Milieux conducteurs - Courants

Courant et densité de courant

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Si le débit n'est pas constant, la valeur instantanée du courant est

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

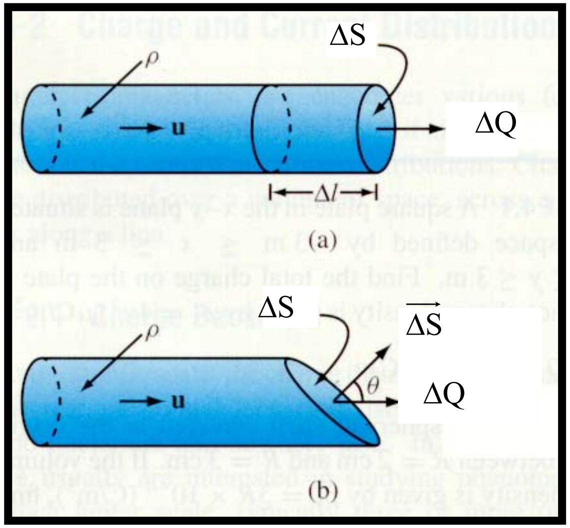
Particules de charge q animées, d'une vitesse moyenne $\vec{u}$

N : nombre de particules par unité de volume.

$$\Delta Q = N\, q\, u\, \Delta t\, \Delta S$$

$$\Delta Q = N\, q\, \vec{u} \,.\, \overrightarrow{\Delta S}\, \Delta t$$

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = N\, q\, \vec{u} \,.\, \overrightarrow{\Delta S}$$



<u>Densité de courant</u> $\vec{J}$

$$\vec{J} = N\, q\, \vec{u} \qquad \text{(A/m²)}$$

Elément de courant

$$\Delta I = \vec{J} \,.\, \overrightarrow{\Delta S}$$

$$I = \int_S \vec{J} \,.\, \overrightarrow{dS}$$

Nq : charge par unité de volume

$$\vec{J} = \rho\, \vec{u} \qquad \text{(A/m²)}$$

Généralisation

$$\vec{J} = \sum_i N_i\, q_i\, \vec{u}_i = \sum_i \rho_i\, \vec{u}_i$$

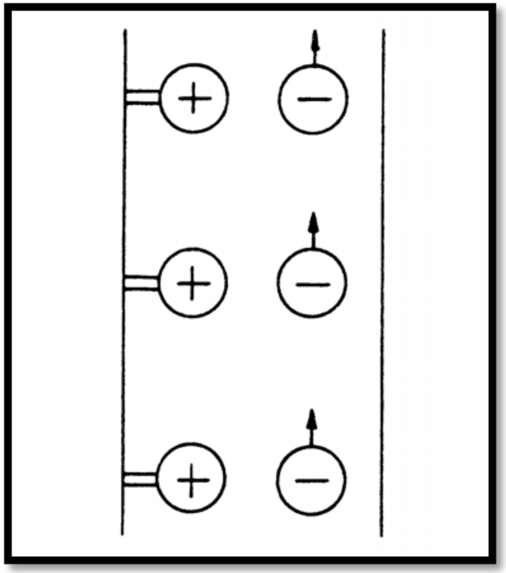
Courant de convection et courant de conduction.

Courant de conduction et loi d'Ohm

$$\vec{J} = \rho_e \, \vec{v}_e + \rho_p \, \vec{v}_p$$

ρ_e : la densité des charges négatives et $\vec{v}_e$ leur vitesse

ρ_p : la densité des charges positives et $\vec{v}_p$ leur vitesse



$$\rho_e + \rho_p = 0$$

$$\vec{v}_p = 0$$

$\vec{v}_e$: vitesse relative des électrons par rapport au conducteur

= vitesse de dérive $\vec{v}_d$.

$$\vec{J} = \rho_e \, \vec{v}_e = \rho_e \, \vec{v}_d$$

Force par unité de charge

$$\vec{f} = \vec{E} + \left(\vec{v}_d \times \vec{B}\right)$$

$$\vec{f} = \vec{E}$$

Loi d' Ohm

$$\vec{J} = \sigma \, \vec{E}$$

Aspect microscopique de la conduction

$$\vec{J} = \rho_e \, \vec{v}_d = N_e \, q_e \, \vec{v}_d$$

N_e : nombre d'électrons libres par unité de volume et q_e leur charge.

