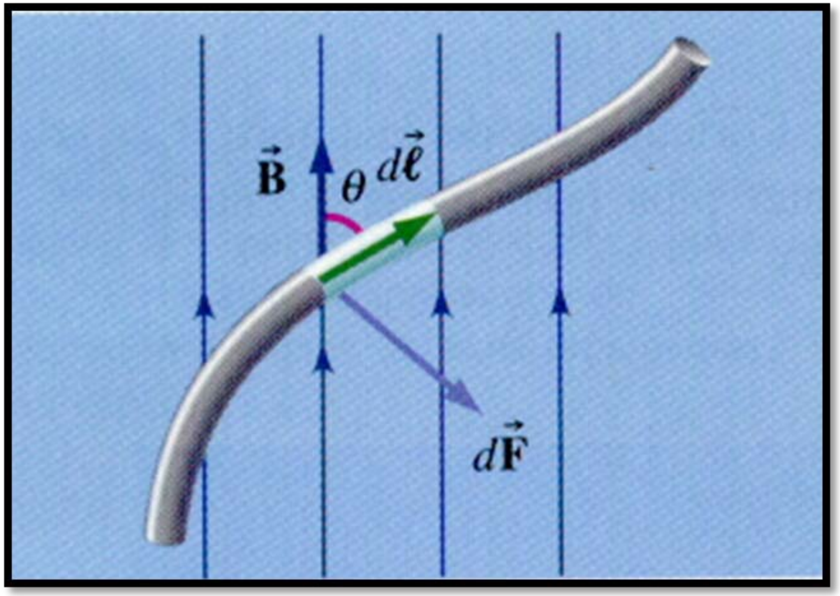
Force de Lorentz:

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Force magnétique

$$\vec{F}_m = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

Fil parcouru par un courant



$$q_e\,(\overrightarrow{v_d} \times \vec{B})$$

$$\overrightarrow{dF} = N_e\,.\,d\tau\,.\,q_e\,(\overrightarrow{v_d} \times \vec{B})$$

$$\overrightarrow{dF} = (\vec{J} \times \vec{B})\,d\tau$$

Si la densité de courant est uniforme dans la section (de surface A) :

$$\overrightarrow{dF} = (\vec{J} \times \vec{B})\,A\,dl$$

$$\vec{J} = \frac{I}{A}\,\overrightarrow{dl}$$

$$\overrightarrow{dF} = I\;\;\overrightarrow{dl} \times \vec{B}$$

Le champ magnétique

$$div\ \overrightarrow{B} = 0$$

$$rot\ \overrightarrow{B} = \mu_0\ \overrightarrow{J}$$

$$\oint_S \overrightarrow{B} \, . \, \overrightarrow{dS} = 0$$

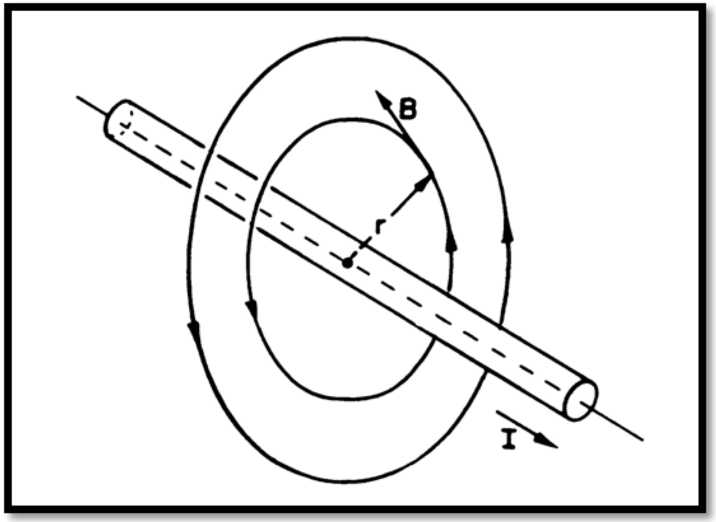
$$\oint_c \overrightarrow{B} \, . \, \overrightarrow{dl} = \mu_0\ I$$

Pas de charges magnétiques.

Les lignes $\overrightarrow{B}$ de doivent donc se refermer sur elles-mêmes en boucles fermées (ou s'étendre jusqu'à l'infini).

$$div\ \overrightarrow{J} = 0$$

Conducteur rectiligne infini



$$\vec{B} = B_\phi \, \vec{1}_\phi$$

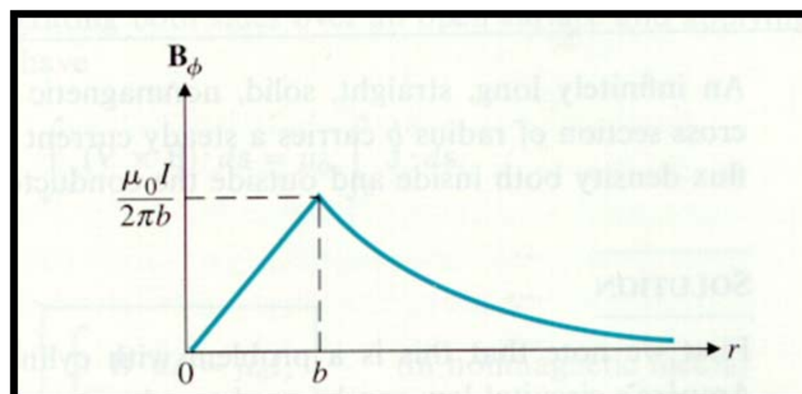
$$\oint_c \vec{B} \, . \, \vec{dl} = B_\phi \, . \oint dl = B_\phi \, . \, 2\pi \, r = \mu_0 \; I$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 \; I}{2\pi \; r} \qquad\qquad r > b$$

