LES CHAMPS VARIABLES

La loi de Faraday

La loi de Faraday ou loi de l'induction électromagnétique, sous forme différentielle, et valable en tout point de l'espace est :

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial\ \vec{B}}{\partial\ t}$$

lien entre les dérivées spatiales de $\vec{E}$ et la dérivée temporelle de $\vec{B}$.

$$\vec{B} = rot\ \vec{A}$$

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial\ t}(rot\ \vec{A}) \qquad rot\ (\vec{E} + \frac{\partial\ \vec{A}}{\partial\ t}) = 0$$

$\vec{E} + \frac{\partial\ \vec{A}}{\partial\ t}$: vecteur dont le rotationnel s'annule $\Rightarrow$ gradient d'une fonction scalaire

$$\vec{E} + \frac{\partial\ \vec{A}}{\partial\ t} = -grad\ V$$

$$\vec{E} = -grad\ V - \frac{\partial\ \vec{A}}{\partial\ t}$$

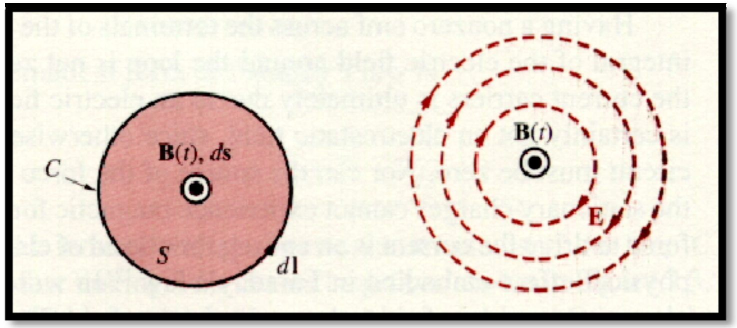
théorème de Stokes $\Rightarrow$ forme intégrale de la loi de Faraday : $\oint_c \vec{E}\ .\ \overrightarrow{d\ell} = -\int_S \frac{\partial\ \vec{B}}{\partial\ t}\ .\ \overrightarrow{dS}$

Par symétrie, le champ électrique induit sera tangentiel (comme le champ magnétique d'un conducteur rectiligne)

$$\oint_c \vec{E}\,.\,\vec{d\ell} = E\,2\pi\, r = -\pi\, r^2\,\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \text{pour } r<a$$

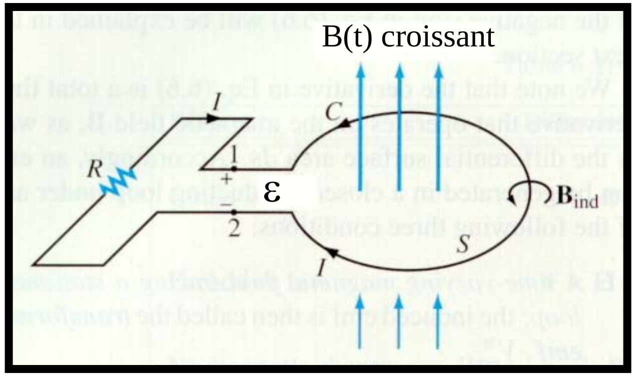
où a est le rayon du disque S. Et donc

$$\vec{E} = -\frac{r}{2}\,\frac{\partial B}{\partial t}\,\vec{1_\phi}$$



Si $\vec{B}$ est croissant, $\vec{E}$ sera dirigé dans le sens horlogique (vu d'en haut).

Plaçons maintenant une boucle conductrice perpendiculaire à la direction de $\vec{B}$.



Boucle dans un champ magnétique variable

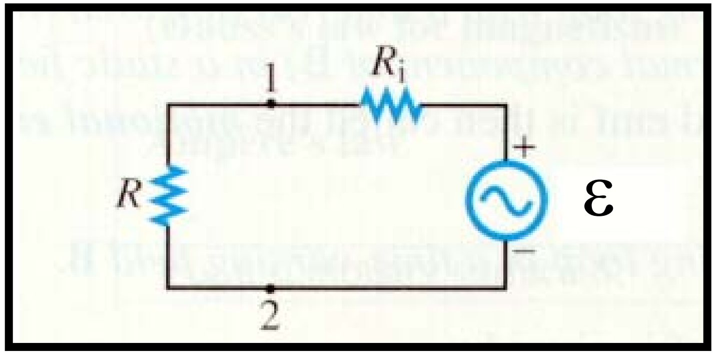
Il apparaît alors dans la boucle une <u>force électromotrice induite</u> :

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\,.\,\vec{d\ell}$$

Si la boucle est ouverte, il apparaîtra une tension, égale à cette fem, entre les bornes 1 et 2 de la boucle. Si la boucle est fermée sur une résistance R, il y aura un courant :

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_i}$$

où R_i est la résistance interne de la boucle et le circuit équivalent est donc le suivant:



Circuit équivalent

Une fem positive donnerait un courant dans le sens positif du contour c (ce signe est indiqué par le + et le – sur la figure). La fem induite s'exprime suivant (7.4) par :

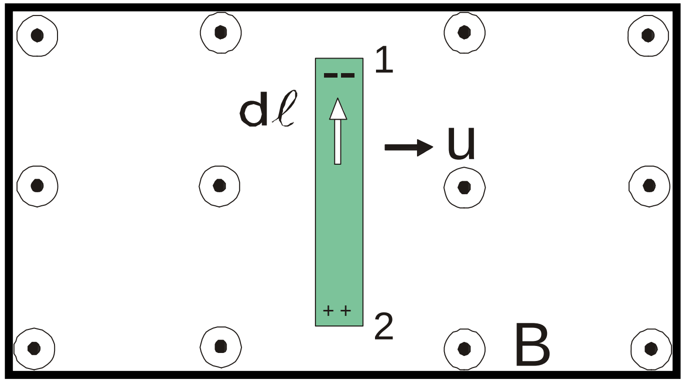
$$\varepsilon = \oint_c \vec{E} \,.\, \overrightarrow{d\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \,.\, \overrightarrow{dS} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

où Φ est le flux du champ magnétique à travers la surface S formée par le circuit.

