

MILIEUX MAGNÉTIQUES

Diamagnétisme

Lorsqu'on applique un champ extérieur, le moment orbital des électrons est modifié de telle sorte que la variation de moment dipolaire est dirigée dans le sens opposé au champ externe (suivant la loi de Lenz).

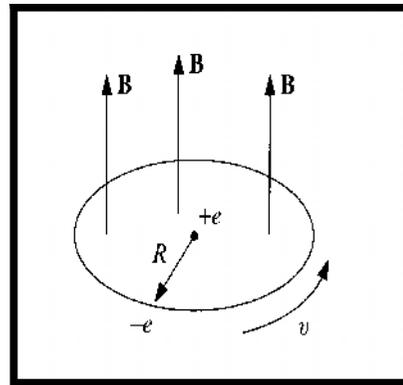
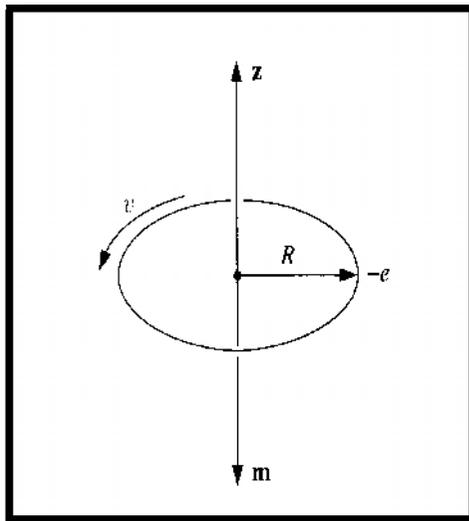
Les moments magnétiques induits des atomes sont dirigés à l'opposé du champ magnétique.

L'effet diamagnétique, qui est présent dans tous les matériaux, est très faible et il est souvent masqué par les effets paramagnétiques et ferromagnétiques.

Effet du champ magnétique sur l'orbite électronique

$$I = \frac{q_e}{T} = \frac{q_e v}{2\pi R}$$

$T = 2\pi r/v$ est la période de rotation et q_e la charge de l'électron.



$$\vec{m} = I \pi R^2 = \frac{1}{2} q_e v R \vec{1}_z$$

$$E_t = -\frac{1}{2} R \frac{dB}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi R E_t = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$q_e E_t = m_e \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} q_e R \frac{dB}{dt}$$

Si le champ magnétique passe de 0 à ΔB , la vitesse passera de v_0 à $v_0 + \Delta v$ avec

$$\Delta v = -\frac{1}{2} \frac{q_e R}{m_e} \Delta B$$

$$\Delta m = \frac{1}{2} q_e \Delta v R \vec{1}_z = -\frac{q_e^2 R^2}{4m_e} \Delta B$$

Le signe moins signifie que le moment ajouté est opposé au champ magnétique. Conformément à la loi de Lenz, le champ induit s'oppose à la variation du flux. La variation de moment magnétique est donc opposée à la direction de B. Ce phénomène est le diamagnétisme.

Paramagnétisme

Les atomes ont des moments magnétiques permanents mais leurs orientations sont aléatoires en l'absence de champ extérieur.

Tendance à s'aligner suivant l'orientation du champ à cause du couple $\vec{m} \times \vec{B}$.

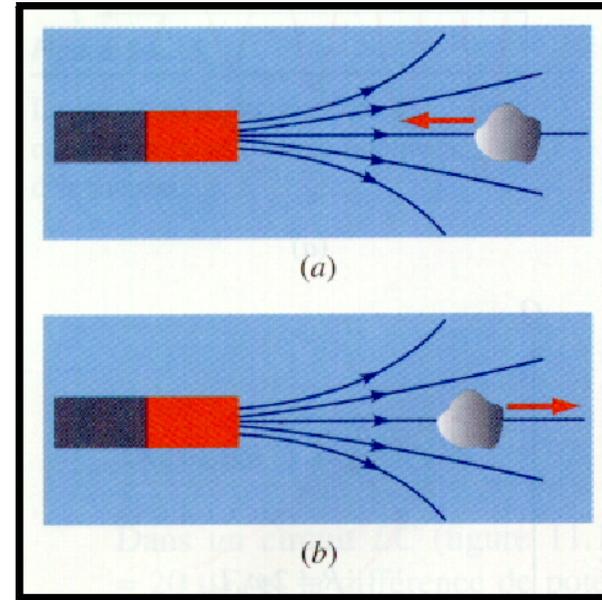
L'alignement partiel des moments dipolaires vient ici renforcer le champ extérieur.

Dans un champ magnétique non uniforme, un dipôle magnétique est soumis à une force :

$$\vec{F} = \text{grad} (\vec{m} \cdot \vec{B})$$

en plus du couple $\vec{m} \times \vec{B}$.

Un diélectrique est toujours attiré vers la région de champ intense.



(a) Un matériau paramagnétique ou ferromagnétique est attiré vers un aimant
(b) Un matériau diamagnétique est repoussé par un aimant

Répartition dipolaire en volume – Vecteur magnétisation

Pour étudier les phénomènes d'un point de vue macroscopique, on définit la magnétisation (ou l'aimantation) d'un milieu, comme le moment magnétique résultant par unité de volume :

\vec{M} : densité de moment magnétique (A/m)

Le vecteur \vec{M} joue un rôle semblable à celui de la polarisation \vec{P} dans les milieux diélectriques.

Champ créé par de la matière magnétisée

Potentiel vecteur d'un dipôle magnétique est

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{1}_R}{R^2}$$

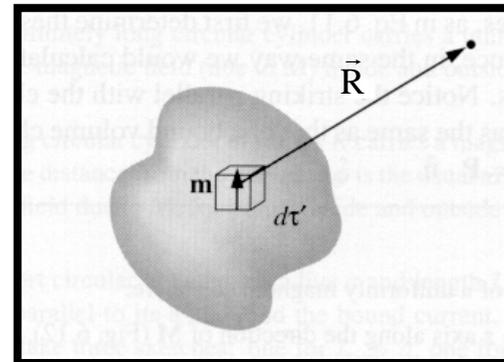
Un volume $d\tau'$ contient un moment dipolaire $\vec{M} d\tau'$

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{M} \times \vec{1}_R}{R^2} d\tau'$$

$$\text{grad}' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\vec{1}_R}{R^2}$$

où le gradient (donc les dérivées) est pris par rapport au point courant du volume τ' .