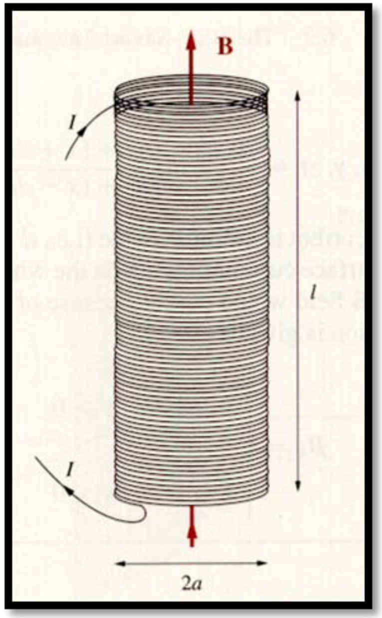
Si la densité de courant est uniforme dans le conducteur

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \; I}{2\pi \; r} \vec{1}_\phi \qquad\qquad r > b$$

$$= \frac{\mu_0 \; I \; r}{2\pi \; b^2} \vec{1}_\phi \qquad\qquad r < b$$



Solénoïde infini

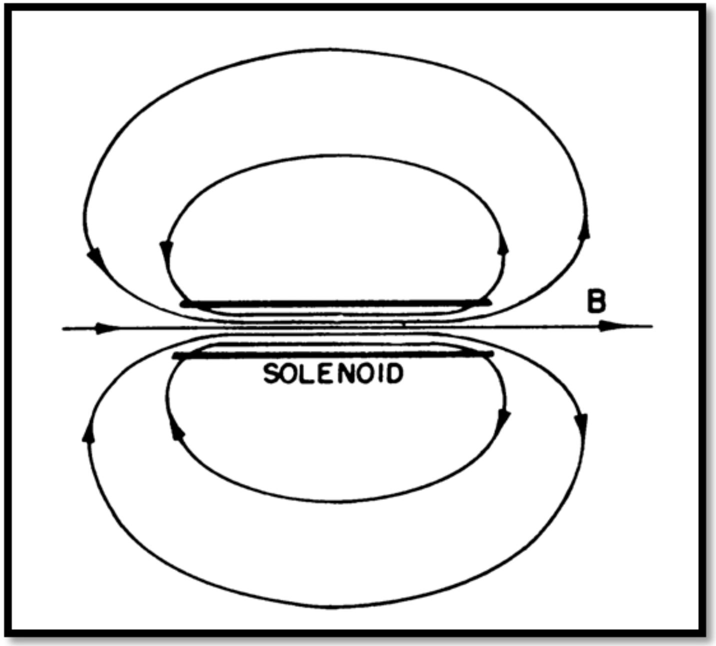


Si l’axe du solénoïde est aligné suivant z :

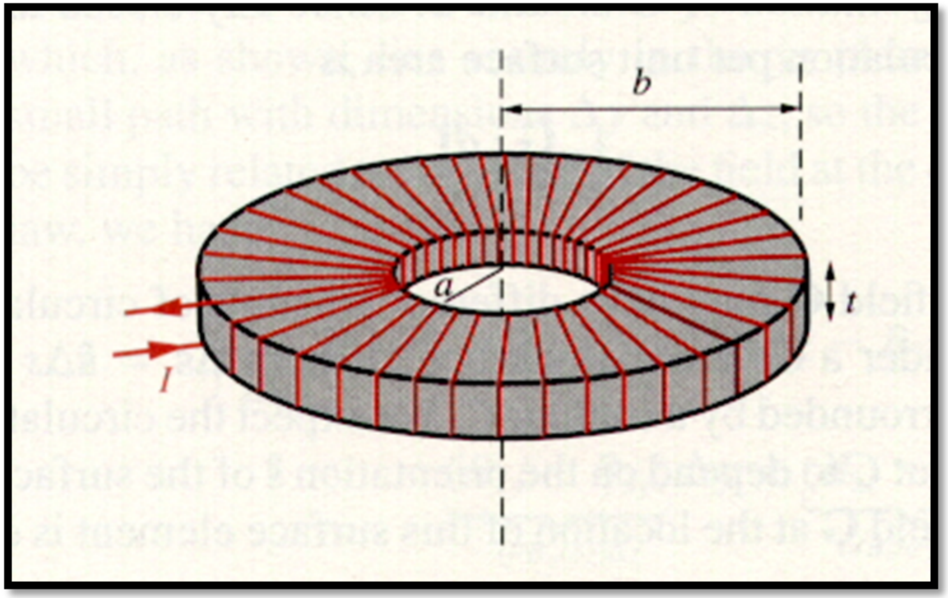
$$\vec{B} = \mu_0 \, n \, I \, \vec{1}_z \qquad \text{à l'intérieur}$$

$$= 0 \qquad \text{à l'extérieur}$$

où n est le nombre de spires par unité de longueur.



Tore



$$\vec{B} = \frac{\mu_0\ N\ I}{2\pi\ r}\vec{1}_\phi \qquad \text{à l'intérieur}$$

$$= 0 \qquad \text{à l'extérieur}$$

ou N est le nombre total de spires.

