 + 18.2$$

et le courant délivré par la source deviendra



Fig. 50

8.8.6 Adaptation d'impédance

Une impédance de charge $\,Z_L\,$ est raccordée à une source $\,\underline{E}_S\,$ d'impédance interne $\,Z_S\,.$

De manière générale, E_S et Z_S peuvent être l'équivalent de Thévenin d'un circuit complexe.



Fig. 51

Le problème de l'adaptation consiste à choisir l'impédance Z_L de manière à maximiser la puissance moyenne qu'elle absorbe, en régime sinusoïdal permanent. La puissance moyenne délivrée à la charge est

$$P = \frac{1}{2} \left| \underline{I} \right|^2 . \text{ Re } Z_L$$
$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_S}{Z_S + Z_L}$$

En écrivant les impédances sous la forme

$$Z_L = R + j X$$
 $Z_S = R_S + j X_S$

on obtient pour la puissance

$$P = \frac{1}{2} \frac{|E_{S}|^{2} R}{(R_{S} + R)^{2} + (X_{S} + X)^{2}}$$
(8.174)

et il faut choisir R et X pour maximiser P. On annule les dérivées :

$$\frac{\partial P}{\partial X} = 0 \qquad \Rightarrow \quad X + X_S = 0 \qquad \Rightarrow \quad X = -X_S$$
$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0 \qquad \Rightarrow \quad R_S^2 - R^2 + (X + X_S)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad R = R_S$$

La condition d'adaptation est donc que l'impédance de charge doit être le complexe conjugué de l'impédance de source

$$Z_{L} = Z_{S}^{*}$$

$$(8.175)$$

Pour cette valeur de l'impédance de charge, la puissance maximum fournie sera

$$P_{\text{max}} = \frac{\left|\frac{E_{\text{S}}}{8R_{\text{S}}}\right|^{2}}{8R_{\text{S}}} = \frac{E_{\text{eff}}^{2}}{4R_{\text{S}}}$$
(8.176)

8.8.7 Puissance et superposition

Par le théorème de superposition (§8.6.1) on sait que si le signal d'entrée d'un circuit est la somme de sinusoïdes à différentes fréquences, les tensions et courants du circuit (en régime) seront également des sommes de sinusoïdes à ces mêmes fréquences. Examinons ce qui se passe pour la puissance.

Supposons que le courant et la tension dans une branche du circuit soient

$$v(t) = V_{m_1} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + V_{m_2} \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$i(t) = I_{m_1} \cos(\omega_1 t + \beta_1) + I_{m_2} \cos(\omega_2 t + \beta_2)$$
(8.177)
(8.178)

La puissance instantanée sera alors

$$p(t) = v(t) i(t) = \frac{1}{2} V_{m_1} I_{m_1} \cos(\alpha_1 - \beta_1) + \frac{1}{2} V_{m_1} I_{m_1} \cos(2\omega_1 t + \alpha_1 + \beta_1) + \frac{1}{2} V_{m_2} I_{m_2} \cos(\alpha_2 - \beta_2) + \frac{1}{2} V_{m_2} I_{m_2} \cos(2\omega_2 t + \alpha_2 + \beta_2) + \frac{1}{2} V_{m_1} I_{m_2} \cos((\omega_1 + \omega_2) t + \alpha_1 + \beta_2) + \frac{1}{2} V_{m_1} I_{m_2} \cos((\omega_1 - \omega_2) t + \alpha_1 - \beta_2) + \frac{1}{2} V_{m_2} I_{m_1} \cos((\omega_1 + \omega_2) t + \beta_1 + \alpha_2) + \frac{1}{2} V_{m_2} I_{m_1} \cos((\omega_1 - \omega_2) t + \beta_1 - \alpha_2)$$
(8.179)

On voit que la puissance instantanée <u>n'est pas</u> la somme des puissances instantanées associées à ω_1 et ω_2 (c'est-à-dire les 4 premiers termes de (8.179)).

Par contre la puissance active

$$P = \frac{1}{2} V_{m_1} I_{m_1} \cos(\alpha_1 - \beta_1) + \frac{1}{2} V_{m_2} I_{m_2} \cos(\alpha_2 - \beta_2)$$

= V_{1,eff} I_{1,eff} cos \varphi_1 + V_{2,eff} I_{2,eff} cos \varphi_2
(8.180)

est bien la somme des puissances actives associées à chaque fréquence.

Le <u>principe de superposition</u> s'applique donc pour les <u>puissances actives</u> (pour des pulsations ω_1 et ω_2 <u>différentes</u>)

De manière générale, pour un courant et une tension périodiques, de période T, nous pouvons utiliser la série de Fourier (8.146)

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n \omega_0 t + \alpha_n)$$
$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n \omega_0 t + \beta_n)$$

La puissance instantanée est alors

$$p(t) = v(t) i(t) = V_0 I_0 + I_0 \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n \omega_0 t + \alpha_n)$$

+
$$V_0 \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n \omega_0 t + \beta_n)$$

+
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_n I_m \cos(n \omega_0 t + \alpha_n) \cos(m \omega_0 t + \beta_m)$$

Et on obtient pour la puissance active :

$$P = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} p(t) dt = V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} V_n I_n \cos(\alpha_n - \beta_n)$$
(8.181)

La puissance active totale est donc la superposition des puissances actives relatives à chaque harmonique.

$$P = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$
 (8.182)

avec

$$P_0 = V_0 I_0$$

$$P_n = \frac{1}{2} V_n I_n \cos(\alpha_n - \beta_n) = \frac{1}{2} V_n I_n \cos \varphi_n = V_{n,eff} I_{n,eff} \cos \varphi_n$$

Remarque

Si les pulsations ω_1 et ω_2 dans (8.177) (8.178) ne sont pas harmoniquement reliées (c'est-àdire qu'il n'existe pas de nombres entiers n_1 et n_2 tels que $n_1 \omega_1 = n_2 \omega_2$), alors les grandeurs i (t) et v (t) définies par (8.177) (8.178) ne sont pas périodiques. On peut cependant dans ce cas généraliser la notion de puissance moyenne et conserver le principe de superposition des puissances moyennes.