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \left[\vec{M} \times \text{grad}' \left(\frac{1}{R} \right) \right] d\tau'$$



En utilisant la formule

$$\text{rot} (f \vec{G}) = f \text{rot} \vec{G} - \vec{G} \times \text{grad} f$$

avec $f = 1/R$ et $\vec{G} = \vec{M}(x', y', z')$

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\text{rot}' \vec{M}}{R} d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \text{rot}' \left(\frac{\vec{M}}{R} \right) d\tau'$$

$$\int_{\tau} \text{rot} \vec{G} d\tau = -\oint_S \vec{G} \times d\vec{S}$$

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\text{rot}' M}{R} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{M} \times d\vec{S}'}{R}$$

où S' est la surface extérieure du volume magnétisé τ' .

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{J}_{mag}}{R} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{K}_{mag}}{R} dS'$$

Le volume magnétisé peut donc être modélisé au moyen d'une densité volumique de courants de magnétisation

$$\vec{J}_{mag} = \text{rot } \vec{M} \quad (\text{A/m}^2)$$

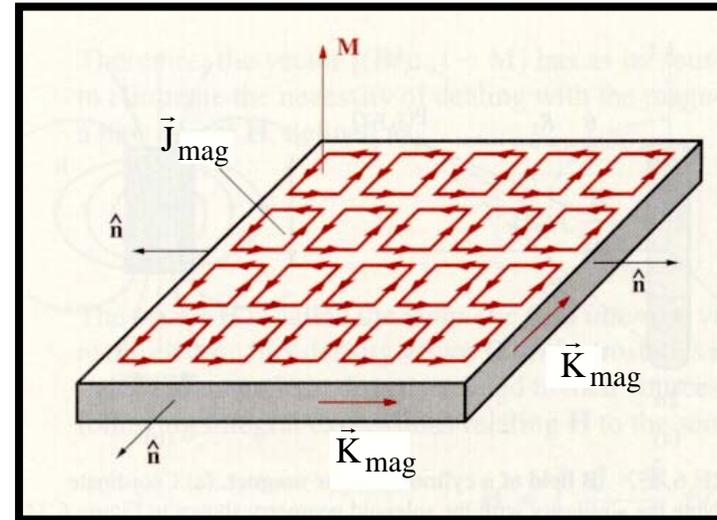
et d'une densité surfacique de courants de magnétisation

$$\vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \vec{1}_n \quad (\text{A/m})$$

Interprétation des courants de magnétisation

Magnétisation uniforme.

$$\vec{J}_{mag} = \text{rot } \vec{M} = 0$$



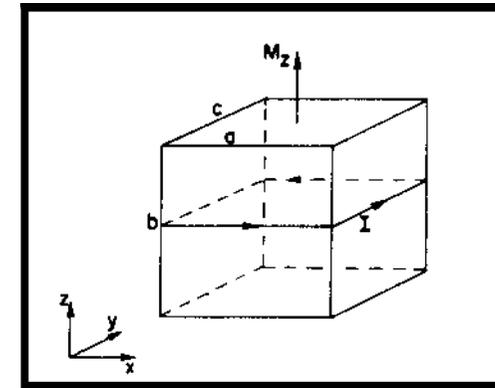
Bloc à l'intérieur de la matière aimantée

Le moment magnétique total du bloc est égal au produit de la magnétisation par le volume :

$$m = M a b c$$

Le moment d'un dipôle est par définition le produit du courant par la surface, et la surface de la boucle est $S = a c$,

$$m = I S = I a c \quad I = M b$$

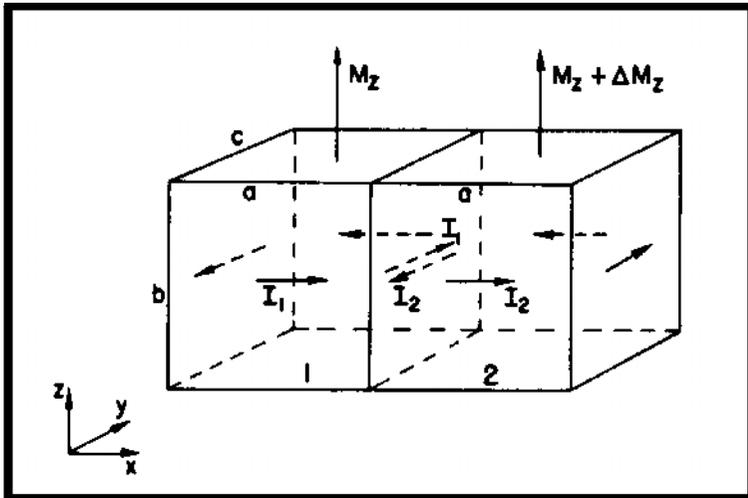


Le courant superficiel est le courant par unité de longueur (verticalement) sur chacune des faces verticales :

$$K = I/b = M$$

$$\vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \vec{1}_n$$

Magnétisation non uniforme



$$I = I_1 - I_2 = M_z b - (M_z + \Delta M_z) b = -\Delta M_z b$$

$$\Delta M_z = \frac{\partial M_z}{\partial x} \cdot a$$

$$I = -\frac{\partial M_z}{\partial x} a b$$

$$J_y = \frac{I}{a b} = -\frac{\partial M_z}{\partial x}$$

Équations magnétostatiques en présence de milieux magnétiques

Loi d'Ampère dans un milieu magnétique

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

La densité de courant doit inclure tous les courants :

$$\vec{J} = \vec{J}_\ell + \vec{J}_{mag}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \vec{J} &= \vec{J}_\ell + \vec{J}_{mag} \\ &= \vec{J}_\ell + \text{rot } \vec{M} \end{aligned}$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_\ell$$

excitation magnétique, champ magnétisant.

Nouvelle grandeur

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (\text{A/m})$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_\ell$$

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_\ell$$

en général, la divergence de H ne s'annule pas.

Milieux magnétiques linéaires

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

pour un matériau linéaire et isotrope.

La constante χ_m , sans dimension, est la susceptibilité magnétique du milieu

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \\ &= \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}\end{aligned}$$

μ est la perméabilité du milieu et μ_r la perméabilité relative.

μ_0 : perméabilité du vide.