Le potentiel vecteur magnétique

$$rot\ \vec{E} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = -grad\ V$$

Comme la divergence d'un rotationnel est toujours nulle, on peut écrire

$$\vec{B} = rot\ \vec{A}$$

qui garantira d'office que la divergence de B sera nulle.

Le champ $\vec{A}$ s'appelle le potentiel vecteur magnétique, ou simplement le potentiel vecteur.

$$\vec{A'} = \vec{A} + grad\ \Psi$$

$$div\ \vec{A} = 0$$

2eme équation

$$rot\ \vec{B} = \mu_0\ \vec{J}$$

$$rot\ (rot\ \vec{A}) = \mu_0\ \vec{J}$$

$$rot\ (rot\ \vec{A}) = grad\ (div\ \vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\ \vec{J}$$

Laplacien d'un vecteur

$$\Delta\vec{A} = \Delta A_x\ .\vec{1}_x + \Delta A_y\ .\vec{1}_y + \Delta A_z\ .\vec{1}_z$$

Trois équations de Poisson :

$$\Delta A_x = -\mu_0 \, J_x$$

$$\Delta A_y = -\mu_0 \, J_y$$

$$\Delta A_z = -\mu_0 \, J_z$$

mathématiquement équivalent à

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad V = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho}{R}\, d\tau$$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{J_x}{R}\, d\tau$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\vec{J}}{R}\, d\tau$$

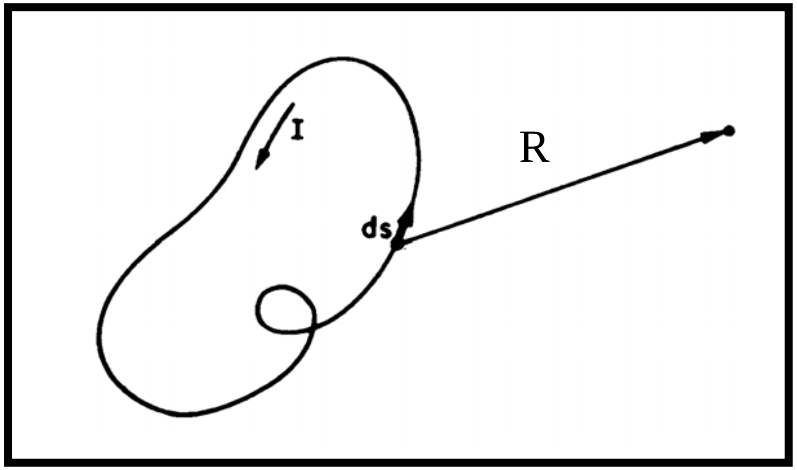
Flux du champ magnétique à travers une surface S : $\Phi = \int_S \vec{B} \, . \, \overrightarrow{dS}$

Par application du théorème de Stokes : $\Phi = \int_S rot\, \vec{A} \, . \, \overrightarrow{dS} = \oint_c \vec{A} \, . \, \overrightarrow{dl}$

Conducteurs filiformes

$$\vec{J}\ d\tau = J\ S\ \overrightarrow{dl} = I\ \overrightarrow{dl}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\int \frac{I}{R}\overrightarrow{dl}$$