Loi d'Ohm $\Rightarrow$ vitesse $\vec{v}_d$ doit être proportionnelle au champ (donc à la force)

Libre parcours moyen :

$$\lambda = v_{th} \, . \, t_c$$

v_{th} : vitesse thermique moyenne

t_c : temps moyen entre deux collisions

Pour les métaux à température ambiante

$$v_{th} \approx 10^5 \ à \ 10^6 \ m/s \, ,$$

$$t_c \approx 10^{-14} \ s \, ,$$

$$\lambda \approx 10^{-8} \ m \, .$$

$$\vec{a} = \frac{q_e \, \vec{E}}{m_e}$$

La variation de vitesse sera la vitesse moyenne de dérive

$$\vec{v}_d = \overrightarrow{\Delta v} = \frac{q_e\ \vec{E}}{m_e} t_c$$

m_e : la masse de l'électron , mobilité μ_e

$$\vec{v}_d = \mu_e\ \vec{E}$$

$$\sigma = \frac{N_e\ q_e^2\ t_c}{m_e}$$

Conductivité des matériaux

$$\vec{J} = \sigma \, \vec{E}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

Quelques valeurs

	résistivité Ω.m	coefficient de température (°C) $^{-1}$
cuivre	$1{,}7 \cdot 10^{-8}$	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$
aluminium	$2{,}8 \cdot 10^{-8}$	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$
fer	$8{,}8 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-3}$
manganèse	$4{,}4 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$
graphite	$1{,}4 \cdot 10^{-5}$	$-5 \cdot 10^{-4}$
eau distillée	$\sim 10^{4}$	
mica	$\sim 10^{15}$	$-7 \cdot 10^{-2}$
verre	$\sim 10^{12}$	$-7 \cdot 10^{-2}$

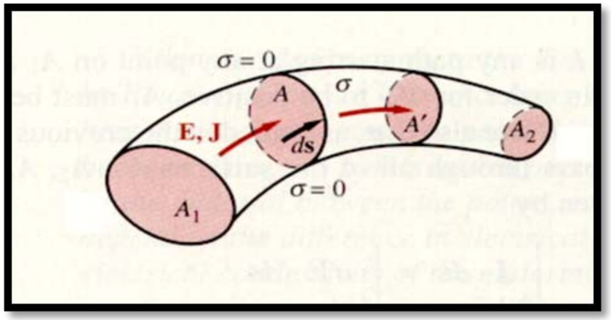
La résistivité d'un matériau dépend généralement de la température, de manière significative.

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha \left(T - T_0 \right) \right]$$

ρ_0 : résistivité à la température de référence T_0 (souvent 20°C) et α est le coefficient de température.

Milieux conducteurs – Résistance

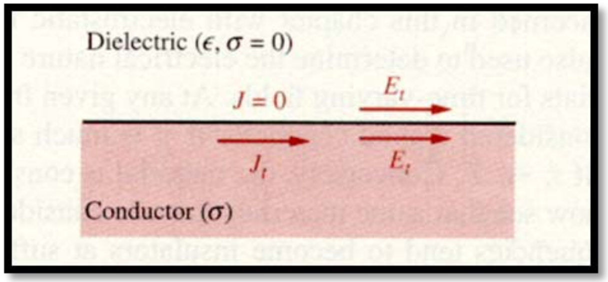
$$I=\int_A \vec{J}\,\overrightarrow{dS}=\int_{A'}\vec{J}\,\overrightarrow{dS}$$