Dans un milieu linéaire et homogène, la densité volumique de courant de magnétisation sera proportionnelle, en tout point, à la densité de courant libre :

$$\vec{J}_{mag} = \text{rot } \vec{M} = \text{rot } (\chi_m \vec{H}) = (\mu_r - 1) \vec{J}_\ell$$

En particulier, s'il n'y a pas de courant libre à l'intérieur du matériau, on y aura $\vec{J}_{mag} = 0$ et tous les courants de magnétisation seront en surface.

$\vec{B} = \mu \vec{H}$: relation constitutive du matériau magnétique linéaire

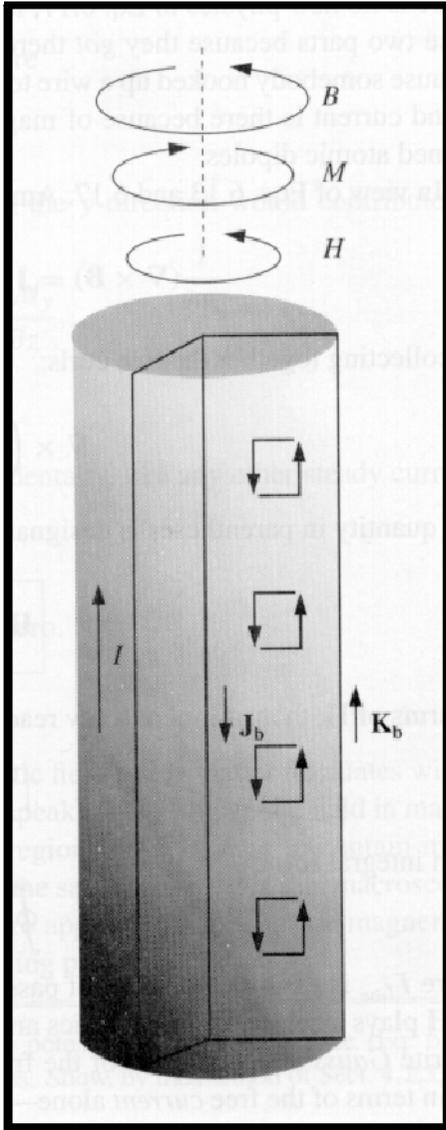
$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$: la relation constitutive d'un diélectrique

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$: relation constitutive d'un milieu conducteur.

Dans un milieu diamagnétique, la susceptibilité sera un très petit nombre négatif $\chi_m \cong -10^{-5}$, la perméabilité relative sera $\mu_r < 1$, et le champ magnétique sera (très légèrement) plus faible que ce qu'il aurait été dans le vide.

Dans un milieu paramagnétique, la susceptibilité sera un très petit nombre positif $\chi_m \cong 10^{-5}$, la perméabilité relative sera $\mu_r > 1$, et le champ magnétique sera (très légèrement) plus grand que ce qu'il aurait été dans le vide.
(contraire à celui des dipôles électriques dans un diélectrique où l'alignement des dipôles donne un champ « de réaction » de sens opposé au champ externe et donc un champ électrique intérieur net plus faible).

Conducteur cylindrique



$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_\ell$$

$$\vec{H} = \frac{I r}{2\pi b^2} \vec{1}_\phi \quad r < b$$

$$= \frac{I}{2\pi r} \vec{1}_\phi \quad r > b$$

Le cuivre est diamagnétique $\vec{M} = \chi_{\text{cuivre}} \vec{H}$ (avec $\chi_{\text{cuivre}} = -3,4 \cdot 10^{-5}$),

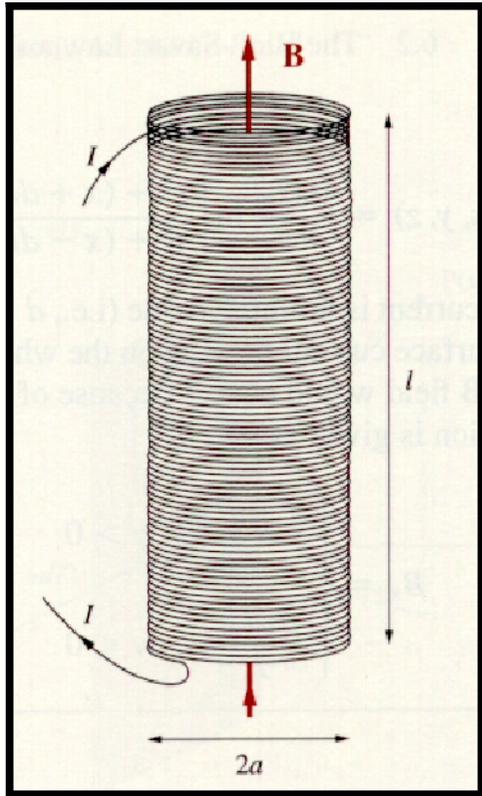
$$\vec{J}_{\text{mag}} = \chi_{\text{cuivre}} \frac{I}{\pi b^2} \vec{1}_z = \chi_{\text{cuivre}} \vec{J}_\ell$$

sera opposé au courant libre, tandis que le courant superficiel \vec{K}_{mag} aura le même sens que I.

$$\vec{B} = \frac{\mu I r}{2\pi b^2} \vec{1}_\phi \quad r < b$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{1}_\phi \quad r > b$$

Solénoïde infini



Si l'axe du solénoïde est aligné suivant z :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 n I \vec{1}_z && \text{à l'intérieur} \\ &= 0 && \text{à l'extérieur} \end{aligned}$$

où n est le nombre de spires par unité de longueur.

Rempli d'un matériau magnétique linéaire

$$\begin{aligned} \vec{H} &= n I \vec{1}_z && \text{à l'intérieur} \\ &= 0 && \text{à l'extérieur} \end{aligned}$$