8.9 L'amplificateur opérationnel

8.9.1 Introduction

L'amplificateur opérationnel est un amplificateur intégré avec un gain A très grand, une impédance d'entrée élevée et une impédance de sortie faible. C'est un composant largement utilisé dans de nombreuses applications et qui a reçu son propre symbole :



Fig. 52

On omet souvent de dessiner les alimentations $+V_{CC}$ et $-V_{CC}$ (de même que d'autres bornes de réglage de l'amplificateur) :



Les alimentations sont bien sûr indispensables pour le bon fonctionnement de l'amplificateur opérationnel, mais n'interviennent pas dans les équations du circuit auquel l'amplificateur est connecté. Il faut être conscient, en utilisant le schéma de la fig.53 que la loi des nœuds ne peut pas être appliquée aux 3 courants associés aux 3 bornes de l'amplificateur : leur somme n'est pas nulle.

La tension de sortie $\,v_0\,$ est une fonction de la tension différentielle à l'entrée $\,v_d\,$:

$$v_{d} = v_{p} - v_{n}$$

 $v_{0} = A (v_{p} - v_{n}) = A v_{d}$
(8.183)

Le gain A est très grand. L'impédance d'entrée (impédance entre les bornes + et -) est très grande et les courants d'entrée (courants entrant par les bornes marquées + et -) sont très faibles.

Les signes + et - sur les bornes d'entrée indiquent la manière de définir le signe de la tension d'entrée. Cela ne signifie donc pas qu'il faut appliquer une tension positive à la borne + et une tension négative à la borne -.

Comme le gain est très grand (par exemple de l'ordre de 10^5 à 10^6 , il suffit d'une très petite tension v_d à l'entrée pour que la tension de sortie v_0 approche la tension d'alimentation V_{CC} et que l'amplificateur soit saturé. La sortie ne sera donc une fonction linéaire de l'entrée ($v_0 = A v_d$) que pour une très petite plage de signaux d'entrée autour de l'origine :

$$-v_{\varepsilon} \le v_{d} \le v_{\varepsilon} \tag{8.184}$$

Dès que le signal d'entrée sort de cette plage, le signal de sortie sature à une valeur V_{sat} (ou $-V_{sat}$) proche de la valeur de la tension d'alimentation V_{CC} , comme sur la fig.54a.



Fig. 54

Exemple : Pour un gain A = 1.510^5 et une tension d'alimentation V_{CC} = 15 V, on obtient v_e \approx V_{CC} / A = 100μ V

L'amplificateur opérationnel est essentiellement utilisé dans des schémas à rétroaction négative (qui assurent un signal d'entrée très petit) ou bien comme comparateur en exploitant la saturation.

A la limite, pour le modèle de l'<u>amplificateur opérationnel idéal</u>, les courants d'entrée sont supposés nuls et le gain infini. La caractéristique entrée-sortie devient alors celle de la fig.54b.

Si l'amplificateur fonctionne dans sa zone linéaire, on a :

 $\left|\mathbf{v}_{0}\right| < \mathbf{V}_{\mathrm{sat}} \tag{8.185}$

et la tension d'entrée v_d peut donc être considérée comme nulle. Les bornes d'entrée de l'amplificateur opérationnel se comportent donc à la fois comme un circuit ouvert (car le courant d'entrée est nul) et comme un court-circuit <u>virtuel</u> (car la tension d'entrée est nulle) !

Pour analyser un circuit contenant un amplificateur opérationnel, on fera l'hypothèse que l'amplificateur fonctionne dans sa zone linéaire. On résout alors le circuit et on vérifie si la solution est conforme à l'hypothèse. Si ce n'est pas le cas, la solution obtenue n'est pas valable à cause de la saturation.

Le nom d'amplificateur opérationnel provient de l'utilisation initiale de ce composant dans les calculateurs analogiques pour réaliser les opérations mathématiques comme l'addition, la mise à l'échelle, l'intégration, la dérivation. Actuellement l'amplificateur opérationnel est devenu un composant standard dans de nombreux circuits électroniques (instrumentation, filtrage, etc.) mais il a conservé son nom d'origine.

8.9.2 Amplificateur inverseur

On considère le schéma suivant :



La résistance R_2 qui relie la sortie de l'amplificateur à son entrée est la <u>résistance de</u> <u>rétroaction</u>. Elle est connectée à la borne d'entrée marquée - pour avoir une rétroaction négative qui assure la stabilité.

En désignant par v_d la tension différentielle à l'entrée de l'amplificateur et par A son gain (gain en boucle ouverte) :

$$v_0 = Av_d$$

$$i_1 = \frac{v_1 + v_d}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{-v_d - v_0}{R_2}$$

Si l'impédance d'entrée de l'amplificateur est infinie :

$$\frac{i_1 = i_2}{R_1} = \frac{-v_d - v_0}{R_2}$$

et donc

$$\frac{\mathbf{v}_0}{\mathbf{v}_1} = -\frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1} \frac{1}{1 + \frac{1}{\mathbf{A}}(1 + \frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1})}$$
(8.186)

Comme le gain A est très grand, on a quasiment :

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1} \mathbf{v}_1 \tag{8.187}$$

Le gain en tension est donc $-R_2/R_1$. C'est le gain en boucle fermée, qui est déterminé par le <u>rapport des deux résistances</u> et qui ne dépend pas de A. C'est une propriété très importante, car le gain A de l'amplificateur n'est pas connu avec précision et dépend fortement de la température.