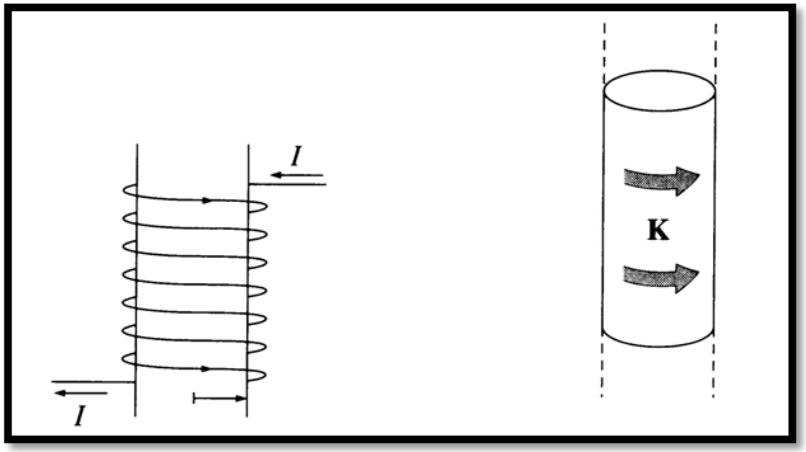


Courant superficiel

$$\vec{K} = \sigma\,\vec{v}_d \qquad \text{(A/m)}$$

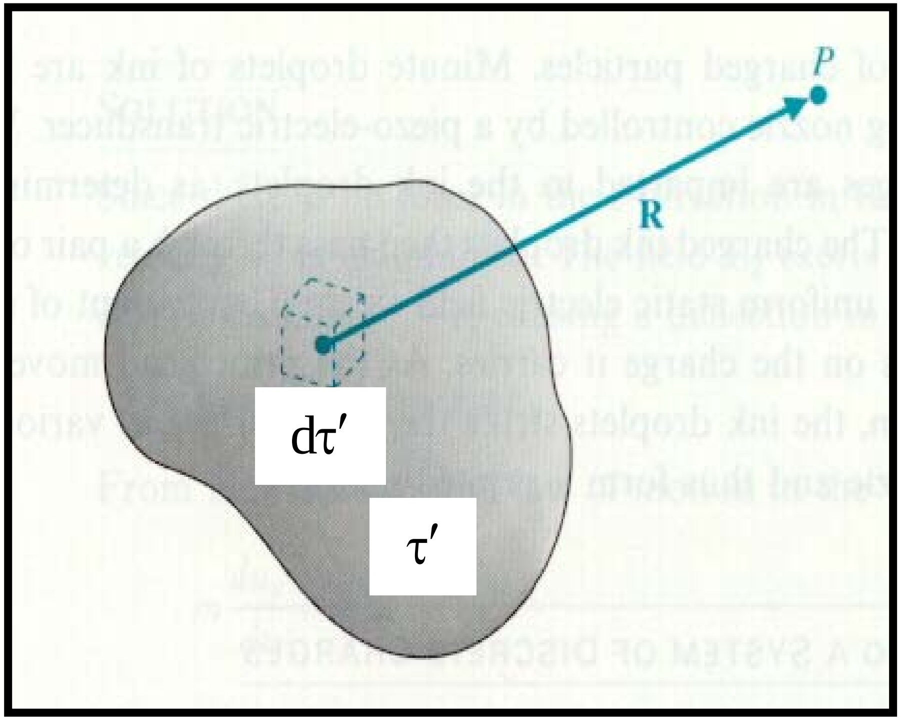
$$\vec{K} = n\,I\,\vec{1}_\phi$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\int \frac{\vec{K}}{R}\,dS$$



Courant de surface sur un solénoïde

Formule de Biot-Savart



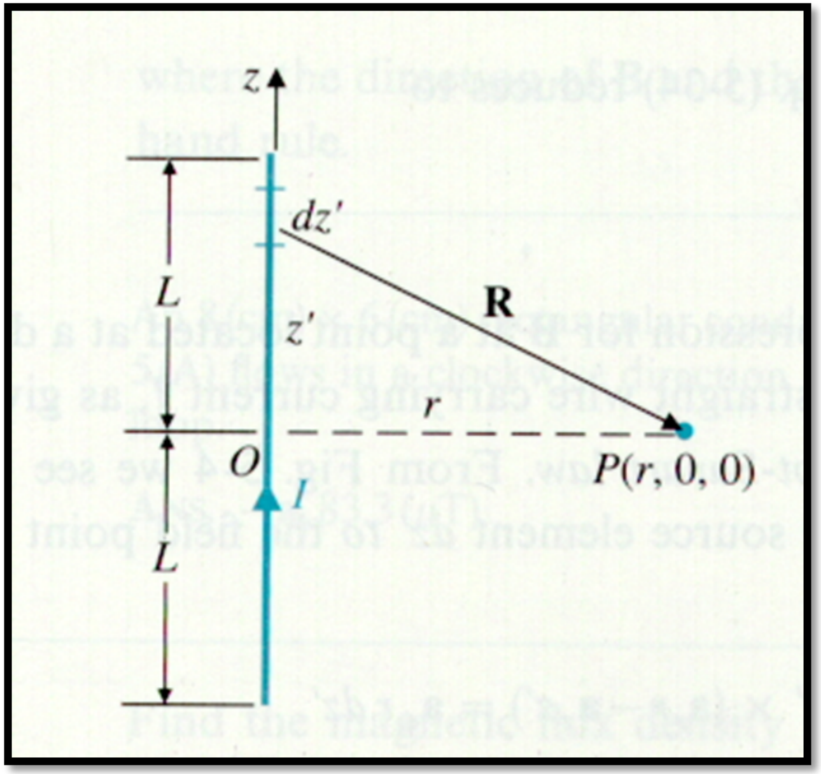
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\int_{\tau'} \frac{\vec{J}}{R}\, d\tau'$$

$$\vec{B} = rot_P \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\int_{\tau'} rot_P\left(\frac{\vec{J}}{R}\right) d\tau'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\int_{\tau'} \frac{\vec{J}\times\vec{1}_R}{R^2}\, d\tau'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\int \frac{I\,\overrightarrow{dl}\times\vec{1}_R}{R^2}$$

Segment de fil rectiligne



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^{L} \frac{\vec{1}_z}{R}\, dz$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^{L} \frac{\vec{1}_z}{\sqrt{z^2 + r^2}}\, dz$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L} \vec{1}_z$$

Solénoïde infini

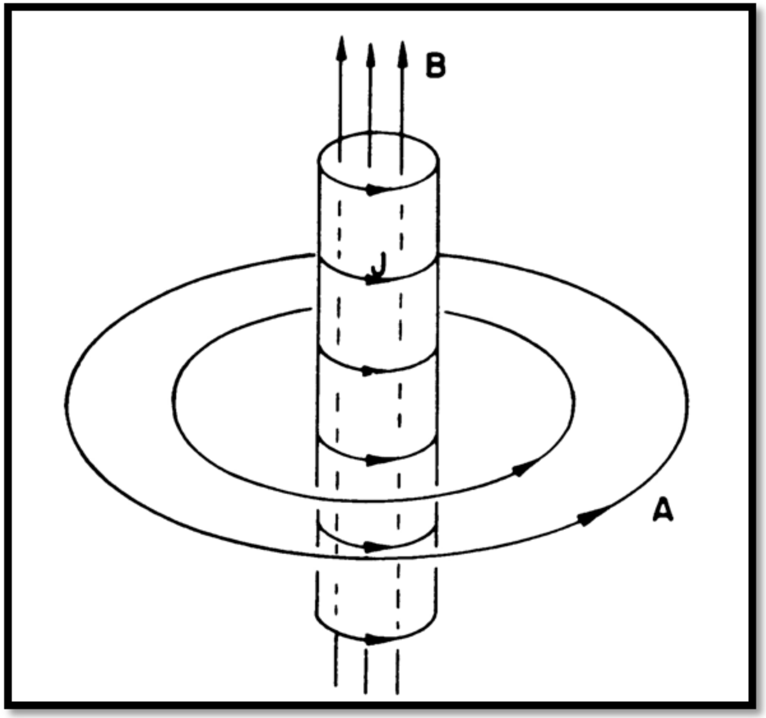
$$\oint_c \vec{A}\,.\,\overrightarrow{dl} = \Phi$$