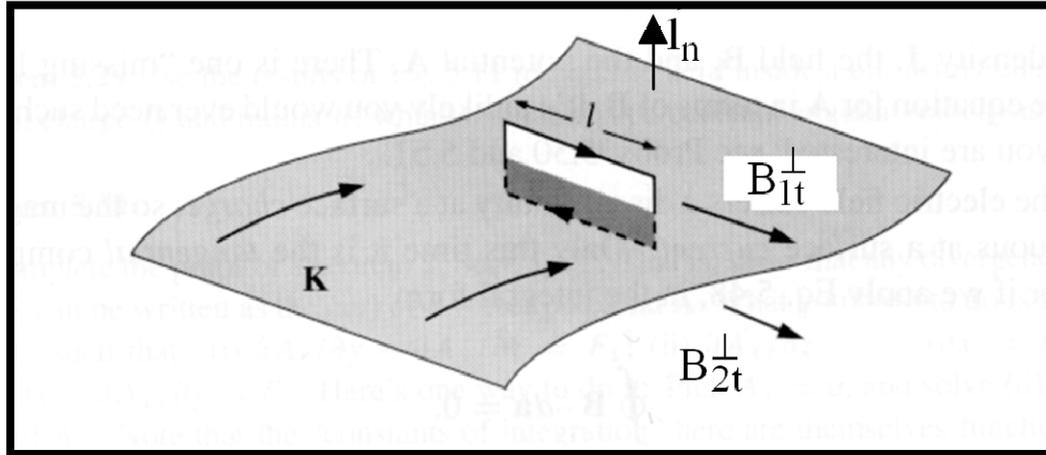
$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu n I \vec{1}_z && \text{à l'intérieur} \\ &= 0 && \text{à l'extérieur} \end{aligned}$$

Si le milieu est paramagnétique, le champ B est renforcé, tandis que si le milieu est diamagnétique le champ est diminué. La densité superficielle de courant de magnétisation

$$\vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \vec{1}_n = \chi_m (\vec{H} \times \vec{1}_n) = \chi_m n I \vec{1}_\phi$$

est en effet dans le même sens que I dans le cas paramagnétique ($\chi_m > 0$) et dans le sens opposé dans le cas diamagnétique ($\chi_m < 0$).

Conditions aux limites



$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow B_{1n} = B_{2n}$$

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \vec{1}_n \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \mu_0 \vec{K}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \Rightarrow H_{1n} - H_{2n} = -(M_{1n} - M_{2n})$$

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_\ell \Rightarrow \vec{1}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K}_\ell$$

où $\vec{1}_n$ est la normale dirigée de 2 \rightarrow 1 et \vec{K}_ℓ est la densité superficielle de courant libre à la surface de séparation.

En l'absence de courant libre de surface $\vec{K}_\ell = 0$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

Dans le cas particulier de l'interface entre deux milieux magnétiques linéaires

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

Ferromagnétisme

Fer, nickel, cobalt ou leurs alliages : effet résultant des moments magnétiques est beaucoup plus grand que dans le cas du paramagnétisme ou du diamagnétisme.

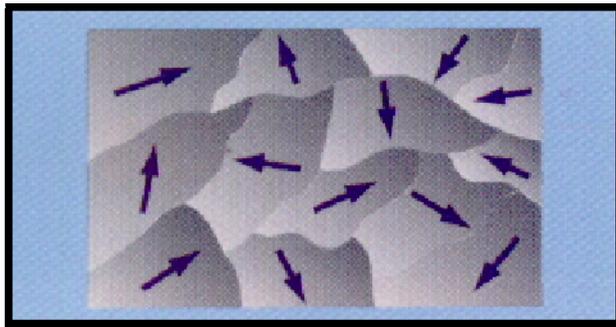
Comme dans les milieux paramagnétiques, l'aimantation des matériaux ferromagnétiques provient du moment magnétique associé au spin des électrons dans la couche interne de l'atome.

L'élément nouveau est une force d'interaction entre les dipôles voisins, qui est beaucoup plus grande que l'interaction magnétique directe.

Mécanique quantique : les moments magnétiques des atomes voisins ont tendance à s'aligner parallèlement l'un à l'autre.

Les moments ne s'alignent parfaitement qu'à l'intérieur de petits domaines magnétiques de dimension inférieure à 1 mm.

Bien que l'alignement soit parfait à l'intérieur de chaque domaine (même en l'absence d'un champ magnétique appliqué), les domaines ont des orientations aléatoires et il n'y a pas de magnétisation globale.



Le ferromagnétisme n'apparaît que dans les milieux où l'énergie est réduite si les spins sont parallèles plutôt que s'ils sont opposés.

Energie associée aux parois.

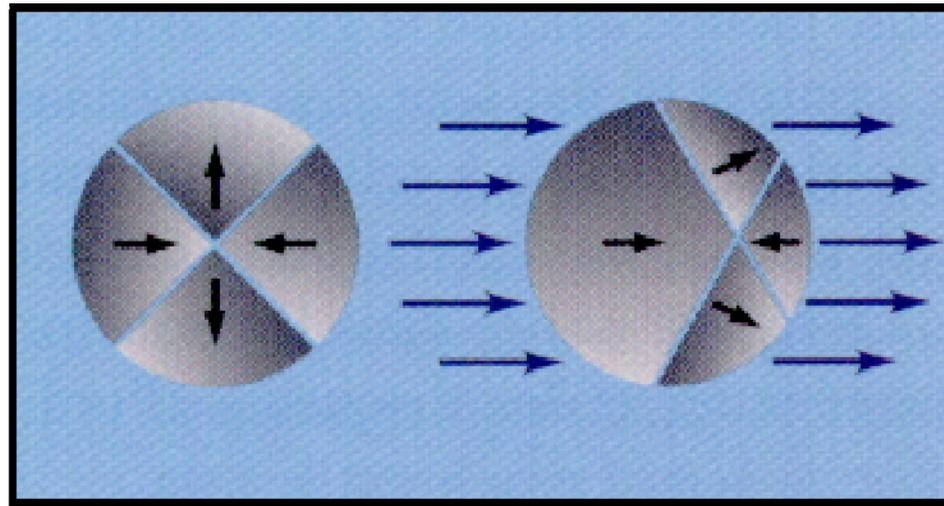
Les dimensions et l'orientation aléatoire des domaines correspondent à la situation où l'énergie totale du système est minimale.

Champ extérieur :

champ faible : les domaines dont les moments sont alignés parallèlement au champ grandissent aux dépens des autres.

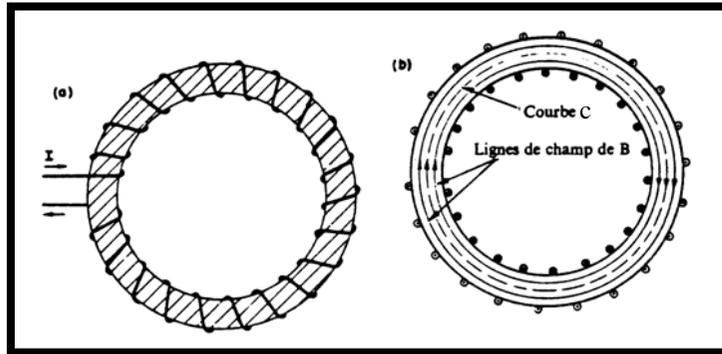
champ plus élevé : les domaines subissent également une rotation qui les fait s'aligner sur le champ extérieur.

champ suffisamment élevé : il ne restera qu'un seul domaine et le matériau sera saturé.