On remarquera que la tension de sortie v_0 ne dépend pas de la valeur de la résistance R (résistance d'utilisation ou résistance de charge).

Il faut encore s'assurer que l'amplificateur fonctionne bien dans sa zone linéaire, c'est-àdire :

$$|v_0| < V_{sat}$$

La tension d'entrée doit donc être limitée à :

$$\left|\mathbf{v}_{1}\right| < \frac{\mathbf{R}_{1}}{\mathbf{R}_{2}}\mathbf{V}_{\mathrm{sat}}$$

Analyse simplifiée

En admettant dès le départ que A est très grand et que la tension différentielle d'entrée est presque nulle, la borne d'entrée marquée - est alors un <u>"zéro virtuel" de potentiel(</u> $v_d \cong 0$). On peut directement écrire :

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1}$$
 $i_2 = -\frac{v_0}{R_2}$
 $i_1 = i_2$ (impédance d'entrée infinie)
 $c:$

et donc

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1}\mathbf{v}_1$$

Pour les schémas suivants, on appliquera directement la méthode d'analyse simplifiée.

Rétroaction négative

La tension de sortie v_0 est ramenée à l'entrée <u>inverseuse</u> par l'intermédiaire de la résistance R_2 (fig.55). C'est le principe de la rétroaction négative. Le signal de sortie s'oppose à toute variation de la tension v_d produite par la tension d'entrée.

Pour voir comment la rétroaction négative stabilise le gain global, supposons par exemple que le gain en boucle ouverte A augmente pour une raison quelconque. La tension de sortie augmente (en supposant v_d positif) et ramène plus de tension sur l'entrée inverseuse, ce qui fait diminuer v_d . Le résultat global sera une augmentation de la tension de sortie tout à fait négligeable.

La tension de sortie de l'amplificateur prend donc précisément la valeur nécessaire pour s'opposer à la source et produire une tension quasiment nulle à l'entrée de l'amplificateur.

Rétroaction positive

Considérons le schéma de la fig.55bis, dans lequel les bornes – et + ont été permutées par rapport à la fig.55. La rétroaction est maintenant positive.



Fig. 55bis (circuit instable)

Si la tension d'entrée v_d est positive, on aura une grande tension de sortie v_0 positive qui sera ramenée à l'entrée par la rétroaction et la tension d'entrée deviendra encore plus grande. La sortie de l'amplificateur sera donc vite saturée à sa valeur positive maximum V_{sat} . De même si une tension initiale négative est présente à l'entrée, la sortie va saturer à sa valeur négative $-V_{sat}$. Le circuit ne fonctionne donc pas comme un amplificateur, la tension de sortie v_0 n'est pas proportionnelle à la tension v_1 .

Remarquons que si on appliquait la notion de zéro virtuel au circuit de la fig.55bis en oubliant qu'il est en rétroaction positive, on obtiendrait $v_0 = -(R_2/R_1)v_1$ comme pour la rétroaction negative! Il est donc important de s'assurer de la présence de la rétroaction négative avant d'appliquer la méthode du zéro virtuel.

8.9.3 Amplificateur non inverseur



Fig. 56

Regardons d'abord si le circuit est bien en rétroaction négative. Si la tension $v_d = v_+ - v_-$ devient positive, cela produit une grande tension de sortie v_0 positive. Une partie de cette tension se retrouve aux bornes de R_1 . Comme $v_d = v_+ - v_- = v_1 - v_{R_1}$, la tension v_d diminue lorsque v_0 augmente. On a donc bien une rétroaction négative qui tend à ramener v_d à zéro.

Ayant vérifié que le circuit est en rétroaction négative, on peut appliquer la notion de zéro virtuel. La tension d'entrée v_1 est appliquée à la borne d'entrée +. Comme la tension différentielle d'entrée est pratiquement nulle :

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1}$$
$$v_0 = R_2 i_2 + v_1$$

et l'impédance d'entrée étant infinie :

 $i_1 = i_2$

et donc

$$\mathbf{v}_0 = (1 + \frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1})\mathbf{v}_1 \tag{8.188}$$

Le gain est donc positif et supérieur à l'unité. Il est déterminé par les valeurs des résistances R_1 et R_2 .

Pour que l'amplificateur fonctionne dans sa zone linéaire, il faut respecter la condition :

$$\left|\mathbf{v}_{1}\right| < \frac{\mathbf{R}_{1}}{\mathbf{R}_{1} + \mathbf{R}_{2}} \mathbf{V}_{\text{sat}}$$

8.9.4 Suiveur de tension

Si, dans le schéma précédent, on remplace R_2 par un court-circuit, le gain devient égal à 1 indépendamment de R_1 . On peut donc retirer R_1 et on obtient le schéma suivant :



La tension différentielle à l'entrée étant quasiment nulle, on a :

 $v_0 = v_1$

La tension de sortie est toujours égale à la tension d'entrée : c'est un suiveur de tension (voltage follower). Ce schéma présentant une impédance d'entrée très grande et une

impédance de sortie très faible est utilisé pour isoler deux parties d'un circuit. Les tensions v_0 et v_1 sont égales mais aucun courant ne circule de l'entrée vers la sortie.

8.9.5 Sommateur

On considère un amplificateur inverseur dans lequel plusieurs sources sont reliées à la borne d'entrée – (fig.58).



En considérant que la borne - est un zéro virtuel de potentiel, on a :

$$i_{1} = \frac{v_{i1}}{R_{1}} \qquad i_{2} = \frac{v_{i2}}{R_{2}} \qquad i_{f} = i_{1} + i_{2}$$

$$v_{0} = -R_{f}i_{f}$$

$$= -\frac{R_{f}}{R_{1}}v_{i1} - \frac{R_{f}}{R_{2}}v_{i2}$$
(8.189)

On peut généraliser à un nombre quelconque d'entrées :

$$v_0 = -R_f \sum_{k=1}^{n} \frac{v_{ik}}{R_k}$$
(8.190)

où R_f est la résistance placée en rétroaction. La tension de sortie est donc une somme pondérée des tensions d'entrée.