Si le champ B (et donc Φ) est croissant, la fem induite sera négative, le potentiel de la borne 2 sera supérieur à celui de la borne 1, et le courant I circulera dans le sens horlogique (vu d'en haut).
Le signe de la fem induite est donné par la loi de Lenz : la fem induite tend à s'opposer à toute variation de flux.
La fem produit donc un courant, lequel produit son propre champ magnétique $\vec{B}_{ind}$ qui s'oppose à la variation du flux.

Conducteurs en mouvement dans un champ magnétique

Les charges libres du conducteur seront soumises à une force magnétique



$$\vec{F}_m = q\,\vec{u} \times \vec{B}$$

$\Rightarrow$ séparation des charges.

$\Rightarrow$ champ électrique $\vec{E}_{es}$ (de type électrostatique) tel que la force électrique compensera exactement la force magnétique :

$$\vec{E}_{es} = -\vec{u} \times \vec{B}$$

$\Rightarrow$ tension, induite par le mouvement, entre les extrémités de la tige :

$$V = V_1 - V_2 = -\int_2^1 \vec{E}_{es} \,.\, \vec{d\ell} = \int_2^1 (\vec{u} \times \vec{B}) \,.\, \vec{d\ell} = -u\ B\ h$$

$\Rightarrow$ la tige est devenue l'équivalent d'une pile de fem $\varepsilon = -u\ B\ h$.

Si le conducteur mobile fait partie d'un circuit fermé, la force électromotrice du circuit sera

$$\varepsilon = \oint_c (\vec{u} \times \vec{B}) \,.\, \vec{d\ell}$$

$$\mathcal{E} = \oint_c (\vec{u} \times \vec{B}) \,.\, \overrightarrow{d\ell} = \int_{2'}^{1'} (\vec{u} \times \vec{B}) \,.\, \overrightarrow{d\ell} = -u\ B\ h$$

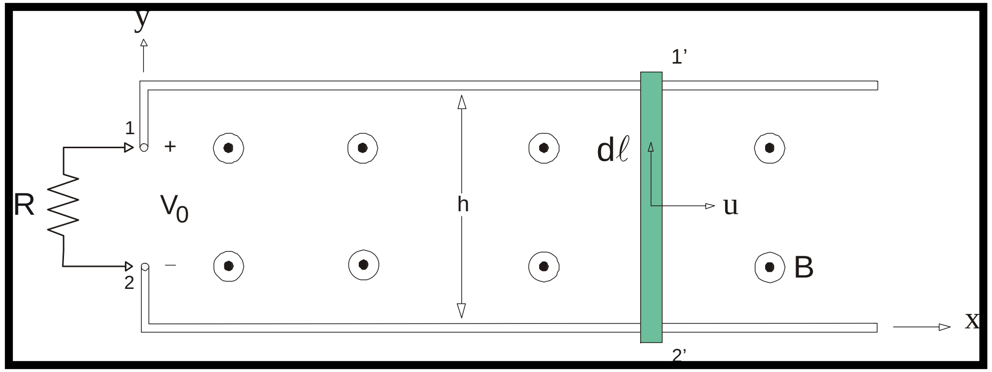
La valeur négative indique que la borne 2 sera positive par rapport à la borne 1.

courant dans la boucle :

$$I = \frac{|\,\mathcal{E}\,|}{R} = \frac{u\ B\ h}{R}$$

dans le sens horlogique

flux coupé par le circuit



$$\Phi = B\ h\ x_0$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ h\ \frac{dx_0}{dt} = -B\ h\ u$$

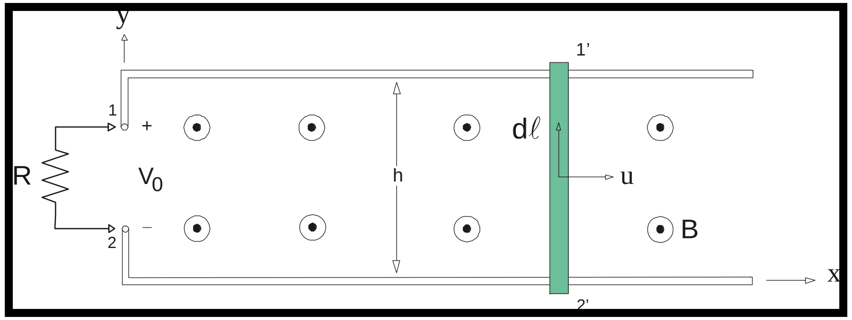
la « <u>règle du flux</u> » : $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$

Circuit en mouvement dans un champ variable avec le temps

$$\mathcal{E} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \,.\, \overrightarrow{dS} + \oint_c (\vec{u} \times \vec{B}) \,.\, \overrightarrow{d\ell}$$

mathématiquement équivalente à la règle du flux

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{S(t)} \vec{B}\,.\,\overrightarrow{dS}$$



Le courant I circule dans le sens horlogique.
Loi de Lenz : il s'oppose à la variation du flux due au mouvement de la tige.

La puissance électrique dissipée dans la résistance est

$$P_{elec} = R\,I^2 = \frac{(B\,h\,u)^2}{R}$$

A cause du courant induit qui la traverse, la tige est soumise à une force magnétique

$$\vec{F}_m = \int_{2'}^{1'} I\,\overrightarrow{d\ell}\times\vec{B} = -I\;B\;h\,\vec{1}_x$$

dirigée dans le sens opposé à celui de $\vec{u}$. Pour maintenir le déplacement à la vitesse u, il faut exercer sur la tige une force mécanique extérieure

$$\vec{F}_{ext} = I\;B\;h\,\vec{1}_x$$

La puissance mécanique fournie est donc

$$P_{méca} = \overrightarrow{F}_{ext} \, . \vec{u} = \frac{(B\,h\,u)^2}{R} = P_{élec}$$

On constate donc que l’énergie mécanique est convertie en énergie électrique puis en énergie thermique. Il s’agit d’un exemple simple de générateur électrique.