A très haute température, l'agitation thermique détruit l'organisation des domaines magnétiques. Au-delà d'une température critique précise, appelée point de Curie (770°C pour le fer), le matériau cesse d'être ferromagnétique et devient paramagnétique.

Courbe de première aimantation et cycle d'hystérésis



$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = N I_\ell$$

$$\vec{H} = \frac{N I_\ell}{2\pi r} \vec{1}_\phi \quad (A/m)$$

N est le nombre de spires.

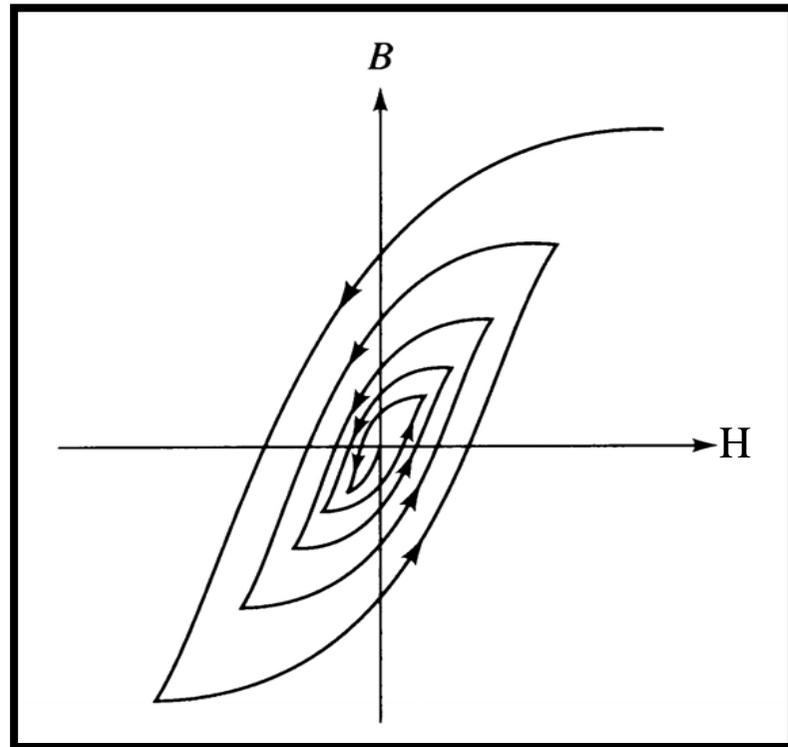
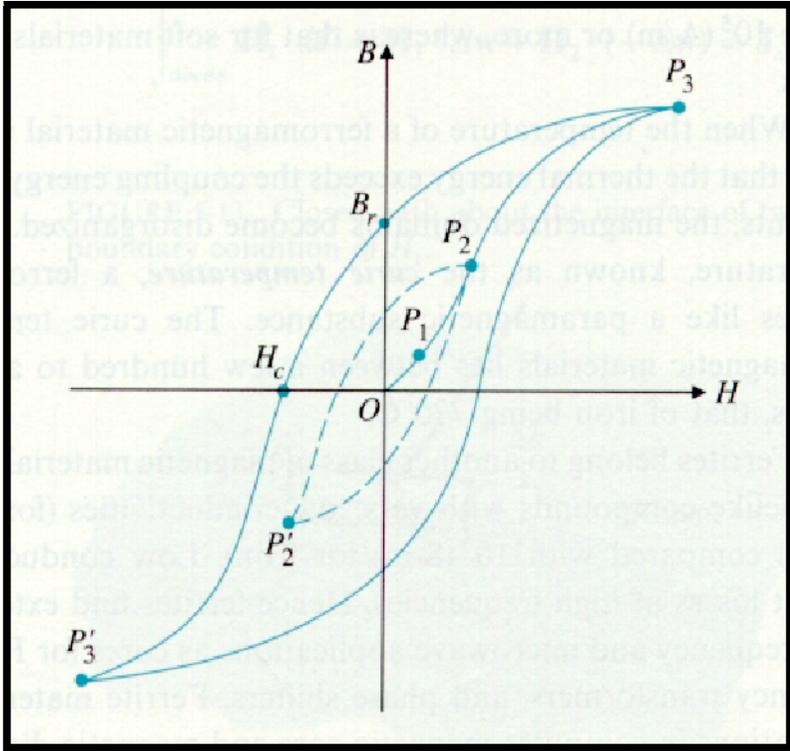
H est directement proportionnel à I_ℓ : champ magnétisant.

$$\vec{B} = \mu_0 [\vec{H} + \vec{M}]$$

il n'y a pas de relation simple entre M et H pour un matériau ferromagnétique.

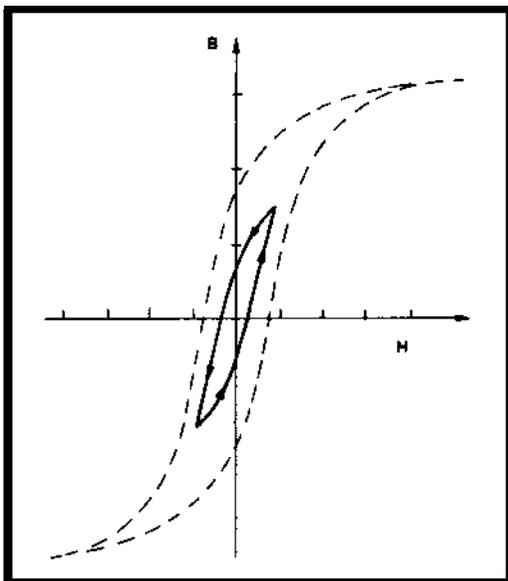
$$\vec{H} \cong \frac{N I_\ell}{2\pi a} \vec{1}_\phi$$

où a est le (grand) rayon du tore.