8.9.6 Dérivateur



$$i_1 = C \frac{dv_1}{dt}$$
 $i_2 = \frac{v_2}{R}$ $i_1 = -i_2$
 $v_2(t) = -RC \frac{dv_1(t)}{dt}$
(8.191)

La tension de sortie est proportionnelle à la dérivée de la tension d'entrée.

8.9.7 Intégrateur



$$i_{1} = \frac{v_{1}}{R} \qquad i_{2} = C \frac{dv_{2}}{dt} \qquad i_{1} = -i_{2}$$
$$v_{2}(t) = -\frac{1}{RC} \int_{0}^{t} v_{1}(t) dt + v_{2}(0) \qquad (8.192)$$

qui réalise bien l'opération d'intégration, pour autant que la condition

 $\left| v_{2}(t) \right| < V_{sat}$ reste vérifiée.

Si on applique une tension constante à l'entrée :

 $\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{E} \, \mathbf{u}(t)$

avec la capacité initialement non chargée

$$v_2(0) = 0$$

on obtient une rampe à la sortie :

$$v_2(t) = -\frac{E t}{RC}$$

Un tel circuit est utilisé pour la génération de la tension de balayage des oscilloscopes. La remise à zéro de la tension de sortie s'obtient en court-circuitant la capacité.

Si la tension $v_1(t)$ à l'entrée de l'intégrateur est une force électromotrice induite résultant d'une variation de flux Φ :

$$v_{1}(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$v_{2}(t) = -\frac{1}{RC} \int_{t_{0}}^{t} v_{1}(t) dt = \frac{1}{RC} [\Phi(t) - \Phi(t_{0})]$$
(8.193)

la tension de sortie sera proportionnelle aux variations de flux, qui pourront donc être mesurées par un voltmètre placé à la sortie de l'intégrateur. C'est le principe du fluxmètre électronique.

8.9.8 Amplificateur opérationnel non idéal

L'amplificateur opérationnel considéré dans les schémas précédents est un élément idéalisé :

- le gain A est supposé infini.
- les courants d'entrée sont supposés nuls, ce qui correspond à une impédance d'entrée infinie.
- la tension de sortie ne dépend pas du courant débité, ce qui correspond à une source de tension idéale et donc une impédance de sortie (impédance de Thévenin) nulle.

Les amplificateurs opérationnels réels ne possèdent pas ces caractéristiques idéales, mais s'en rapprochent relativement bien.

Un modèle plus complet de l'amplificateur opérationnel sera le suivant :



- le gain A est grand (par exemple 10^5) mais pas infini.
- la résistance d'entrée R_i est grande (par exemple 1 M Ω) mais pas infinie.
- la résistance de sortie R_0 est faible (par exemple 50 Ω) mais pas nulle.

Le courant d'entrée ne sera plus nul mais sera :

 $i_d = v_d / R_i$

Pour un amplificateur fonctionnant dans sa zone linéaire, on a :

$$v_d < v_\varepsilon = \frac{V_{sat}}{A}$$

Pour $V_{sat} = 10 \text{ V}$, $A = 10^5$, on a $v_{\epsilon} = 100 \,\mu\text{V}$ et avec $R_i = 1 \,M\Omega$ on trouve : $i_d < 10^{-10} A$ ce qui n'est pas très grand !

Il faut signaler que ce schéma équivalent de l'amplificateur opérationnel néglige encore un certain nombre de facteurs comme les courants et tensions de décalage ainsi que la variation du gain avec la fréquence. Une étude plus complète de l'amplificateur opérationnel sera faite dans le cours d'électronique.

8.10 Biportes

8.10.1 Introduction

Dans l'étude des circuits électriques, il arrive souvent qu'on ne s'intéresse pas à l'ensemble de tous les courants et tensions mais seulement aux grandeurs relatives à certains accès particuliers.

Considérer un circuit comme un <u>dipôle</u> signifie qu'on considère un seul accès auquel des connexions extérieures pourront être faites. Le dipôle est alors une « boîte noire » et les seules grandeurs intéressantes sont les phaseurs tension et courant de l'accès.

Le courant entrant par une borne de l'accès doit nécessairement ressortir par l'autre borne, suivant la loi des nœuds.



Comme on ne s'intéresse pas aux courants et tensions internes, on peut remplacer le dipôle par son équivalent de Thévenin :



$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{V}}_{\mathrm{th}} + \mathbf{Z} (\mathbf{j}\boldsymbol{\omega}) \,\underline{\mathbf{I}}$$

Si le dipôle ne contient pas de source indépendante, \underline{V}_{th} est identiquement nulle et la relation entre les grandeurs à l'accès est

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z} (\mathbf{j}\boldsymbol{\omega}) \mathbf{I} \tag{8.194}$$

où $Z(j\omega)$ est l'impédance du dipôle.

Un <u>biporte</u> est un circuit dans lequel on a spécifié <u>deux accès</u> disponibles pour faire des connexions extérieures. L'accès 1 représente généralement l'entrée et l'accès 2 la sortie. La notion de biporte implique que le courant entrant par une borne d'un accès est égal à celui qui ressort par l'autre borne du même accès.

Les connexions extérieures ne peuvent donc pas être arbitraires, mais doivent respecter ce <u>fonctionnement en biporte</u>.



Les références associées seront utilisées pour chaque accès, et les courants sortant par les bornes du bas ne doivent pas être explicitement indiqués.