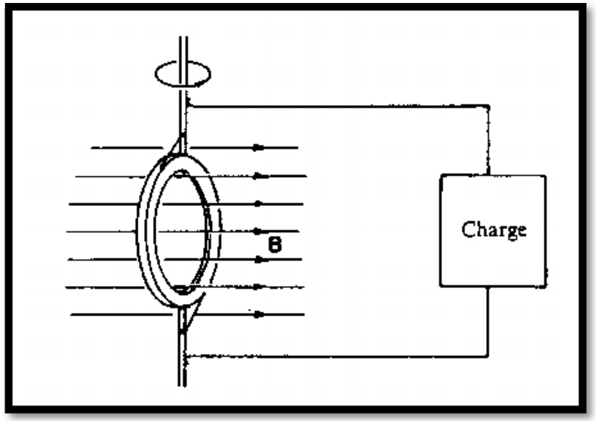
Générateur de courant alternatif

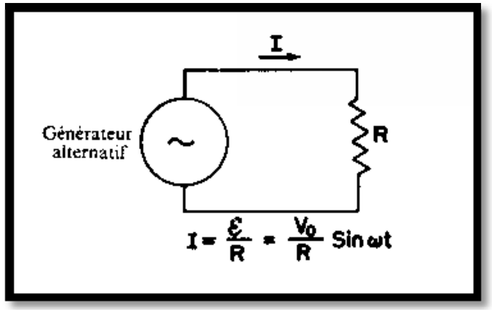
$$\Phi = N\ B\ S \cos \omega t$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = N\ B\ S\ \omega \sin \omega t$$

$$V = \varepsilon = N\ B\ S\ \omega \sin \omega t = V_0 \sin \omega t$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t$$





fem : force par unité de charge intégrée sur la longueur du circuit
⇒ travail fourni par le générateur (c'est à dire la bobine en rotation), pour faire circuler une unité de charge dans le circuit.
⇒ puissance totale fournie au circuit par le générateur est :

$$P_{élec} = \varepsilon\ I$$

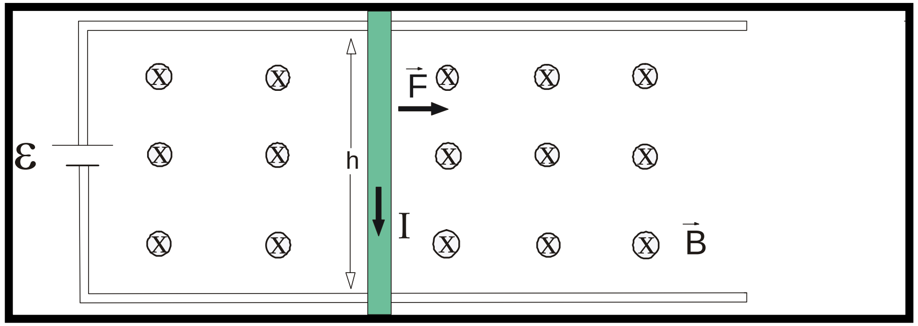
Bobine est parcourue par un courant, et situé dans un champ magnétique, elle est soumise à un couple qui s'oppose à la rotation

$$\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B} = -N\ B\ S\ I \sin \omega t\ \vec{1}_z$$

Puissance mécanique qu'il faut fournir pour maintenir la bobine en rotation est

$$P_{méca} = \omega\ C = \omega\ N\ B\ S\ I \sin \omega t \qquad\qquad P_{\text{méca}} = P_{\text{élec}}$$

Moteur linéaire et force contre-électromotrice



Au départ, lorsque la tige est immobile, elle sera parcourue par un courant

$$I = \mathcal{E}/R$$

$\mathcal{E}$: fem de la pile et R la résistance totale du circuit.

$\Rightarrow$ force magnétique $F_m = I\ h\ B$ qui l'accélère vers la droite.

$\Rightarrow$ conducteur en mouvement dans un champ

$\Rightarrow$ force contre-électromotrice fcem $\mathcal{E}' = u\ B\ h$ qui vient s'opposer à la fem externe (loi de Lenz).

S'il n'y a pas de force mécanique, la tige accélèrera jusqu'à atteindre une vitesse limite telle que $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$. Les deux fem se compensent alors, le courant et la force magnétique deviennent nuls et la tige continue son mouvement à une vitesse constante.

Énergie magnétique

<u>approximation quasi-statique</u>

Energie nécessaire pour établir une certaine configuration de densités de courants.

Travail réversible que l'on doit effectuer pour contrer le champ électrique induit (et donc la fem induite) lorsqu'on établit le courant. Cette énergie est réversible dans la mesure où on pourrait la récupérer en annulant le courant. Nous ne considérons donc pas l'énergie dissipée dans les résistances et définitivement perdue.

Volume D contenant une densité de charge ρ immobile. Lorsque cette densité de charges est mise en mouvement à l'intérieur du volume D fixe, elle produit un potentiel vecteur $\vec{A}$ qui induira une force par unité de volume :

$$\vec{f} = \rho\,\vec{E} = -\rho\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Si $\vec{v}$ est la vitesse des charges , la puissance par unité de volume qui doit être fournie au système pour contrer cette force de réaction vaut

$$p = -\vec{v}\,.\,\vec{f} = \rho\,\vec{v}\,.\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}\,.\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{J} = \rho\,\vec{v}$$

$$P = \frac{d\,W_m}{dt} = \int_D \vec{J}\,.\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,d\tau$$

Dans le cas quasi-statique où le potentiel vecteur varie linéairement avec la densité de courant:

$$\frac{d\,W_m}{dt} = \frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\int_D \vec{J}\,.\,\vec{A}\,d\tau$$

$\Rightarrow$ énergie totale qui a du être fournie au système pour créer la densité de courant $\vec{J}$:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_D \vec{J}\,.\,\vec{A}\,d\tau$$

= énergie magnétique du système.

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,d\tau$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu}\int B^2\,d\tau$$

$$W_e = \frac{1}{2}\int \rho\,V\,d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\,d\tau$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int \vec{A}\,.\,\vec{J}\,d\tau = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,d\tau$$

Coefficients de couplage

ensemble de volumes D_i parcourus par des courants constants I_i , de densité $\vec{J}_i$.