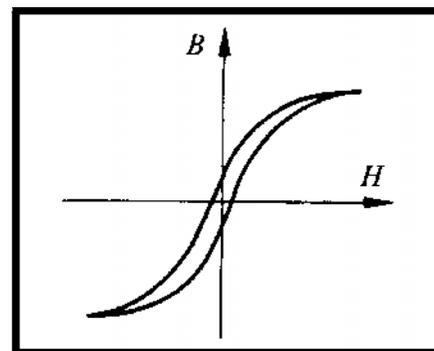


Matériaux ferromagnétiques

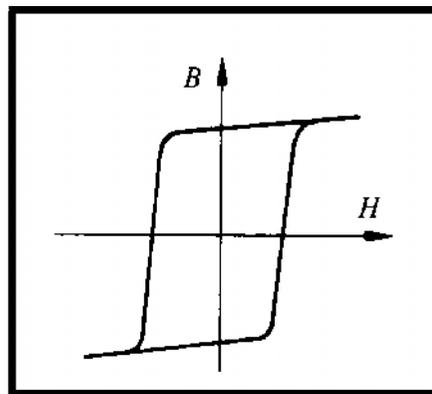
matériaux ferromagnétiques doux.



$$B \approx \mu H$$



matériaux ferromagnétiques durs.



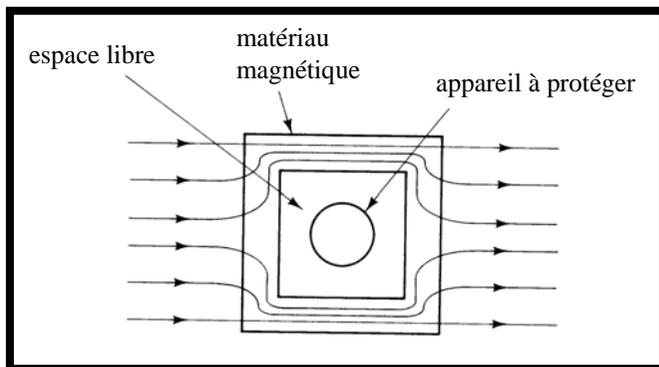
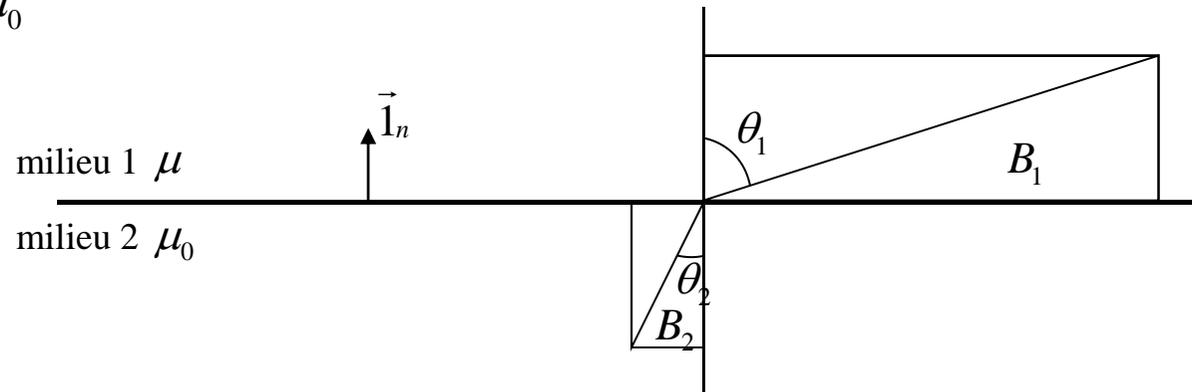
	$B_{sat} (T)$	$\mu_{r \max}$	$B_r (T)$	$H_c (A/m)$
Fer doux	2,1	5 000		
cobalt	1,8	250		
nickel	0,6	600		
type permalloy	0,8	150 000	0,006	1,2
type alnico	1,5		1,3	60 000
ferrite doux	0,28	3000	0,1	24
ferrite dur	0,45		0,34	190 000

Blindage magnétique

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow \mu_0 B_{1t} = \mu B_{2t}$$

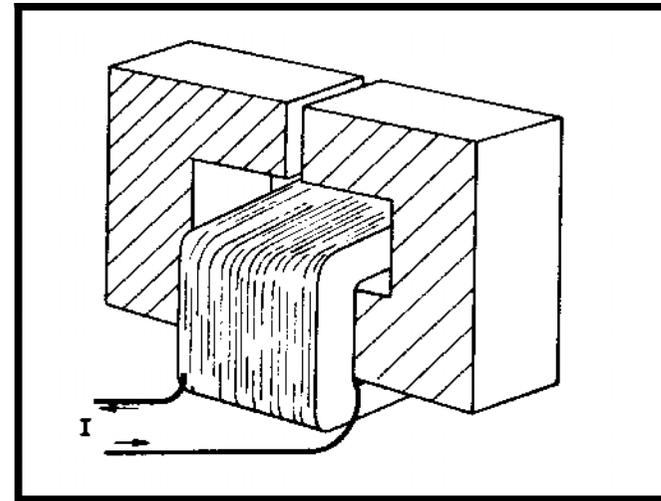
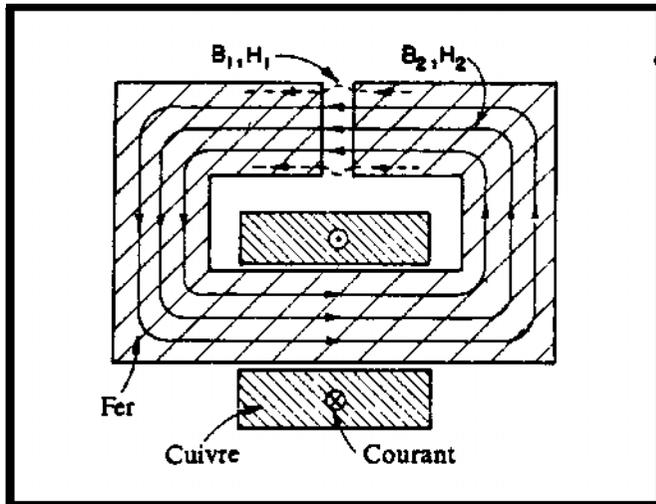
$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\mu}{\mu_0} \operatorname{tg} \theta_2 = \mu_r \operatorname{tg} \theta_2$$



Les lignes de champ vont avoir tendance à s'aligner le long de la paroi à l'intérieur du matériau magnétique ($\theta_1 \gg \theta_2$).

Si le matériau magnétique entoure un appareil, la pénétration du champ magnétique dans la zone intérieure sera fortement réduite.