On supposera que les biportes ne contiennent <u>pas de sources indépendantes</u>. Les sources indépendantes ne peuvent donc être placées qu'aux accès.

Pour un circuit fonctionnant en biporte nous nous intéressons seulement aux quatre grandeurs qui sont les tensions et courants aux deux accès : \underline{V}_1 , \underline{V}_2 , \underline{I}_1 , \underline{I}_2 .

Un dipôle est caractérisé par deux grandeurs (tension et courant) et fournit une relation (8.194) entre ces deux grandeurs.

Un biporte fournira deux relations entre les quatre grandeurs à ses accès.

Considérons en effet la situation suivante,



où les connexions extérieures ont chacune été remplacée par leur équivalent de Thévenin. Le circuit est entièrement déterminé et on doit donc pouvoir obtenir les valeurs de V_1 , V_2 , I_1 , I_2 . Les équations aux accès fournissent deux relations :

$$\underline{\underline{V}}_{th 1} = \underline{\underline{V}}_{1} + Z_{th 1} \underline{\underline{I}}_{1}$$

$$\underline{\underline{V}}_{th 2} = \underline{\underline{V}}_{2} + Z_{th 2} \underline{\underline{I}}_{2}$$
(8.195)

Il faut donc deux équations supplémentaires pour obtenir les quatre grandeurs aux accès, et elles ne peuvent provenir que du biporte lui-même.

Un biporte impose donc <u>deux relations constitutives</u> qui font intervenir les courants et les tenions à ses accès.

A partir de ces deux équations, on peut exprimer deux des quatre variables en fonction des deux autres. Il y a 6 possibilités de choix de deux variables parmi quatre, et il y a donc 6 manières de caractériser un biporte.

8.10.2 Matrice impédance

Si on choisit d'exprimer les tensions en fonction des courants, on écrira

$$\underline{\mathbf{V}}_{1} = \mathbf{z}_{11}(j\omega) \, \underline{\mathbf{I}}_{1} + \mathbf{z}_{12}(j\omega) \, \underline{\mathbf{I}}_{2}$$

$$\underline{\mathbf{V}}_{2} = \mathbf{z}_{21}(j\omega) \, \underline{\mathbf{I}}_{1} + \mathbf{z}_{22}(j\omega) \, \underline{\mathbf{I}}_{2}$$

$$(8.196)$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{V}}_{1} \\ \underline{\mathbf{V}}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(j\omega) & z_{12}(j\omega) \\ z_{21}(j\omega) & z_{22}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}}_{1} \\ \underline{\mathbf{I}}_{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{V}} = \mathbf{Z} \, \underline{\mathbf{I}}$$
(8.197)

La matrice

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

est la <u>matrice impédance du biporte</u>. Par la suite nous n'écrirons plus explicitement la dépendance en $j\omega$.

Les éléments de la matrice impédance peuvent être interprétés comme des <u>impédances à</u> <u>circuit ouvert</u>.

A partir de (8.196), on a :

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \bigg|_{I_2 = 0}$$
 (8.198)



et z_{11} est donc l'impédance vue à l'accès 1 lorsque l'accès 2 est laissé ouvert.

De même

$$z_{22} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_2} \bigg|_{\underline{I}_1 = 0}$$
(8.199)

est l'impédance vue à l'accès 2 lorsque l'accès 1 est ouvert.

$$z_{21} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_1} \bigg|_{\underline{I}_2 = 0}$$
 (8.200)

est l'impédance de transfert entre l'accès 1 et l'accès 2, lorsque l'accès 2 est ouvert.


$$z_{12} = \frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_2} \bigg|_{\underline{I}_1 = 0}$$
(8.201)
$$\underline{V}_1 = 0$$



est l'impédance de transfert entre l'accès 2 et l'accès 1, lorsque l'accès 1 est ouvert.

Exemple 1

Considérons le biporte suivant :



$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{\underline{V}_{1}}{\underline{I}_{1}} \Big|_{\substack{\underline{I}_{2} = 0}} = R_{1} + R_{2} + R_{3} = 4 \\ z_{22} &= \frac{\underline{V}_{2}}{\underline{I}_{2}} \Big|_{\substack{\underline{I}_{1} = 0}} = R_{3} + j\omega L = 1 + j\omega \\ z_{21} &= \frac{\underline{V}_{2}}{\underline{I}_{1}} \Big|_{\substack{\underline{I}_{2} = 0}} = R_{3} = 1 \\ z_{12} &= \frac{\underline{V}_{1}}{\underline{I}_{2}} \Big|_{\substack{\underline{I}_{1} = 0}} = R_{3} = 1 \end{aligned}$$

La matrice impédance du biporte est donc

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 & \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_3 & \mathbf{R}_3 + \mathbf{j}\omega \mathbf{L} \end{bmatrix}$$
(8.202)

On remarque que $z_{12} = z_{21}$ pour ce biporte, et dans ce cas, on dit que le biporte est réciproque.

D'après le théorème de réciprocité (§ 8.6.3), un biporte composé de résistances, capacités, inductances et inductances mutuelle, sera réciproque, et sa matrice impédance sera symétrique ($z_{12} = z_{21}$). Un biporte réciproque est donc caractérisé par 3 fonctions.

Exemple 2

La matrice impédance du biporte en T :



est:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$
(8.203)

Si $Z_1 = Z_2$, le <u>biporte est symétrique</u> et $z_{11} = z_{22}$.

De manière générale, un biporte est symétrique lorsque l'inversion des accès 1 et 2 est indiscernable par des mesures extérieures.