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i \int_{D_i} \vec{J}_i \cdot \vec{A} \, d\tau_i$$

$$\vec{A} = \sum_j \vec{A}_j$$

$\vec{A}_j$ est le potentiel produit par les sources du volume j.

Normalisation par les courants I_i

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j I_i \, I_j \int_{D_i} \frac{\vec{J}_i \cdot \vec{A}_j}{I_i \, I_j} \, d\tau_i$$

Coefficients de couplage inductifs $L_{i\,j}$

$$L_{i\,j} = \frac{1}{I_i \, I_j} \int_{D_i} \vec{J}_i \cdot \vec{A}_j \, d\tau_i$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j L_{i\,j} \, I_i \, I_j$$

En utilisant l'expression du potentiel vecteur :

$$\vec{A}_j = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D_j} \frac{\vec{J}_j}{R} \, d\tau_j$$

on obtient une forme symétrique

$$L_{i\,j} = \frac{\mu_0}{4\pi \, I_i \, I_j} \int_{D_i} \int_{D_j} \frac{\vec{J}_i \,.\, \vec{J}_j}{R} \, d\tau_i \,.\, d\tau_j$$

formule de Neumann.

$L_{i\,j}$ $(i \neq j)$ est l'inductance mutuelle entre D_i et D_j

$L_{i\,i}$ est l'inductance propre (ou auto-inductance ou self-inductance) de D_i

$$L_{i\,j} = L_{j\,i}$$

énergie W_m positive

matrice $[L_{i\,j}]$ est symétrique et définie positive

$$L_{i\,i} > 0$$

Si les domaines D_i représentent des portions de circuits filiformes c_i

$$\vec{J}\, d\tau = I\, \overrightarrow{d\ell}$$

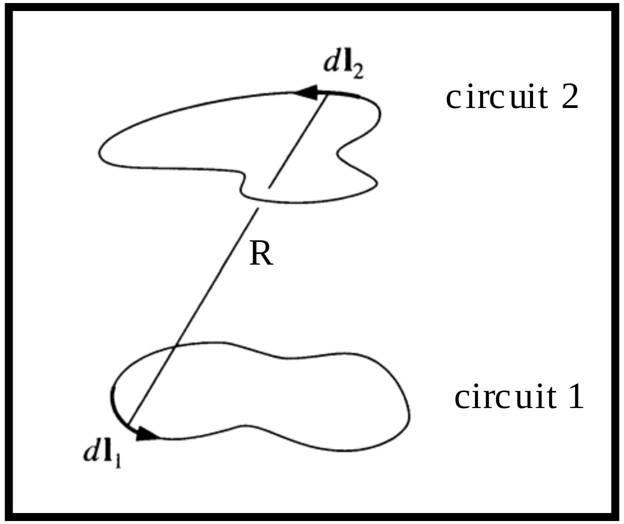
$$L_{i\,j} = \frac{1}{I_j} \int_{c_i} \vec{A}_j \,.\, \overrightarrow{d\ell}_i$$

$$L_{i\,j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{c_i} \int_{c_j} \frac{\overrightarrow{d\ell}_i \,.\, \overrightarrow{d\ell}_j}{R}$$

Si les domaines D_i sont des circuits filiformes et <u>fermés</u>

$$L_{i\,j} = \frac{1}{I_j} \oint_{c_i} \vec{A}_j \,.\, \overrightarrow{d\ell}_i$$

$$L_{i\,j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c_i} \oint_{c_j} \frac{\overrightarrow{d\ell}_i \,.\, \overrightarrow{d\ell}_j}{R}$$



et on pourra introduire la notion de flux coupé par un circuit fermé et de force électromotrice induite.

flux Φ_i coupé par le circuit i

$$\Phi_i = \oint_{c_i} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d\ell_i} \qquad L_{ij} = \frac{1}{I_j} \oint_{c_i} \vec{A}_j \cdot \overrightarrow{d\ell_i}$$

$$\Phi_i = \sum_j \oint_{c_i} \vec{A}_j \cdot \overrightarrow{d\ell_i} = \sum_j L_{ij} \, I_j$$

force électromotrice induite dans le circuit i lorsque les courants varient

$$\varepsilon_i = \oint_{c_i} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell_i} = -\oint_{c_i} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{d\ell_i}$$

$$= -\frac{d}{dt} \oint_{c_i} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d\ell_i} = -\frac{d\,\Phi_i}{dt}$$

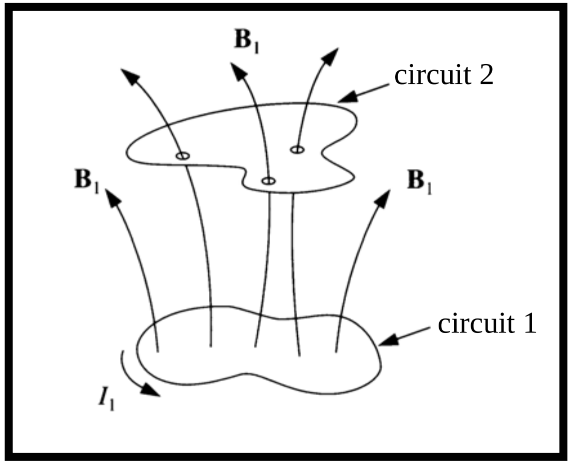
$$\varepsilon_i = -\frac{d\,\Phi_i}{dt} = -\sum_j L_{ij} \frac{d\,I_j}{dt}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j L_{ij} \, I_i \, I_j$$

$$\Phi_i = \sum_j L_{ij} \, I_j$$

$$\Rightarrow \qquad W_m = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i \, I_i$$

Deux circuits filiformes fermés



courant I_1 dans le circuit 1 produira un champ $\vec{B}_1$

circuit 2 coupera un flux $\Phi_2 = L_{21}\, I_1$ et le circuit 1 coupera également un flux $\Phi_1 = L_{11}\, I_1$ dû à son propre courant.