$$\vec{J}\,.\,\vec{1}_n=0$$

$$J=J_t \qquad E_t=J_t/\sigma$$

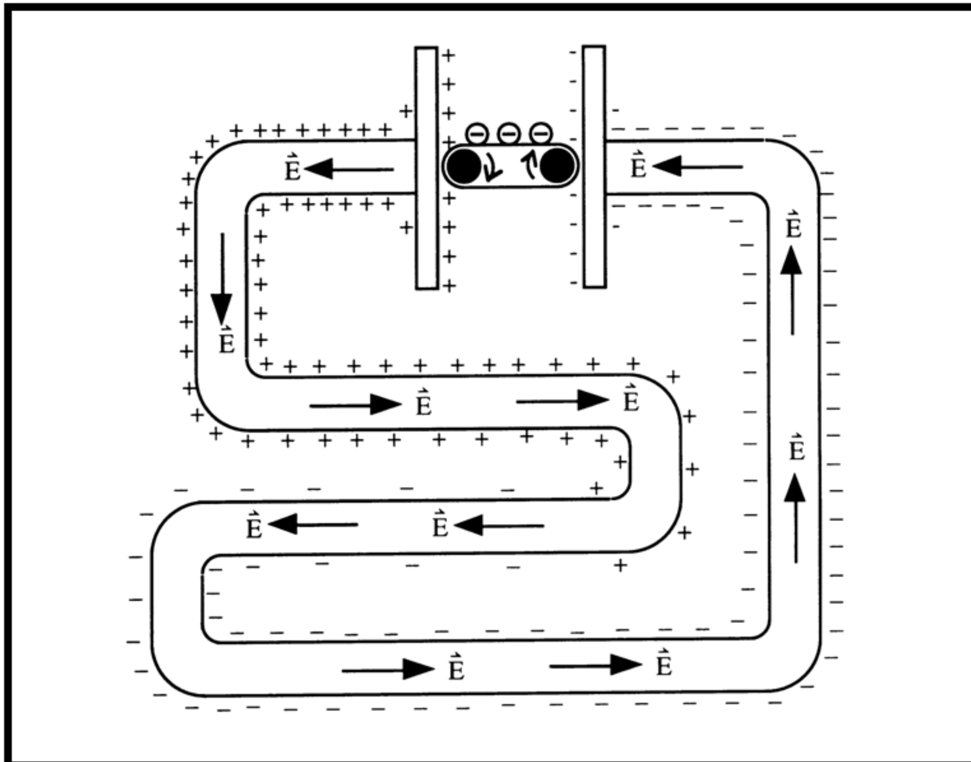
$$V=R\,I$$

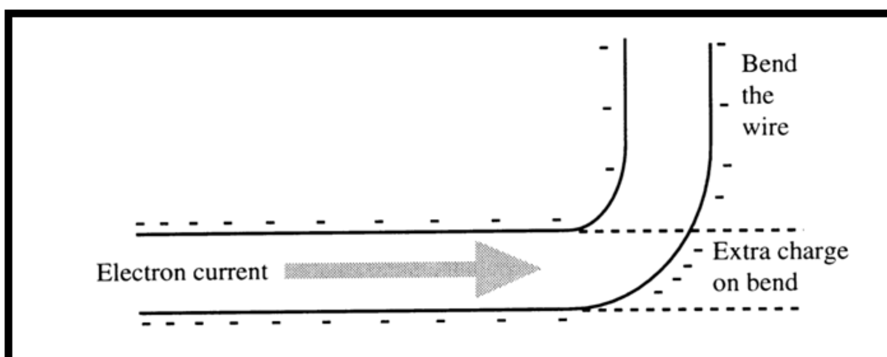


$$V=V_1-V_2=-\int_L \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dl}=-\int_L \frac{1}{\sigma}\vec{J}\,.\,\overrightarrow{dl}$$

L : chemin partant de A_2 (potentiel bas) et aboutissant à A_1 (potentiel haut), et le courant par

$$I=\int_A \vec{J}\,.\,\overrightarrow{dS}=\int_A \sigma\,\vec{E}\,.\,\overrightarrow{dS} \qquad R=\frac{-\int_L \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dl}}{\int_A \sigma\,\vec{E}\,.\,\overrightarrow{dS}}$$


E
E
E
E
E
E
E
E
E
E
E
E

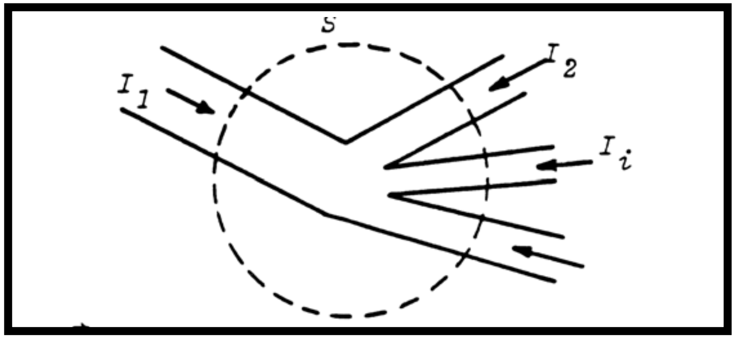

Bend
the
wire
Electron current
Extra charge
on bend

Équation de continuité et loi des nœuds de Kirchhoff

L'équation de continuité qui exprime la conservation de la charge s'écrit sous forme intégrale :

$$\oint_S \vec{J} \,.\, \overrightarrow{dS} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_\tau \rho \, d\tau$$