Pour un biporte symétrique, l'inversion des accès 1 et 2 doit laisser inchangés les courants et tensions aux accès :

$$\underline{V}_1 = z_{11} \underline{I}_1 + z_{12} \underline{I}_2 = z_{22} \underline{I}_1 + z_{21} \underline{I}_2$$
(8.204)

La relation (8.204) doit être vérifiée pour toutes valeurs de \underline{I}_1 et \underline{I}_2 , et donc pour un biporte symétrique on a :

$$z_{11} = z_{22} \qquad \qquad z_{12} = z_{21} \tag{8.205}$$

Un biporte symétrique est donc également réciproque, et est caractérisé par deux fonctions seulement.

8.10.3 Matrice admittance

Si on choisit d'exprimer les courants en fonction des tensions, on écrira :

$$\underline{I}_{1} = y_{11} \underline{V}_{1} + y_{12} \underline{V}_{2}
\underline{I}_{2} = y_{21} \underline{V}_{1} + y_{22} \underline{V}_{2}$$
(8.206)

ou sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \mathbf{V}$$
(8.207)

La matrice

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

est la matrice admittance du biporte.

En comparant (8.197) et (8.207), on a la relation

$$Y = Z^{-1}$$
 $Z = Y^{-1}$ (8.208)

qui généralise, pour les biportes, la relation entre impédance et admittance d'un dipôle.

En développant l'inversion de matrice, on a

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{\det Z} & -\frac{z_{12}}{\det Z} \\ -\frac{z_{21}}{\det Z} & \frac{z_{11}}{\det Z} \end{bmatrix}$$
(8.209)

Les éléments de la matrice Y peuvent être interprétés comme des <u>admittances en court-</u> <u>circuit</u>.

A partir de (8.206), on a :

_

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\underline{\mathbf{I}}_1}{\underline{\mathbf{V}}_1} \bigg|_{\underline{\mathbf{V}}_2 = \mathbf{0}} \tag{8.210}$$



et y_{11} est donc l'admittance vue à l'accès 1 lorsque l'accès 2 est courtcircuité. De même

$$\mathbf{y}_{22} = \frac{\underline{\mathbf{I}}_2}{\underline{\mathbf{V}}_2} \bigg|_{\underline{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{0}} \tag{8.211}$$

est l'admittance vue à l'accès 2 lorsque l'accès 1 est court-circuité,

$$y_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{V}_1} \bigg|_{\underline{V}_2 = 0}$$
 (8.212)

est l'admittance de transfert entre l'accès 1 et l'accès 2, lorsque l'accès 2 est courtcircuité, et

$$y_{12} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{V}_2} \bigg|_{\underline{V}_1 = 0}$$
 (8.213)



est l'admittance de transfert entre l'accès 2 et l'accès 1, lorsque l'accès 1 est court-circuité.

Par le théorème de réciprocité, on vérifie que $y_{12} = y_{21}$ pour un biporte réciproque (composé de R, L, C, M).

<u>Exemple</u> : biporte en Π



En appliquant (8.210) et (8.211) on obtient

$$y_{11} = Y_a + Y_c$$
$$y_{22} = Y_b + Y_c$$

Pour y₂₁, il faut considérer la configuration suivante



et on obtient

$$\mathbf{y}_{21} = \frac{\underline{\mathbf{I}}_2}{\underline{\mathbf{V}}_1} \bigg|_{\underline{\mathbf{V}}_2 = \mathbf{0}} = -\mathbf{Y}_c$$

La matrice admittance du biporte en Π est donc

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{a} + \mathbf{Y}_{c} & -\mathbf{Y}_{c} \\ -\mathbf{Y}_{c} & \mathbf{Y}_{b} + \mathbf{Y}_{c} \end{bmatrix}$$
(8.124)

Dans le cas particulier où $Y_a = Y_b = 0$, on obtient le biporte élémentaire suivant



dont la matrice admittance est

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{\mathbf{c}} & -\mathbf{Y}_{\mathbf{c}} \\ -\mathbf{Y}_{\mathbf{c}} & \mathbf{Y}_{\mathbf{c}} \end{bmatrix}$$
(8.215)

On constate que dét Y = 0, la matrice Y n'a pas d'inverse et ce biporte n'a donc pas de matrice impédance. Ce biporte vérifie en effet les relations

$$\begin{split} \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 \\ \underline{V}_2 &= \underline{V}_1 - Z_c \ \underline{I}_1 \end{split}$$

Les deux courants sont liés et ne peuvent donc pas servir de variables indépendantes.

8.10.4 Association en parallèle

La mise en parallèle de deux biportes correspond au schéma suivant :



Les équations des biportes sont :

$\begin{bmatrix} I_1^A \\ I_2^A \end{bmatrix} = \mathbf{Y}^{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{V}}_1^A \\ \underline{\mathbf{V}}_2^A \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{I}_1^{\mathrm{B}} \\ \underline{I}_2^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} = \mathbf{Y}^{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \underline{V}_1^{\mathrm{B}} \\ \underline{V}_2^{\mathrm{B}} \end{bmatrix}$	
---	---	--

et la connexion en parallèle fournit les relations

$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1^A \\ \underline{I}_2^A \end{bmatrix}$	$+ \begin{bmatrix} I_1^B \\ I_2^B \end{bmatrix}$	$\left[\begin{array}{c} \underline{\mathbf{V}}_1\\ \underline{\mathbf{V}}_2 \end{array}\right] =$	$\begin{bmatrix} \underline{V}_1^A \\ \underline{V}_2^A \end{bmatrix}$	$= \left[\begin{array}{c} \underline{V}_{1}^{B} \\ \underline{V}_{2}^{B} \end{array} \right]$
---	--	---	--	--

et donc

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{Y}^{\mathbf{A}} + \mathbf{Y}^{\mathbf{B}}) \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{V}}_1 \\ \underline{\mathbf{V}}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{\mathbf{A}} + \mathbf{Y}^{\mathbf{B}}$$
(8.216)

La matrice admittance globale est la somme des matrices admittances individuelles.