Si un courant I_2 parcourt également le circuit 2, le flux total coupé par chaque circuit sera

$$\Phi_1 = L_{11}\, I_1 + L_{12}\, I_2$$
$$\Phi_2 = L_{21}\, I_1 + L_{22}\, I_2$$

$L_{12} = L_{21} = M$ inductance mutuelle

$L_{11} = L_1 \quad , \quad L_{22} = L_2$ inductances propres

Si les courants varient, les fem induites dans chaque circuit seront

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{d\,I_1}{dt} - M \frac{d\,I_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -M \frac{d\,I_1}{dt} - L_2 \frac{d\,I_2}{dt}$$

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M\, I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

$$\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$$ définie positive

$$L_1 > 0 \quad , \quad L_2 > 0 \quad , \quad L_1 L_2 > M^2$$

coefficient de couplage $k = |M| / \sqrt{L_1 L_2}$ $\quad , k < 1$

Dans le cas d’un circuit (filiforme et fermé) isolé, on aura :

$$\Phi = L\, I$$

où Φ est le flux coupé par le circuit et dû à son propre courant.

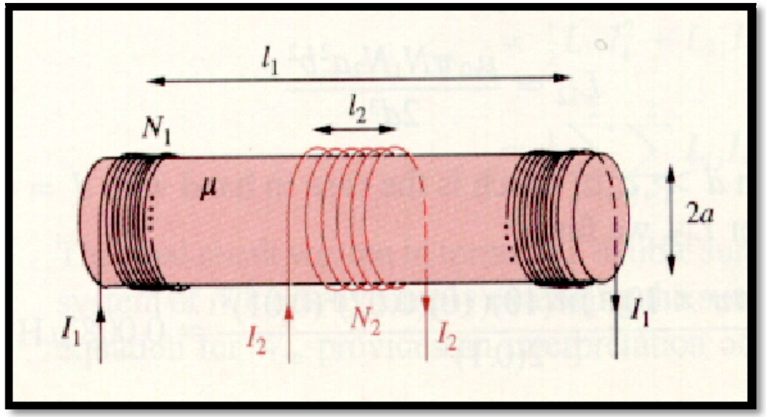
La fem induite est

$$\varepsilon = -L\,\frac{d\,I}{dt}$$

et l’énergie

$$W_m = \frac{1}{2}\,L\,I^2$$

Long solénoïde



$$\vec{B} = \mu_0\, n_1\, I_1\, \vec{1}_z$$

$$\Phi_1' = \mu_0\, n_1\, I_1\, S$$

$$\Phi_1 = N_1\, \Phi' = \mu_0\, N_1^2\, I_1\, S/\ell_1$$

$$L_1 = \frac{\Phi}{I} = \mu_0\, N_1^2\, S/\ell_1 \quad (H)$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2\, .\, volume = \frac{1}{2}\mu_0\, n_1^2\, I_1^2\, S\, .\, \ell_1$$

2ème enroulement

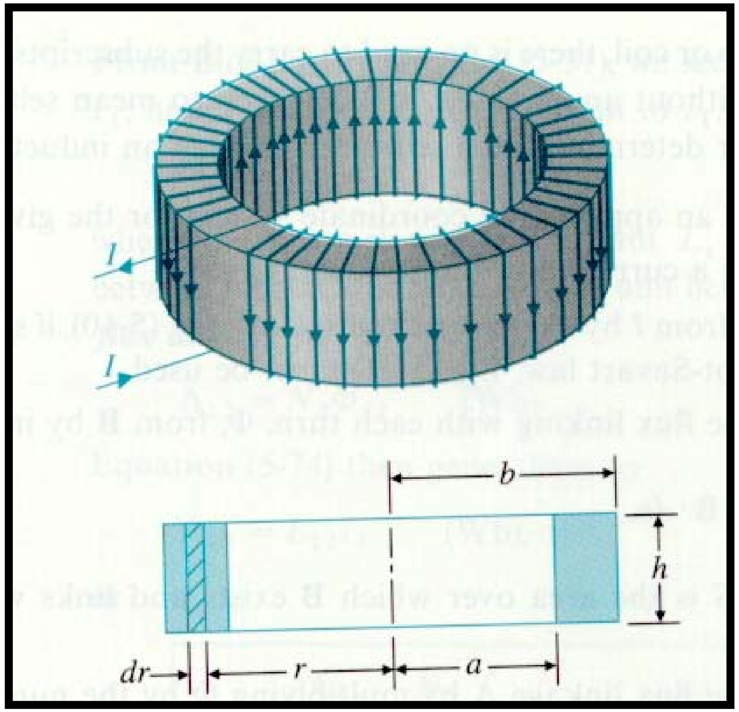
$$\Phi_2 = N_2\, B\, S = \mu_0\, \frac{N_1\, N_2}{\ell_1}\, I_1\, S$$

$$M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \mu_0\, \frac{N_1\, N_2}{\ell_1}\, S$$

matériau magnétique linéaire de perméabilité μ grande

$$\vec{B} = \mu\, n_1\, I_1\, \vec{1}_z \qquad\qquad L_1 = \mu\, N_1^2\, S/\ell_1$$

Tore



$$\vec{H} = \frac{N\,I}{2\pi\,r}\,\vec{1}_\phi$$

matériau magnétique linéaire avec une perméabilité μ

$$\vec{B} = \mu\,\vec{H} = \frac{\mu\,N\,I}{2\pi\,r}\,\vec{1}_\phi$$

$$\Phi = \int_S \vec{B}\,.\,\overrightarrow{dS} = \int_S \frac{\mu\,N\,I}{2\pi\,r}\,h\,d\,r$$

$$= \frac{\mu\,N\,I\,h}{2\pi}\int_a^b \frac{d\,r}{r} = \frac{\mu\,N\,I\,h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\mu\,N^2\,h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

lien avec la réluctance du circuit magnétique

$$\Re = \frac{N\,I}{\Phi} \qquad L = \frac{N\,\Phi}{I} \qquad L = \frac{N^2}{\Re}$$

Forces magnétiques

méthode des travaux virtuels

circuit fermé, avec une inductance L et parcouru par un courant I.