La forme locale de l'équation de continuité est



$$div \, \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$div \, \vec{J} = 0$$

Et pour un conducteur homogène

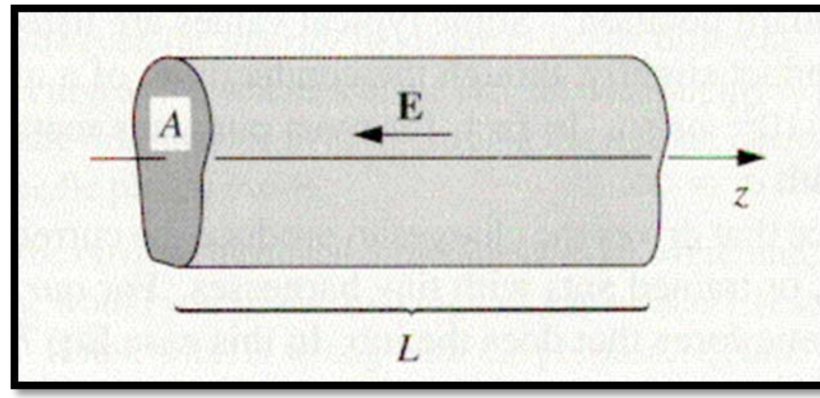
$$div \, \vec{E} = 0$$

(Le potentiel vérifiera l'équation de Laplace dans un conducteur homogène)

$$\oint_S \vec{J} \, \overrightarrow{dS} = 0$$

$$\sum_j I_j = 0$$

Conducteur cylindrique



$$V\left(z=0\right)=0$$

$$V\left(z=L\right)=V_0$$

$$V\left(z\right)=\frac{V_0\ z}{L}$$

$$\vec{E}=-\ grad\ V=-\frac{V_0}{L}\vec{1}_z$$

$$I=J\ A=\sigma\ E\ A=\frac{\sigma\ A}{L}V_0$$

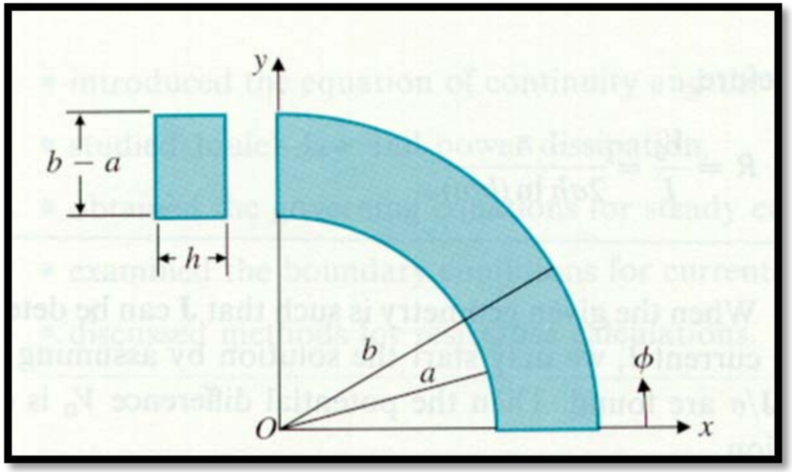
$$R=\frac{L}{\sigma\ A}$$

$$G=\frac{1}{R}=\frac{\sigma\ A}{L}$$

Conducteur torique

$$V = 0 \qquad \text{pour} \quad y = 0 \qquad (\phi = 0)$$
$$V = V_0 \qquad \text{pour} \quad x = 0 \qquad (\phi = \pi / 2)$$

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{l}\,\vec{1}_\phi$$



avec $l = \pi\, r / 2$

$$I = \int_S \vec{J}\,\overrightarrow{dS} = \int_S \sigma\,\vec{E}\,\overrightarrow{dS}$$

$$\overrightarrow{dS} = -\,h\,dr\,\vec{1}_\phi$$

$$I = \frac{2\,\sigma\,V_0\,h}{\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{2\,\sigma\,h\,V_0}{\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\pi}{2\,\sigma\,h\ln\left(b/a\right)}$$