Ceci est en général faux ! Il faut en effet une condition supplémentaire.

La fonctionnement en biporte (c'est-à-dire l'égalité des courants entrant et sortant par les deux bornes d'un même accès) doit être maintenu, individuellement pour chaque biporte, après la mise en parallèle. Cette condition n'est pas garantie dans le cas général.

Dans le cas particulier où les deux biportes sont <u>à terre commune</u>, la condition du fonctionnement individuel en biporte sera toujours garantie, et la mise en parallèle donnera bien le résultat (8.216).

Un biporte est à terre commune si une borne de l'entrée et une borne de la sortie sont reliées par un court-circuit interne. Ces bornes communes sont souvent mises à la terre.



En effectuant la mise en parallèle à l'entrée seulement, on ne modifie pas la répartition des courants, et les fonctionnements en biportes :



Si les bornes c et d sont au même potentiel à cause de la terre commune, on peut les relier sans changer les courants dans le circuit, et donc effectuer la mise en parallèle à la sortie.

8.10.5 Matrices hybrides

Les matrices hybrides décrivent un biporte en choisissant comme variables indépendantes un courant et une tension, relatifs à des accès différents.

Les matrices hybrides sont souvent utilisées pour les modèles linéaires de transistors.

Pour la matrice hybride h, on écrit

$\begin{cases} \underline{V}_{1} = h_{11} \underline{I}_{1} + h_{12} \underline{V}_{2} \\ \underline{I}_{2} = h_{21} \underline{I}_{1} + h_{22} \underline{V}_{2} \end{cases}$	(8.217)
$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{V}}_1 \\ \underline{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}}_1 \\ \underline{\mathbf{V}}_2 \end{bmatrix}$	
$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix}$	

est la matrice hybride.

et

Les éléments de la matrice hybride ne sont pas homogènes. Deux éléments n'ont pas de dimension (coefficients de transfert en tension ou courant), les deux autres ont la dimension d'une impédance et d'une admittance, respectivement.

L'interprétation des éléments et les relations avec les paramètres impédance et admittance, sont :

$$\begin{split} \mathbf{h}_{11} &= \frac{\underline{\mathbf{V}}_{1}}{\underline{\mathbf{I}}_{1}} \Big|_{\underline{\mathbf{V}}_{2}=0} = \frac{1}{\mathbf{y}_{11}} \\ \mathbf{h}_{12} &= \frac{\underline{\mathbf{V}}_{1}}{\underline{\mathbf{V}}_{2}} \Big|_{\underline{\mathbf{I}}_{1}=0} = \frac{\mathbf{z}_{12}}{\mathbf{z}_{22}} \\ \mathbf{h}_{21} &= \frac{\underline{\mathbf{I}}_{2}}{\underline{\mathbf{I}}_{1}} \Big|_{\underline{\mathbf{V}}_{2}=0} = \frac{\mathbf{y}_{21}}{\mathbf{y}_{11}} \\ \mathbf{h}_{22} &= \frac{\underline{\mathbf{I}}_{2}}{\underline{\mathbf{V}}_{2}} \Big|_{\underline{\mathbf{I}}_{1}=0} = \frac{1}{\mathbf{z}_{22}} \end{split}$$
(8.218)

Pour un biporte réciproque, la condition est $h_{21} = -h_{12}$ (8.219)

Pour la matrice hybride g, on a

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{I}}_{1} = g_{11} \ \underline{\mathbf{V}}_{1} + g_{12} \ \underline{\mathbf{I}}_{2} \\ \underline{\mathbf{V}}_{2} = g_{21} \ \underline{\mathbf{V}}_{1} + g_{22} \ \underline{\mathbf{I}}_{2} \end{cases}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

$$(8.220)$$

avec $\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1}$

Exemple

Le transformateur idéal (fig 8.44) est un biporte qui est décrit par les relations (8.135) :

$$\frac{\mathbf{V}_1 = \mathbf{n} \ \mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2 = -\mathbf{n} \ \mathbf{I}_1}$$

sa matrice hybride est :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix}$$

Remarquons que le transformateur idéal n'a ni matrice impédance, ni matrice admittance.

8.10.6 Matrices de transmission

Pour la matrice de transmission (ou matrice de chaîne), on choisit comme variables indépendantes la tension et le courant relatifs à l'un des accès :

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{1} \\ \underline{I}_{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_{2} \\ -\underline{I}_{2} \end{bmatrix}$$
(8.221)
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

est la matrice de transmission.

et

La raison du choix du signe moins pour I_2 apparaîtra lors de la mise en cascade de deux biportes.

On peut vérifier les relations :

$$A = \frac{\underline{V}_{1}}{\underline{V}_{2}} \Big|_{\underline{I}_{2}=0} = \frac{z_{11}}{z_{21}}$$

$$B = -\frac{\underline{V}_{1}}{\underline{I}_{2}} \Big|_{\underline{V}_{2}=0} = \frac{\det Z}{z_{21}} = -\frac{1}{y_{21}}$$

$$C = \frac{\underline{I}_{1}}{\underline{V}_{2}} \Big|_{\underline{I}_{2}=0} = \frac{1}{z_{21}}$$

$$D = -\frac{\underline{I}_{1}}{\underline{I}_{2}} \Big|_{\underline{V}_{2}=0} = -\frac{y_{11}}{y_{21}} = \frac{z_{22}}{z_{21}}$$
(8.222)

Pour un biporte réciproque, la condition est

$$\det \mathbf{T} = \mathbf{A}\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{C} = 1 \tag{8.223}$$

Finalement, en exprimant les variables de sortie en fonction des variables d'entrée, on a :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{V}}_{2} \\ -\underline{\mathbf{I}}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{V}}_{1} \\ \underline{\mathbf{I}}_{1} \end{bmatrix}$$
(8.224)
$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}$$