déplacement virtuel Δx

travail de la source + travail mécanique accompli par l'extérieur = variation d'énergie potentielle

$$\Delta W_S \quad + \quad F \,.\, \Delta x \quad = \quad \Delta W_m$$

$$W_m = \frac{1}{2} L \, I^2$$

Le déplacement produira une variation de flux et une fem induite. Le travail fourni par la source pour contrer cette fem pendant le temps Δt du déplacement est

$$\Delta W_S = -\mathcal{E} \, I \, \Delta t = I \, \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \,.\, \Delta t = I \, \Delta \Phi$$

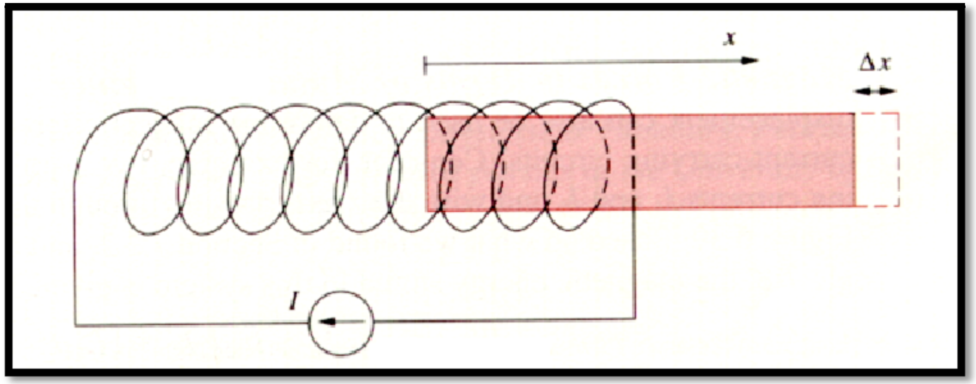
Barreau magnétique dans un solénoïde

déplacement Δx du noyau, donc variation de l'inductance, en maintenant le courant constant.

$$\Delta W_m = \Delta\,(\frac{1}{2}\,L\,I^2) = \Delta\,(\frac{1}{2}\,I\,\Phi) = \frac{1}{2}\,I\,\Delta\,\Phi$$

$$= \frac{1}{2}\,\Delta W_S$$

$$F_x\,.\,\Delta x = -\Delta W_m$$



on retire le barreau de Δx

courant constant :

$$\Delta W_m = \frac{1}{2}\,I^2\;\Delta L$$

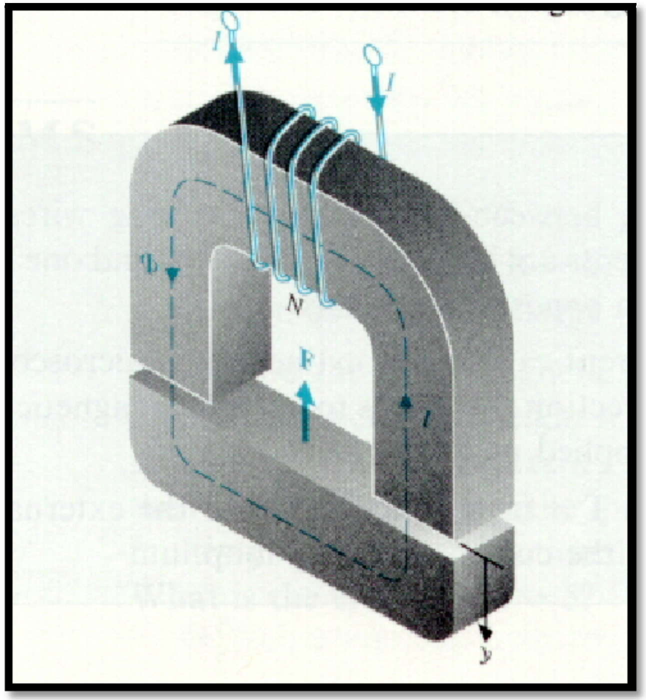
$$F_x = -\frac{1}{2}\,I^2\,\frac{dL}{dx}$$

Un barreau ferromagnétique est attiré vers l'intérieur du solénoïde par les forces magnétiques.

Force portante d’un aimant

accroissement virtuel Δy à la longueur de l’entrefer d'un électro-aimant.

On suppose que ce déplacement ne produit pas de variation de flux, donc pas de fem induite et pas de travail de la source (la source s’ajuste donc pour maintenir le flux constant).



$$F_y \ \Delta y = \Delta W_m$$

$$\Delta W_m = 2 \, \frac{B^2}{2\,\mu_0} \, S \, \Delta y$$

Il faut exercer une force positive pour séparer les armatures et il y a donc une force d’attraction entre les armatures

$$F_y = \frac{B^2 \, S}{\mu_0} = \frac{\Phi^2}{\mu_0 \, S}$$

pression portante sur les armatures $\qquad p = F/2\,S = \dfrac{B^2}{2\,\mu_0} \qquad$ (N/m²)

Le courant de déplacement

$$rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\,\vec{E}}{\partial\,t}$$

deuxième terme est indispensable pour qu'on obtienne bien l'équation de conservation de la charge :

$$div\,\vec{J} = -\frac{\partial\,\rho}{\partial\,t}$$

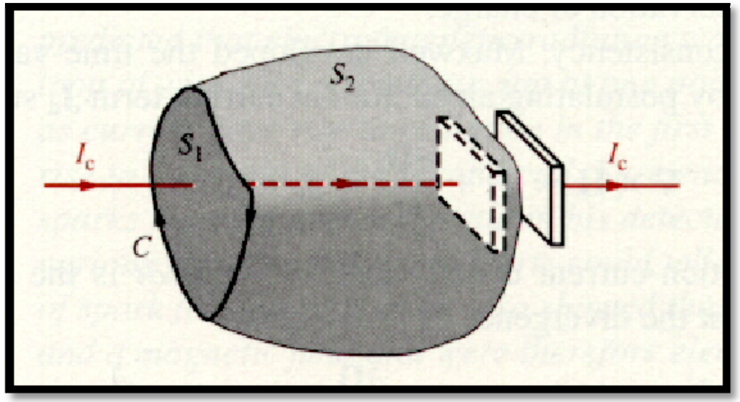
théorème de Stokes

$$\oint_c \vec{B}\,.\,\overrightarrow{d\ell} = \mu_0\,I + \varepsilon_0\,\mu_0 \int_S \frac{\partial\,\vec{E}}{\partial\,t}\,.\,\overrightarrow{dS}$$

$$I_D = \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial\,\vec{E}}{\partial\,t}\,.\,\overrightarrow{dS} \qquad \text{(A)}$$