$$\oint_c \vec{A}\,.\,\overrightarrow{dl} = A_\phi .\, 2\,\pi\, r = \mu_0\; n\, I\; .\,\pi\, r^2 \qquad r < a$$

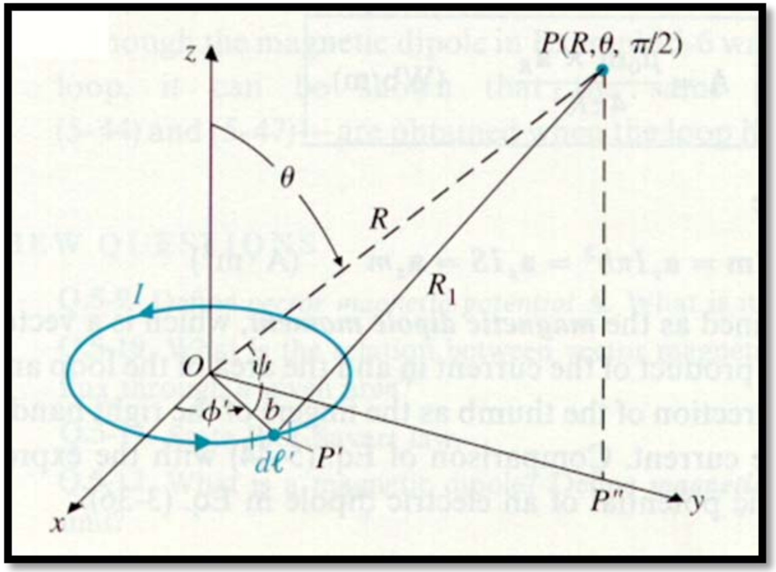
$$= \mu_0\; n\, I\; .\,\pi\, a^2 \qquad r > a$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 n I}{2}\, r\, \vec{1}_\phi \qquad r < a$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2}\,\frac{a^2}{r}\,\vec{1}_\phi \qquad r > a$$



Dipôle magnétique



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \, I}{4\pi} \oint_c \frac{\overrightarrow{dl'}}{R_1}$$

$$\overrightarrow{dl'} = b \, d\phi' \, \vec{1}_\phi = (-\sin\phi' \, \vec{1}_x + \cos\phi' \, \vec{1}_y) \, b \, d\phi'$$

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 \, I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b \sin\phi'}{R_1} \, d\phi' \, \vec{1}_x$$

$$\vec{A} = \vec{1}_\phi \, . \, \frac{\mu_0 \, I \, b}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin\phi'}{R_1} \, d\phi'$$

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2b \, R \cos\Psi$$

$$R \cos\Psi = \left| \, OP'' \, \right| . \sin\phi' = R \sin\theta \sin\phi'$$

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2b \, R \sin\theta \sin\phi'$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R} \sin\theta \sin\phi'}}$$

Comme $R^2 >> b^2$

$$\frac{1}{R_1} \cong \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2b}{R} \sin\theta \sin\phi'}}$$

$$\frac{1}{R_1} \cong \frac{1}{R} (1 + \frac{b}{R} \sin\theta \sin\phi')$$

$$\vec{A} = \vec{1}_\phi \frac{\mu_0\ I\ b}{2\pi\ R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \frac{b}{R} \sin\theta \sin\phi') \sin\phi'\ d\phi'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0\ I\ b^2}{4R^2} \sin\theta\, \vec{1}_\phi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\ I\ b^2}{4R^3} (2\cos\theta\, \vec{1}_R + \sin\theta\, \vec{1}_\theta)$$

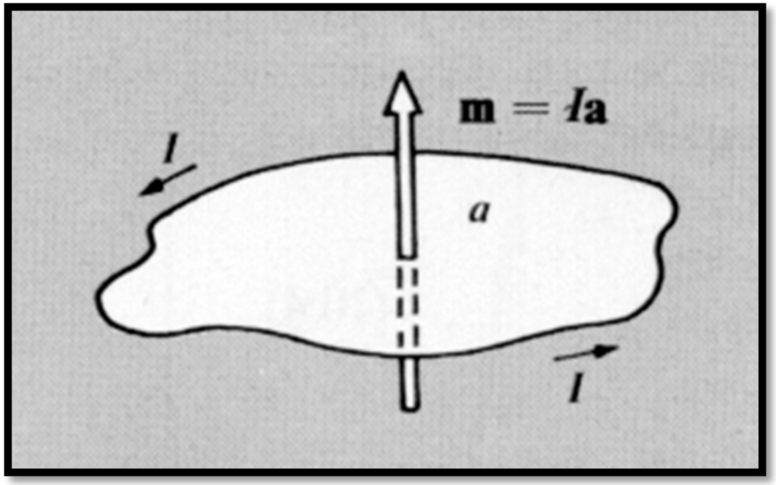
Moment dipolaire magnétique

$$\vec{m} = m\,\vec{1}_z = I\,\pi\,b^2\,\vec{1}_z = I\,S\,\vec{1}_z$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{m}\times\vec{1}_R}{R^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\,m}{4\pi\,R^3}\,(2\cos\theta\,\vec{1}_R + \sin\theta\,\vec{1}_\theta)$$