8.10.7 Mise en cascade de deux biportes

Les matrices de transmission sont bien adaptées pour décrire la connexion en cascade de deux biportes :



Les équations de la connexion sont :

$$\underline{\mathbf{V}}_3 = \underline{\mathbf{V}}_2 \qquad \underline{\mathbf{I}}_3 = -\underline{\mathbf{I}}_2$$

et par conséquent

$$\left[\begin{array}{c} \underline{\mathbf{V}}_1\\ \underline{\mathbf{I}}_1 \end{array}\right] = \mathbf{T}^{\mathbf{A}} \mathbf{T}^{\mathbf{B}} \left[\begin{array}{c} \underline{\mathbf{V}}_4\\ -\underline{\mathbf{I}}_4 \end{array}\right]$$

La matrice de transmission du biporte composé est donc

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathbf{A}} \mathbf{T}^{\mathbf{B}}$$
(8.225)

La connexion en cascade de biportes correspond donc à la multiplication (dans l'ordre) de leurs matrices de transmission.

Contrairement au cas de la mise en parallèle il n'y a ici aucune restriction, car le fonctionnement individuel en biporte ne sera pas altéré par la connexion.

Exemple





On vérifie que $T = T^A T^B$

8.10.8 Biporte entre source et utilisation

Dans beaucoup d'application, un circuit, modélisé comme un biporte, sera placé entre une source (avec son impédance interne) connectée aux bornes d'entrée et une impédance d'utilisation connectée aux bornes de sortie :



Supposons que le biporte soit décrit par sa matrice impédance

$$\underline{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{z}_{11} \ \underline{\mathbf{I}}_1 + \mathbf{z}_{12} \ \underline{\mathbf{I}}_2$$
$$\underline{\mathbf{V}}_2 = \mathbf{z}_{21} \ \underline{\mathbf{I}}_1 + \mathbf{z}_{22} \ \underline{\mathbf{I}}_2$$

Les équations aux accès sont

$$\underline{\mathbf{V}}_1 = \underline{\mathbf{V}}_{\mathbf{S}} - \mathbf{Z}_{\mathbf{S}} \ \underline{\mathbf{I}}_1$$
$$\underline{\mathbf{V}}_2 = -\mathbf{Z}_{\mathbf{L}} \ \underline{\mathbf{I}}_2$$

A partir de ces 4 équations, par quelques manipulations algébriques, on peut obtenir les grandeurs caractéristiques suivantes :

Impédance d'entrée du biporte terminé sur ${\rm Z}_{\rm L}\,$:

$$Z_{1} = \frac{\underline{V}_{1}}{\underline{I}_{1}} = z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{22} + Z_{L}}$$
(8.226)

On voit que cette impédance devient égale à z_{11} si $\,Z_L=\infty\,.$

Gain en tension

$$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_S} = \frac{z_{21} Z_L}{(z_{11} + Z_S) (z_{22} + Z_L) - z_{12} z_{21}}$$
(8.227)

Equivalent de Thévenin par rapport aux bornes de sortie (accès 2 du biporte) :

$$\underline{\mathbf{V}}_{\text{th}} = \underline{\mathbf{V}}_2 \mid_{\underline{\mathbf{I}}_2 = 0} = \frac{z_{21}}{z_{11} + Z_{\text{S}}} \underline{\mathbf{V}}_{\text{S}}$$
(8.228)

$$Z_{\text{th}} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_2} \bigg|_{V_{\text{S}}=0} = z_{22} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11} + Z_{\text{S}}}$$
(8.229)

8.10.9 Tableau de conversion

Les relations entre les différentes descriptions d'un biporte sont rassemblées dans le tableau suivant (les matrices G et T' n'ont pas été reprises)

	Z	Y	Н	Т
Z	z ₁₁ z ₁₂ z ₂₁ z ₂₂	$\frac{y_{22}}{\det Y} - \frac{y_{12}}{\det Y}$ $-\frac{y_{21}}{\det Y} - \frac{y_{11}}{\det Y}$	$ \frac{\begin{array}{c} \frac{\text{d\acute{e}t H}}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \\ \end{array} $	$ \frac{A}{C} \frac{\det T}{C} \\ \frac{1}{C} \frac{D}{C} $
Y	$\frac{z_{22}}{\det Z} - \frac{z_{12}}{\det Z}$ $-\frac{z_{21}}{\det Z} - \frac{z_{11}}{\det Z}$	y ₁₁ y ₁₂ y ₂₁ y ₂₂	$\frac{\frac{1}{h_{11}}}{\frac{h_{21}}{h_{11}}} - \frac{\frac{h_{12}}{h_{11}}}{\frac{h_{21}}{h_{11}}} - \frac{\frac{h_{12}}{h_{11}}}{\frac{h_{21}}{h_{11}}}$	$\frac{\frac{D}{B}}{-\frac{1}{B}} - \frac{\frac{d\acute{e}t}{B}}{-\frac{1}{B}}$
Н	$\frac{\det Z}{z_{22}} = \frac{z_{12}}{z_{22}} - \frac{z_{21}}{z_{22}} = \frac{1}{z_{22}}$	$ \frac{\frac{1}{y_{11}}}{\frac{y_{21}}{y_{21}}} = \frac{\frac{y_{12}}{y_{11}}}{\frac{y_{11}}{y_{11}}} $	h_{11} h_{12} h_{21} h_{22}	$ \frac{\frac{B}{D}}{\frac{1}{D}} = \frac{\frac{d\acute{et} T}{D}}{\frac{1}{D}} $
Т	$ \frac{z_{11}}{z_{21}} \frac{\det Z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} \frac{z_{22}}{z_{21}} $	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$ \begin{array}{c c} -\frac{\text{dét H}}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{array} $	A B C D

Tableau de conversion