<u>courant de déplacement</u> à travers la surface S

$$\oint_c \vec{B}\,.\,\overrightarrow{dS} = \mu_0\,(I + I_D)$$



$$\oint_c \vec{B}\,.\,\vec{d\ell} = \int_S \left(\mu_0\,\vec{J}_c + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\,\vec{E}}{\partial\,t}\right).\,\vec{dS}$$

où S est n'importe quelle surface s'appuyant sur le contour fermé c.
Prenons successivement la surface S_1 et la surface S_2.

Sur la surface S_1, il n'y a pas de champ électrique (on suppose que le courant I_c circule dans un conducteur parfait) et donc

$$\oint_c \vec{B}\,.\,\vec{d\ell} = \int_{S_1} \mu_0\,\vec{J}_c\,.\,\vec{dS}_1 = \mu_0\,I_c$$

Sur la surface S_2 (qui passe au milieu du condensateur), il n'y a pas de courant de conduction, mais il y a un champ électrique :

$$E\,(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0\,A}$$

$$\frac{\partial\,E}{\partial\,t} = \frac{1}{\varepsilon_0\,A}\,\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0\,A}\,I_c \qquad\qquad \int_{S_2} \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\,\vec{E}}{\partial\,t}\,.\,\vec{dS}_2 = A\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\,E}{\partial\,t}$$

dans un conducteur le courant de déplacement est généralement négligeable, devant le courant de conduction

$$E = E_0 \cos \omega t$$

$$J_c = \sigma\, E$$

$$J_d = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -\omega\, \varepsilon_0\, E_0 \sin \omega t$$

$$\frac{|\, J_c \,|_{\max}}{|\, J_d \,|_{\max}} = \frac{\sigma}{\omega\, \varepsilon_0}$$

conducteur métallique, $\sigma = 10^7\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$:

$$\frac{|\, J_c \,|_{\max}}{|\, J_d \,|_{\max}} \cong \frac{10^{17}}{f}$$

Les équations de Maxwell dans la matière

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t}$$

$$rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\,\vec{E}}{\partial\,t}$$

diélectrique, la polarisation $\vec{P}$ produit une densité de charges

$$\rho_{pol} = -div\,\vec{P}$$

Lorsque $\vec{P}$ varie avec le temps, les charges de polarisation varient également et produisent un <u>courant de polarisation</u> $\vec{J}_{pol}$.

$$div\,\vec{J}_{pol} = -\frac{\partial\,\rho_{pol}}{\partial\,t}$$

$$div\,\vec{J}_{pol} = \frac{\partial}{\partial\,t}(div\,\vec{P}) \qquad \vec{J}_{pol} = \frac{\partial\,\vec{P}}{\partial\,t}$$

milieu magnétique, la magnétisation $\overrightarrow{M}$ produit une densité de courant

$$\vec{J}_{mag} = rot\ \overrightarrow{M}$$

charge totale

$$\rho = \rho_\ell + \rho_{pol} = \rho_\ell - div\ \vec{P}$$

courant total

$$\vec{J} = \vec{J}_\ell + \vec{J}_{pol} + \vec{J}_{mag}$$

$$= \vec{J}_\ell + \frac{\partial\ \vec{P}}{\partial\ t} + rot\ \overrightarrow{M}$$

$$div\ \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\ (\rho_\ell - div\ \vec{P})$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\ \vec{E} + \vec{P}$$

$$div\ \vec{D} = \rho_\ell$$

$$rot\,\vec{B} = \mu_0\,(\vec{J}_\ell + \frac{\partial\,\vec{P}}{\partial\,t} + rot\,\vec{M}) + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\,\vec{E}}{\partial\,t}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{B} - \vec{M}$$

$$rot\,\vec{H} = \vec{J}_\ell + \frac{\partial\,\vec{D}}{\partial\,t}$$

$$div\,\vec{D} = \rho_\ell$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t}$$

$$rot\,\vec{H} = \vec{J}_\ell + \frac{\partial\,\vec{D}}{\partial\,t}$$

+ relations constitutives liant $\vec{E}$ à $\vec{D}$ et $\vec{B}$ à $\vec{H}$.

Dans le cas particulier des milieux linéaires :

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\,\vec{H}$$

Conditions aux limites des champs électromagnétiques

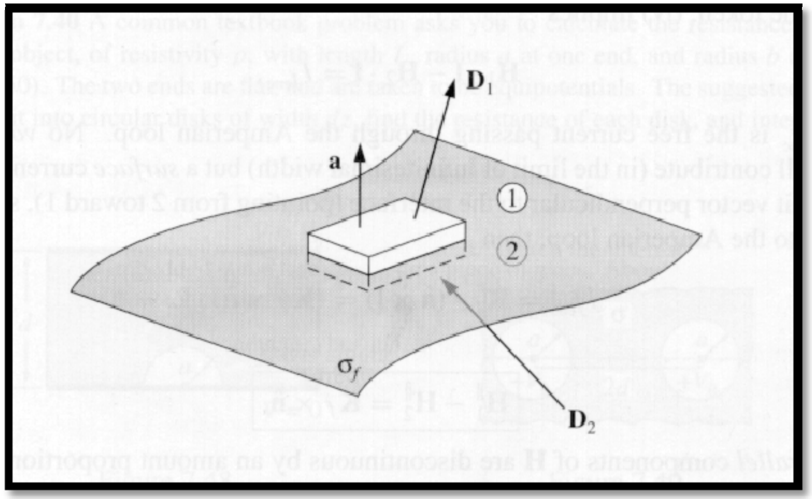
équations de Maxwell sous forme intégrale :