Point de fonctionnement d'un aimant

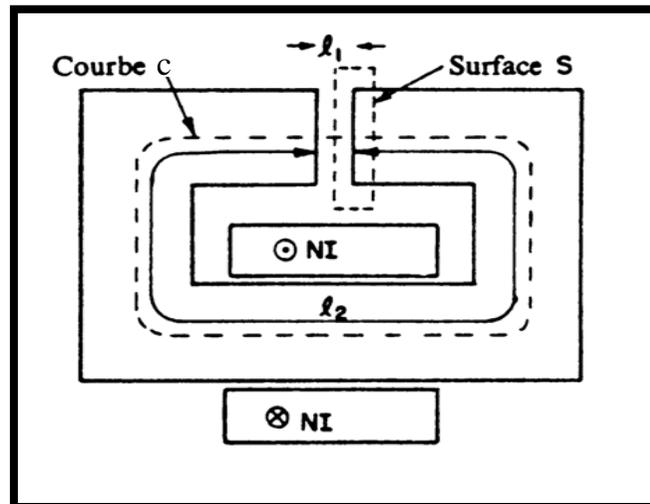


$$B_1 = B_2$$

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 = N I$$

$$B_1 = \mu_0 H_1$$

$$\frac{B_2}{\mu_0} \ell_1 + H_2 \ell_2 = N I$$



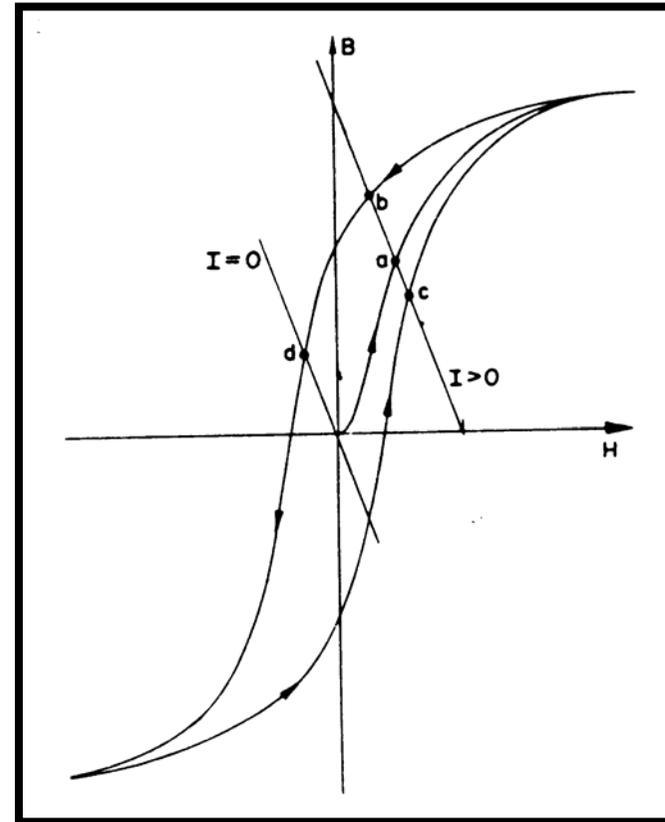
$$H_2 = -\frac{\ell_1}{\mu_0 \ell_2} B_2 + \frac{N I}{\ell_2}$$

aimant permanent

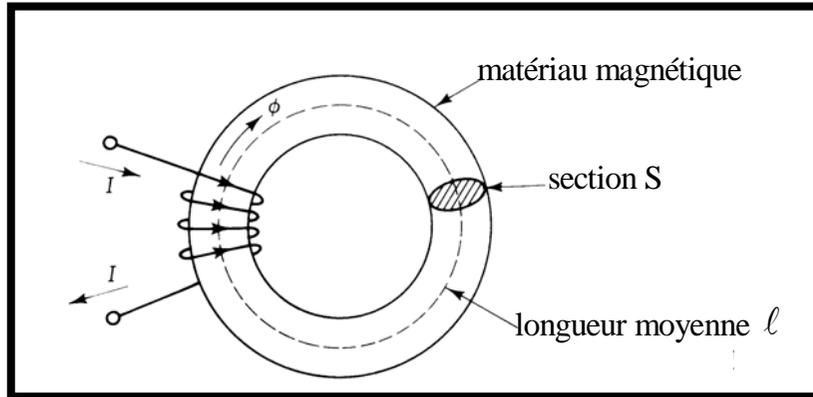
$$B_1 = B_2 = \mu_0 H_1$$

$$H_1 = -\frac{\ell_2}{\ell_1} H_2$$

$$H_2 = -\frac{\ell_1}{\mu_0 \ell_2} B_2$$



Circuits magnétiques



première approximation

1) On admet que les lignes de champ magnétique suivent, sans dispersion, les pièces ferromagnétiques dont elles épousent la forme et dans les entrefers, on leur suppose une forme schématique simple. Le flux magnétique Φ est donc supposé constant tout au long du circuit.

2) Dans chaque section, on admet que le champ B est uniforme et que le flux magnétique est donné par :

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = B S$$

3) On suppose que les matériaux magnétiques sont linéaires avec une certaine perméabilité μ .

Un circuit magnétique est semblable à un circuit conducteur parcouru par un courant :

$$J \Leftrightarrow B$$

$$I \Leftrightarrow \Phi$$

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = N I$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Si les champs B et H sont liés par une relation linéaire \rightarrow relation linéaire entre $N I$ et Φ .

$$N I = \mathfrak{R}_T \Phi$$

Semblable à la loi d'Ohm : $V = R I$

$N I$: force magnétomotrice (ampères-tours)

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum_i \int_{\ell_i} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum_i \mathfrak{R}_i \Phi$$

Semblable à la loi des mailles de Kirchhoff :

$$N I = \sum_i \mathfrak{R}_i \Phi$$

Pour une section de circuit de longueur ℓ :

$$\mathfrak{R} = \frac{\int_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}}{\Phi} = \frac{\int_{\ell} \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{\ell}}{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}$$