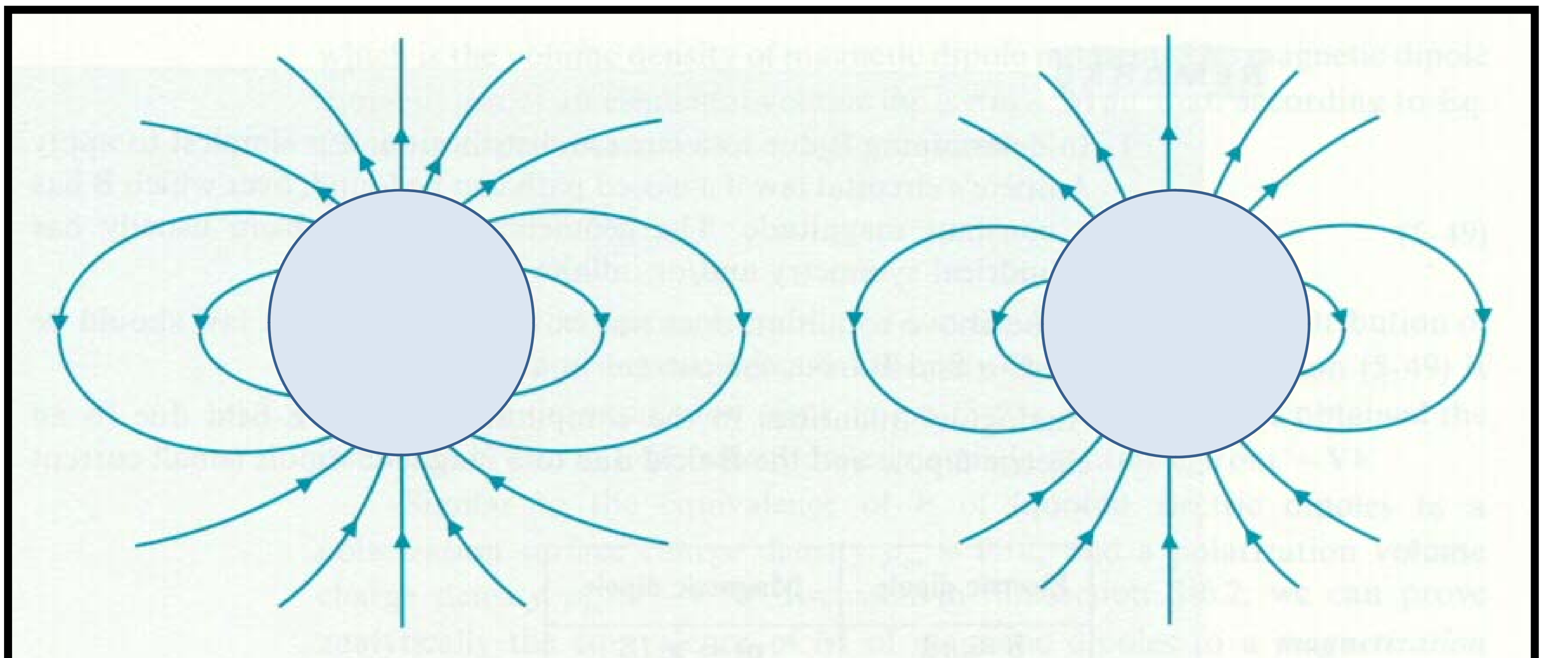
$$\vec{m} = I\,S\,\vec{1}_n \qquad (A\,.\,m^2)$$



Dipôle électrique :

$$V = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\vec{p}\,.\,\vec{1}_R}{R^2}$$

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\,\varepsilon_0\,R^3}\,(2\cos\theta\,\vec{1}_R + \sin\theta\,\vec{1}_\theta)$$