Conditions aux limites

Considérons l'interface entre deux milieux de conductivité σ_1 et σ_2.

$$div\,\vec{J} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \oint_S \vec{J}\,\overrightarrow{dS} = 0$$

$$J_{2n} = J_{1n}$$

$$\sigma_2\, E_{2n} = \sigma_1\, E_{1n}$$

Si le milieu 2 est un diélectrique parfait ($\sigma_2 = 0$), on doit avoir $J_{2n} = 0$ et donc

$$J_{1n} = 0 \qquad E_{1n} = 0$$

Le champ électrique tangentiel est continu $E_{1t} = E_{2t}$ et donc

$$\frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2}$$

Discontinuité du champ normal, et donc présence d'une charge libre de surface.

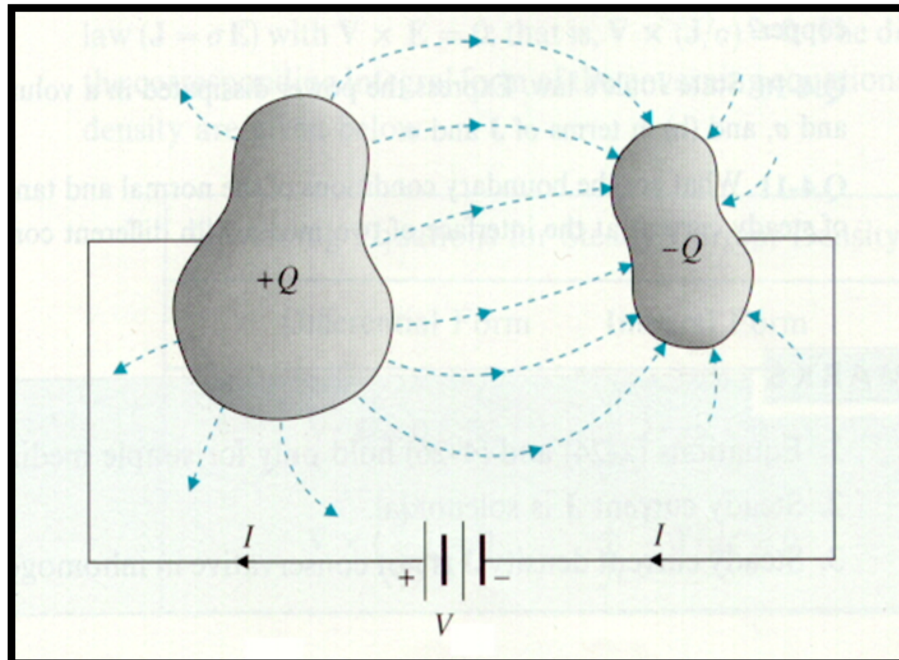
$$\varepsilon_1\, E_{1n} - \varepsilon_2\, E_{2n} = \sigma_l \qquad \sigma_l = \left(\varepsilon_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \varepsilon_2\right) E_{2n} = \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) E_{1n}$$

Analogie entre résistance et capacité

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_S \varepsilon\, \vec{E} \,.\, \overrightarrow{dS}}{-\int_L \vec{E}\, \overrightarrow{dl}}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_L \vec{E}\, \overrightarrow{dl}}{\int_S \sigma\, \vec{E}\, \overrightarrow{dS}}$$

$$R\, C = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$



Temps de relaxation

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$div\ \vec{J} = \frac{\sigma\ \rho}{\varepsilon}$$

équation de continuité

$$div\ \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

équation différentielle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\ \rho = 0$$

$$\rho\left(t\right) = \rho_0\ e^{-\left(\sigma/\varepsilon\right)t}$$

Pour un excellent conducteur comme le cuivre

$\sigma = 5{,}8\ 10^{7}$ S/m, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}85\ 10^{-12}$ F/m

$t_r \approx 1{,}5\,.10^{-19}\ s$.

Puissance dissipée – Effet Joule

force par unité de volume $\vec{f} = \rho\,\vec{E}$

vitesse $\vec{v}$.