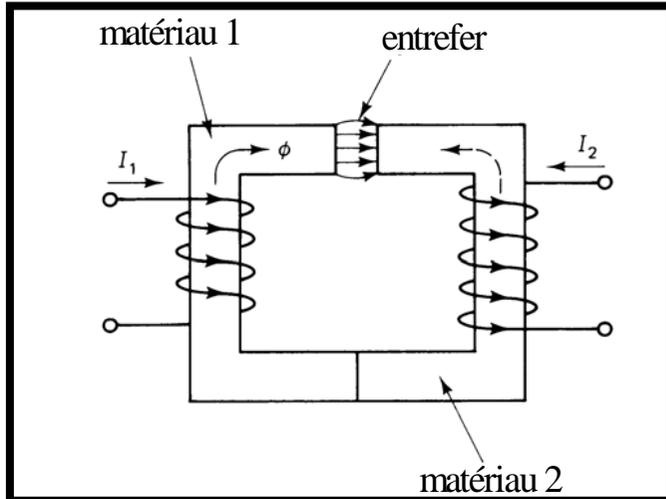
Si B est constant dans une section normale, $B = \Phi / S$

$$\mathfrak{R} = \frac{\int_{\ell} \frac{\Phi}{\mu S} d\ell}{\Phi} = \int_{\ell} \frac{d\ell}{\mu S}$$

si la section est constante

$$\mathfrak{R} = \frac{\ell}{\mu S}$$

Exemple 1



$$fmm = N_1 I_1 - N_2 I_2$$

Les caractéristiques sont :

$$\text{matériau 1 : } \ell_1 = 50 \text{ cm} \quad \mu_1 = 200 \mu_0$$

$$\text{matériau 2 : } \ell_2 = 50 \text{ cm} \quad \mu_2 = 2000 \mu_0$$

$$\text{entrefer : } \ell_3 = 0,2 \text{ cm} \quad \mu_3 = \mu_0$$

$$S = 4 \text{ cm}^2$$

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{0,5}{200 \mu_0 4 \cdot 10^{-4}} = 4,97 \cdot 10^6 \quad H^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{0,5}{2000 \mu_0 4 \cdot 10^{-4}} = 4,97 \cdot 10^5 \quad H^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_3 = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\mu_0 4 \cdot 10^{-4}} = 3,98 \cdot 10^6 \quad H^{-1}$$

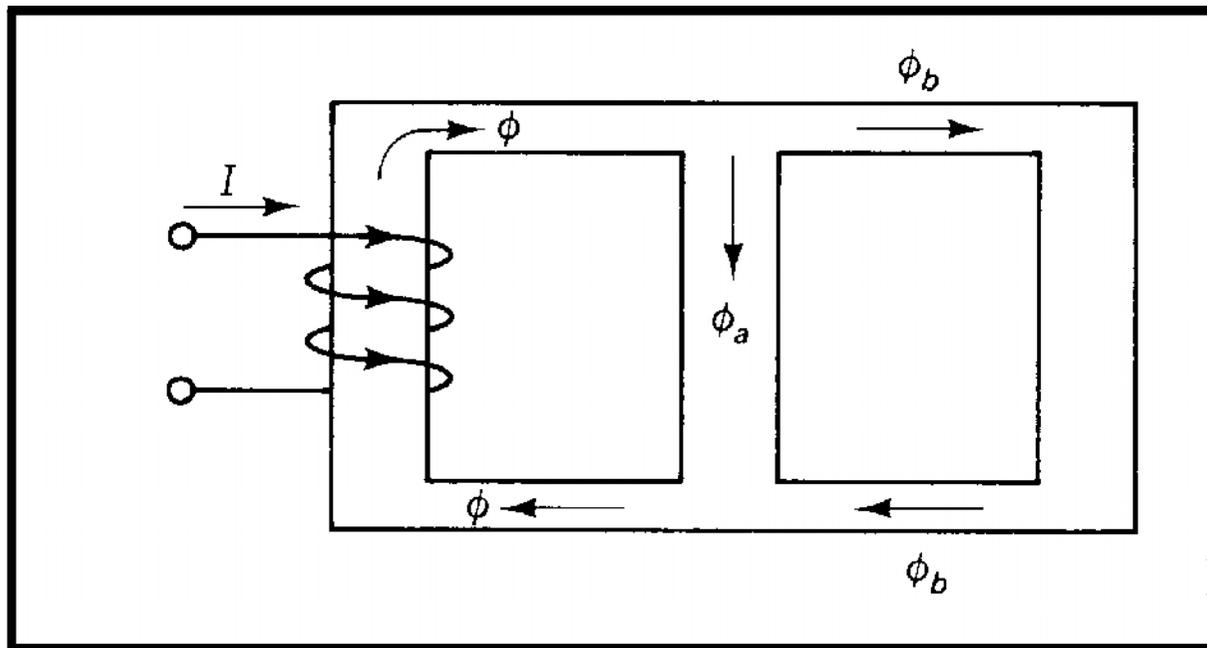
$$\mathfrak{R}_T = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 = 9,44 \cdot 10^6 \quad H^{-1}$$

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = \mathfrak{R}_T \Phi$$

Exemple 2

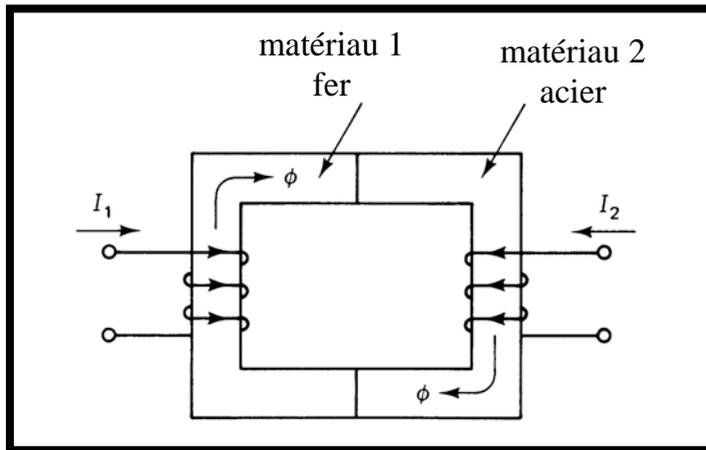
$$\Phi = \Phi_a + \Phi_b$$

$$\mathcal{R}_{\acute{e}q} = \frac{\mathcal{R}_a \mathcal{R}_b}{\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_b}$$



Exemple 3

Si on dispose des courbes de magnétisation des matériaux → calcul plus précis



On souhaite obtenir un flux Φ de $2 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4}} = 0,5 \text{ T}$$

$$H_1 = 1800 \quad \text{A/m}$$

$$H_2 = 200 \quad \text{A/m}$$

$$fmm = \oint \vec{H} \, d\vec{\ell} = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 = 1000 \text{ At}$$

$$fmm = N_1 I_1 + N_2 I_2 = 1000 \text{ At}$$