Dipôle électrique   Dipôle magnétique

Forces et couples sur des courants

$$\vec{F} = \oint_c I\, \vec{dl} \times \vec{B}$$

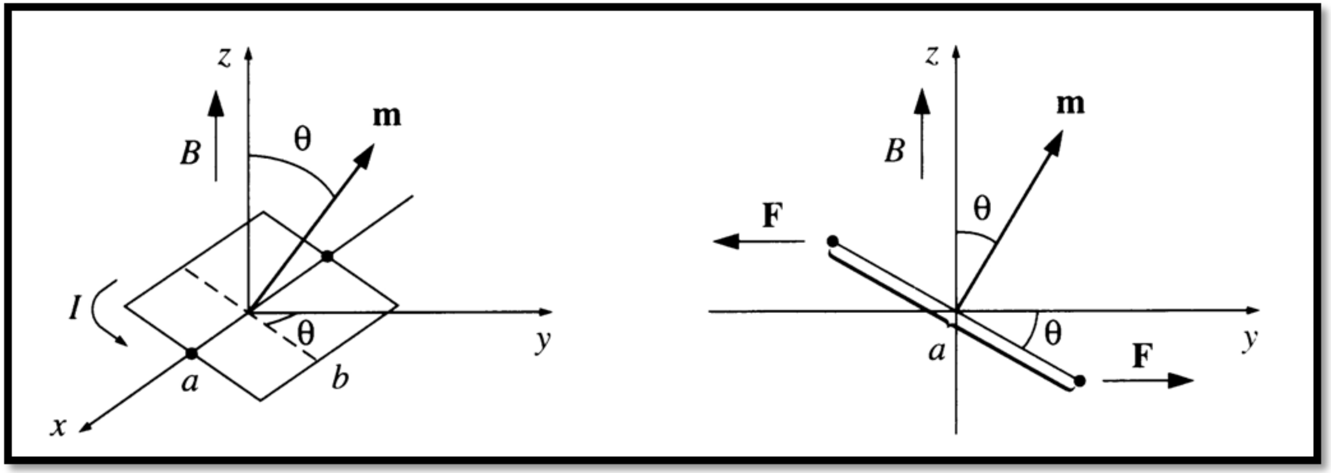
action d'un courant sur un courant

$$\vec{F}_{12} = \oint_{c_2} I_2\, \vec{dl}_2 \times \vec{B}_1$$

Champ magnétique uniforme,

$$\vec{F} = I \oint \vec{dl} \times \vec{B} = I\, (\oint \vec{dl}) \times \vec{B} = 0$$

mais un champ uniforme produira cependant un couple sur le circuit.



$$F = I\ b\ B$$

le couple résultant est

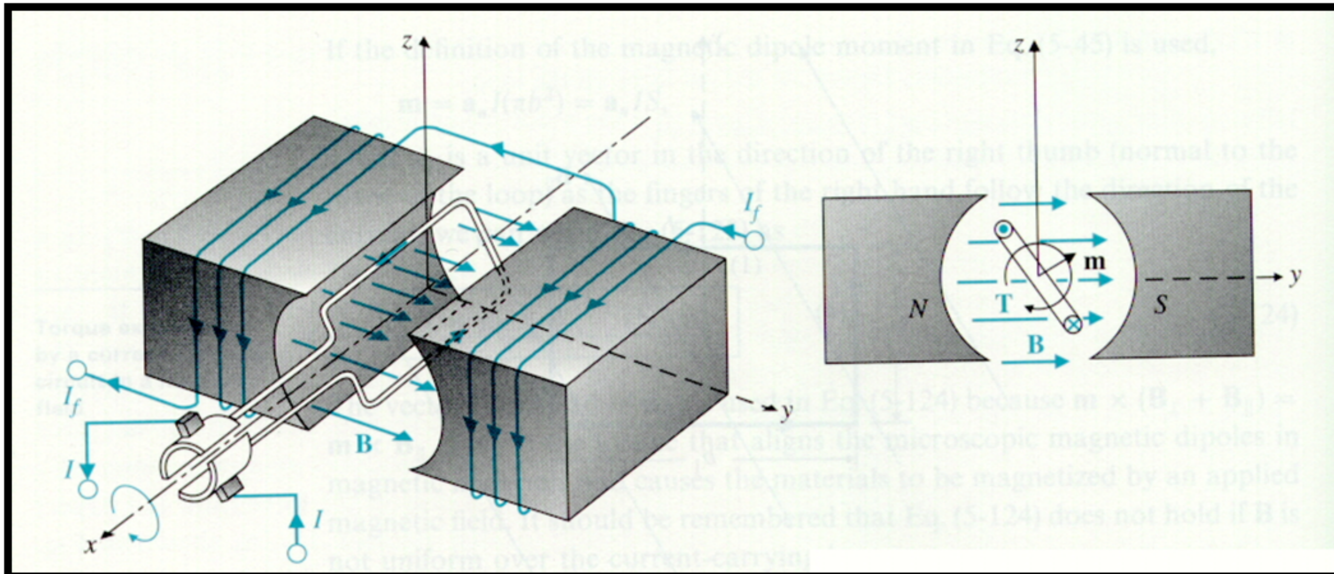
$$\begin{aligned}\vec{C} &= a\ F\ \sin\theta\,\vec{1}_x \\ &= I\ a\ b\ B \sin\theta\,\vec{1}_x \\ &= m\ B \sin\theta\,\vec{1}_x\end{aligned}$$

$$\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B}$$

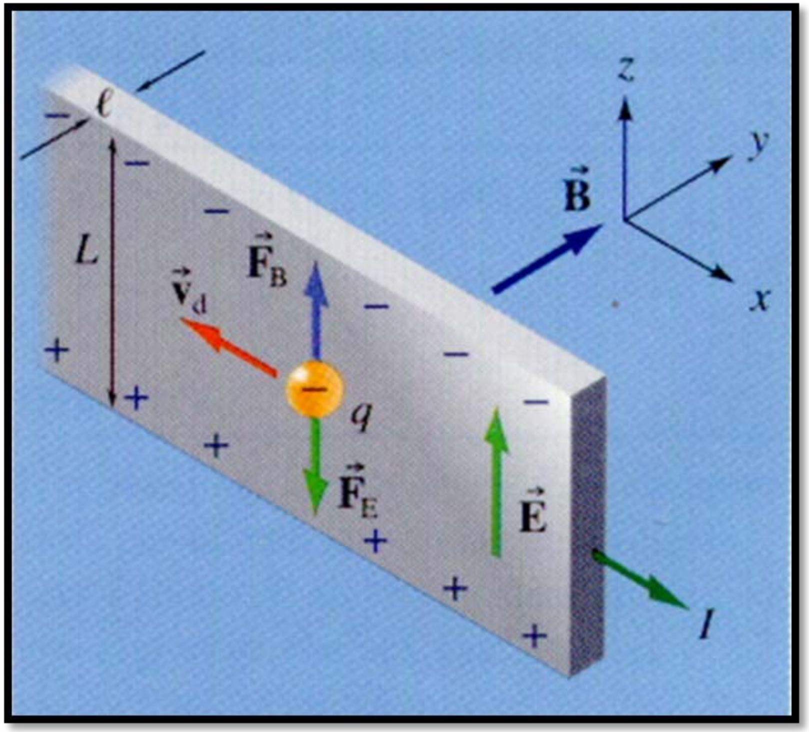
le couple a tendance à aligner le moment magnétique sur le champ