$$\oint_S \vec{D} \,.\, \overrightarrow{dS} = Q_\ell$$

$$\oint_S \vec{B} \,.\, \overrightarrow{dS} = 0$$

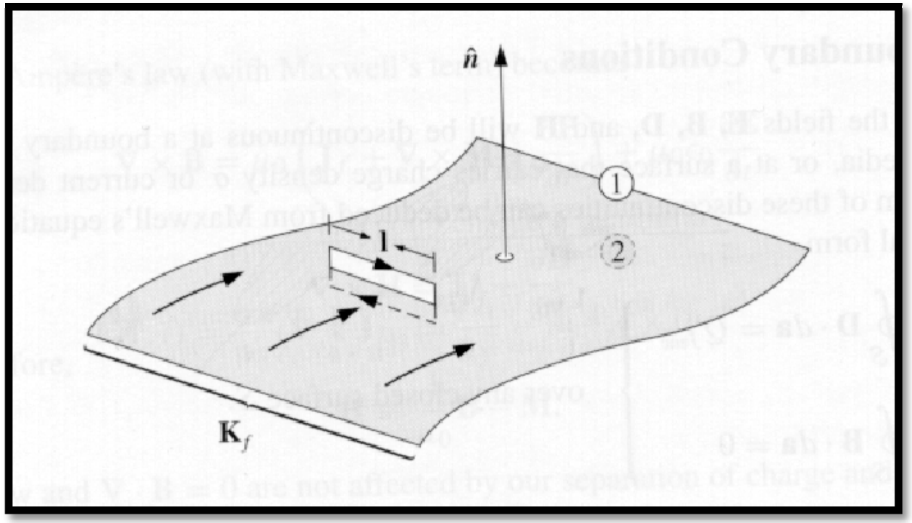
$$\oint_c \vec{E} \,.\, \overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \,.\, \overrightarrow{dS}$$

$$\oint_c \vec{H} \,.\, \overrightarrow{dl} = I_\ell + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D} \,.\, \overrightarrow{dS}$$



$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_\ell$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$



hauteur du contour tend vers zéro

$\Rightarrow$ flux de $\vec{B}$ (ou de $\vec{D}$) devient nul

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\,.\,\vec{l} = 0$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2)\,.\,\vec{l} = I_{\text{dans le cadre}} = l\,\vec{K}_\ell\,.\,(\vec{1}_n \times \vec{1}_l) = l\,(\vec{K}_\ell \times \vec{1}_n)\,.\,\vec{1}_l$$

$$\vec{H}_1 - \vec{H}_2 = \vec{K}_\ell \times \vec{1}_n$$

$$\vec{1}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K}_\ell$$

$\Rightarrow$ mêmes conditions que pour les champs statiques.

milieux <u>linéaires</u> $\Rightarrow$ on peut exprimer les conditions en fonction des seuls champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

$$\varepsilon_1 \, E_{1n} - \varepsilon_2 \, E_{2n} = \sigma_\ell$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\vec{1}_n \times \left(\frac{\vec{B}_1}{\mu_1} - \frac{\vec{B}_2}{\mu_2}\right) = \vec{K}_\ell$$

lorsqu'il n'y a pas de charge ni de courant libre de surface :

$$\varepsilon_1 \, E_{1n} = \varepsilon_2 \, E_{2n}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

Les potentiel retardés

solution générale des équations de Maxwell en présence de charges et de courants : exprimer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ connaissant les charges $\rho\,(x,y,z,t)$ et les courants $\vec{J}\,(x,y,z,t)$.

$$\vec{B} = rot\ \vec{A}$$

$$\vec{E} = -grad\ V - \frac{\partial\,\vec{A}}{\partial\,t}$$

$$\Rightarrow div\ \vec{B} = 0 \qquad \text{et} \qquad rot\ \vec{E} = -\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t}$$

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$div\ (-grad\ V - \frac{\partial\,\vec{A}}{\partial\,t}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial\,t}(div\ \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$rot\ \vec{B} = \mu_0\ \vec{J} + \varepsilon_0\ \mu_0\ \frac{\partial\ \vec{E}}{\partial\ t}$$

$$rot\ (rot\ \vec{A}) = \mu_0\ \vec{J} + \varepsilon_0\ \mu_0\ \frac{\partial}{\partial\ t}(-grad\ V - \frac{\partial\ \vec{A}}{\partial\ t})$$

$$rot\ (rot\ \vec{A}) = grad\ (div\ \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0\ \mu_0\ \frac{\partial^2\ A}{\partial\ t^2} = -\mu_0\ \vec{J} + grad\ (div\ \vec{A} + \varepsilon_0\ \mu_0\ \frac{\partial\ V}{\partial\ t})$$

En statique, on avait choisi la condition

$$div\ \vec{A} = 0$$

Ici on choisira la condition

$$div\ \vec{A} = -\varepsilon_0\ \mu_0\ \frac{\partial\ V}{\partial\ t}$$

$$\Delta V - \varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial^2 \ V}{\partial \ t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \ \mu_0 \ \frac{\partial^2 \ \vec{A}}{\partial \ t^2} = -\mu_0 \ \vec{J}$$

en statique

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad\qquad V = \frac{1}{4 \ \pi \ \varepsilon_0} \int_\tau \frac{\rho}{R} d\tau$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \ \vec{J} \qquad\qquad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\tau \frac{\vec{J}}{R} \ d\tau$$

les <u>potentiels retardés</u> :

$$V(t) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int \frac{\rho\,(t - R/c)}{R}\,d\tau$$

$$\vec{A}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}\,(t - R/c)}{R}\,d\tau$$

où $c = 1 \Big/ \sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$ est la vitesse de propagation (vitesse de la lumière dans le vide).
Pour obtenir le potentiel à un instant t, il faut donc utiliser les valeurs des sources ρ et $\vec{J}$ à des <u>instants antérieurs</u> $(t - R/c)$ fonctions du temps de propagation.