La puissance par unité de volume, développée par $\vec{f}$ vaut :

$$\vec{f}\,.\,\vec{v} = \rho\,\vec{E}\,\vec{v} = \vec{J}\,.\,\vec{E}$$

$$p = \vec{J}\,.\,\vec{E} \qquad \text{(W/m³)}$$

puissance perdue par <u>effet Joule</u>.

puissance totale

$$dW = V\,dQ$$

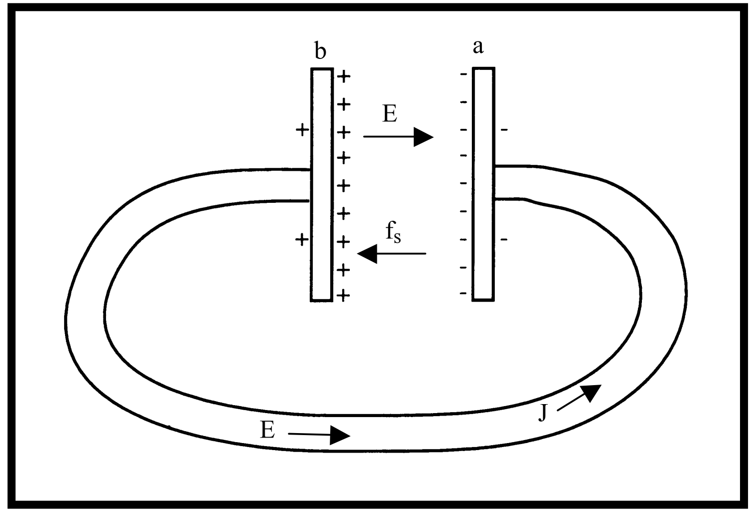
$$P = \frac{dW}{dt} = V\,\frac{dQ}{dt} = V\,I = R\,I^2$$

Force électromotrice

Force par unité de charge, qui entretient le courant dans le circuit :

$$\vec{f} = \vec{f}_S + \vec{E}$$

$$\oint_c \vec{E} \,.\, \overrightarrow{dl} = 0$$



<u>Force électromotrice</u> (en abrégé fem) d'un circuit est définie par :

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{f} \,.\, \overrightarrow{dl} \qquad \text{(V)}$$

où c est le contour fermé du circuit. C'est la force par unité de charge intégrée sur toute la longueur du circuit (ce n'est donc pas un force!).

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{f} \,.\, \overrightarrow{dl} = \oint_c \overrightarrow{f_s} \,.\, \overrightarrow{dl} = \int_a^b \vec{f}_s \,.\, \overrightarrow{dl}$$

Pour une pile idéale, on peut considérer que le champ électrique et la force chimique f_s se neutralisent à l'intérieur de la pile :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{f_s} \qquad \text{(dans la pile)}$$

Différence de potentiel entre les bornes a et b est :

$$V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \, . \, \overrightarrow{dl}$$

$$V = \int_a^b \vec{f}_s \, . \, \overrightarrow{dl} = \varepsilon$$

Une différence de potentiel correspond uniquement à un champ électrique <u>conservatif</u>, tandis que la fem est associée à un mécanisme <u>non électrostatique</u> qui fournit l'énergie pour séparer les charges.

Forme de la loi de conservation de l'énergie.

fem ε : le travail fourmi par la source (par unité de charge)

Différence de potentiel V : travail (par unité de charge) effectué par le champ électrique pour faire circuler le courant, et dissipé en chaleur.

La généralisation à un circuit fermé quelconque constitue la loi des mailles de Kirchhoff :

$$\sum \Delta V = 0$$

Batterie réelle

Le courant à l'intérieur de la pile est dû au déplacement des ions. La vitesse de déplacement des ions dépendra de la force nette à laquelle ils sont soumis

$$\vec{v}_{ions} = \mu_{ions}\left(\vec{f}_s + \vec{E}\right)$$

$$\vec{J} = \sigma_{ions}\left(\vec{f}_s + \vec{E}\right)$$

$$\vec{f}_s = -\vec{E} + \frac{\vec{J}}{\sigma_{ions}}$$

$$\varepsilon = \int_a^b \vec{f}_s \,.\, \overrightarrow{dl} = -\int_a^b \vec{E} \,.\, \overrightarrow{dl} + \int_a^b \frac{\vec{J}}{\sigma_{ions}} \overrightarrow{dl}$$

Le premier terme à droite est la différence de potentiel entre les bornes de la pile réelle $V = V_b - V_a$ tandis que le deuxième terme peut s'écrire

$$\int_a^b \frac{\vec{J}}{\sigma_{ions}} \,.\, \overrightarrow{dl} = R_{\text{int}} .I$$

$$V = \varepsilon - R_{\text{int}} I$$