Principe du galvanomètre

Principe du moteur à courant continu



Effet Hall



$$\vec{F}_B = |\, q_e \,| v_d \; B \vec{1}_z$$

$$\vec{F}_E = -|\, q_e \,| \vec{E}_t = -\vec{F}_B$$

$$\vec{E}_t = v_d \; B \vec{1}_z$$

$$V_{Hall} = E_t \; L = v_d \; B \; L$$

$$I = J \; S = J \; L \; \ell = N_e \,|\, q_e \,|\, v_d \; L \; \ell$$

$$V_{Hall} = \frac{I \; B}{N_e \,|\, q_e \,|\, \ell}$$

Conditions aux limites

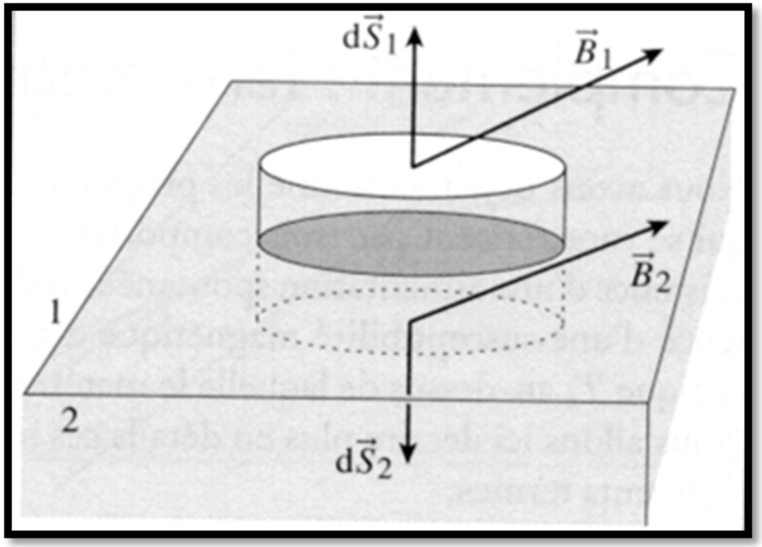
Considérons une surface parcourue par une densité superficielle de courant $\overrightarrow{K}$ et séparant l'espace en deux parties notées 1 et 2.

$$\begin{array}{l} espace\,1 \qquad\qquad \uparrow \vec{1}_n \\ \hline espace\,2 \end{array}$$

$$div\,\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \oint_S \vec{B}\,.\,\overrightarrow{dS} = 0 \quad \Rightarrow B_{1n} = B_{2n}$$

$$\vec{B}_1\,.\,\overrightarrow{dS_1} + \vec{B}_2\,.\,\overrightarrow{dS_2} = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$



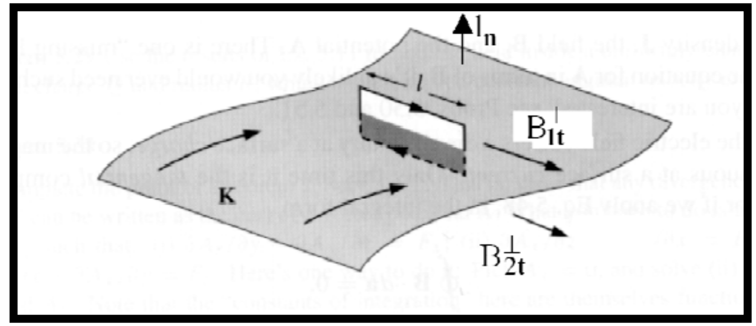
Continuité du champ normal

Pour la composante tangentielle, considérons un petit contour normal au courant de surface

$$\oint_c \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0\ I$$

$$(B_{1t}^{\perp} - B_{2t}^{\perp})\ \ell = \mu_0\ K\ \ell$$

$$B_{1t}^{\perp} - B_{2t}^{\perp} = \mu_0\ K$$



Discontinuité du champ tangentiel

où $B_{1t}^{\perp}$ et $B_{2t}^{\perp}$ sont les composantes de $\vec{B}$ qui sont parallèles à la surface et perpendiculaires au courant.

Si on prend un contour situé parallèlement au courant, on trouvera que les composantes tangentielles correspondantes de $\vec{B}$ sont continues.

Expression générale :

$$\vec{1}_n \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \mu_0\ \vec{K}$$

où $\vec{1}_n$ est la normale dirigée de $2 \rightarrow 1$

Le potentiel vecteur restera continu : $\vec{A}_1 = \vec{A}_2$