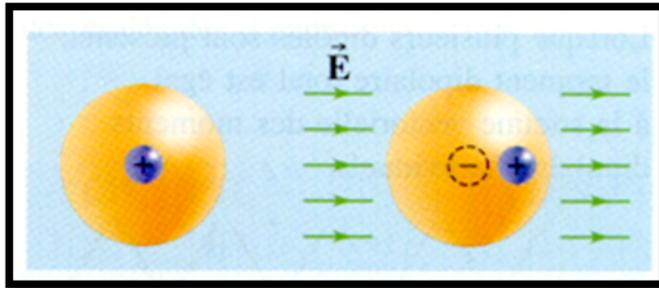
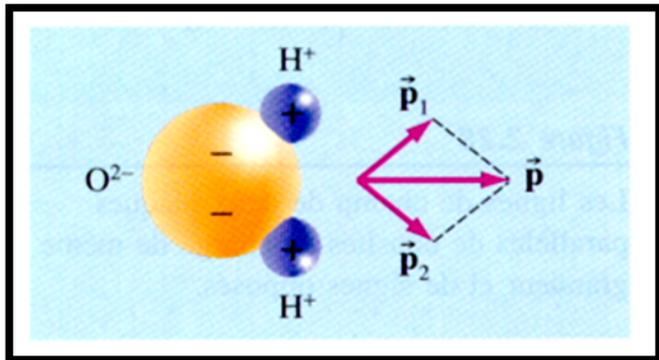


Molécules non polaires – Polarisation indirecte

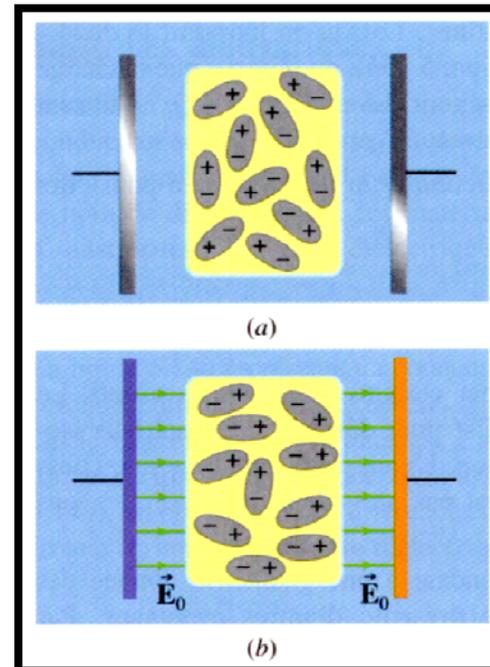


Dipôle induit

Molécules polaires – Polarisation d'orientation



Molécule polaire



Polarisation d'orientation

Répartition dipolaire en volume – Vecteur polarisation

On appelle polarisation un vecteur \vec{P} qui vaut le moment dipolaire par unité de volume :

\vec{P} : densité de moment dipolaire (C/m²)

Par exemple, s'il y a N atomes par unité de volume et que $q_e \vec{d}$ est le moment dipolaire par atome, on aura :

$$\vec{P} = N q_e \vec{d}$$

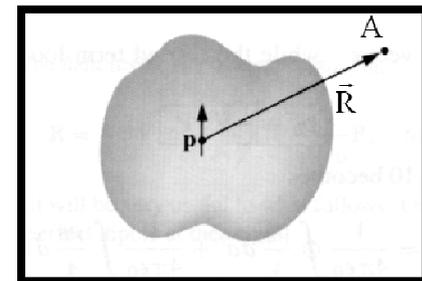
En général, \vec{P} sera une quantité locale qui variera de place en place dans le diélectrique.

Champ créé par de la matière polarisée

Un volume élémentaire $d\tau$ contient un moment dipolaire $\vec{P} d\tau$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\vec{P} \cdot \vec{1}_R}{R^2} d\tau$$

$$\text{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\vec{1}_R}{R^2}$$



Volume polarisé

où le gradient (donc les dérivées) est pris par rapport au point courant dans le volume τ .

$$V = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{\tau} \vec{P} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\tau$$

$$\text{div}(f \vec{A}) = f \cdot \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad} f$$

$$V = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \left[\int_{\tau} \text{div} \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) d\tau - \int_{\tau} \frac{1}{R} \text{div} \vec{P} d\tau \right]$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky

$$V = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P} \cdot \vec{dS}}{R} - \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{\tau} \frac{\text{div} \vec{P}}{R} d\tau$$

On sait que le potentiel d'une distribution volumique de charge s'exprime par :

$$V = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho}{R} d\tau$$

et pour une distribution de charge en surface

$$V = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{R} dS$$

Le diélectrique peut donc être modélisé par des densités de charges de polarisation volumique ρ_p et superficielle σ_p données par

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{1}_n$$
$$\rho_p = -\text{div } \vec{P}$$

où $\vec{1}_n$ est la normale extérieure au volume polarisé.

$$V = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_p}{R} dS + \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_\tau \frac{\rho_p}{R} d\tau$$

et le potentiel dû au volume polarisé est le même que celui qui serait produit par une densité volumique ρ_p et une densité surfacique de charges σ_p .

Interprétation des charges de polarisation

Considérons un tube de diélectrique parallèle à \vec{P} .

Il y a N atomes de moment dipolaire $q_e d$ par unité de volume. Cela signifie que les charges positives et négatives sont déplacées les unes par rapport aux autres de d en moyenne. Le nombre de charges qui apparaissent à la surface du tube est le produit $A.N.d$ (pour une surface perpendiculaire à la polarisation).

La charge correspondante est $A.N.d.q_e$.

La densité superficielle de charge de polarisation est donc

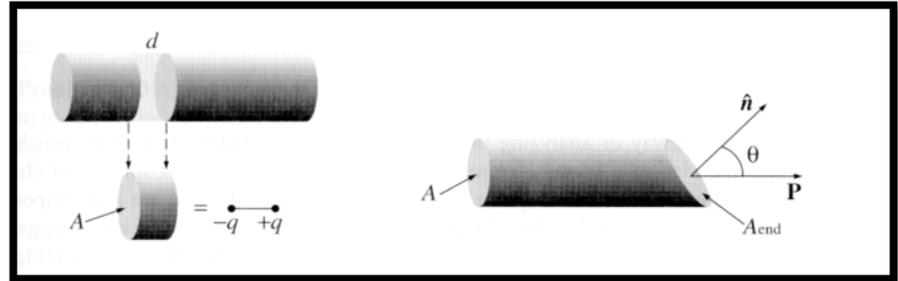
$$\sigma_p = N q_e d$$

qui est bien le module du vecteur polarisation

$$\sigma_p = P$$

Pour une surface oblique par rapport à la polarisation, la charge reste la même, et

$$\sigma_p = P \cos \theta = \vec{P} \cdot \vec{1}_n$$



Charge superficielle de polarisation

Les déplacements de charges peuvent cependant avoir pour effet une densité volumique de charges, dans le cas où la polarisation est non uniforme. Dans ce cas les densités de charges des dipôles adjacents ne se compensent pas complètement.

Comme le diélectrique est neutre dans son ensemble, si une surface fermée S donne une charge superficielle totale non nulle, c'est que les dipôles sont inégalement répartis dans le volume limité par S . La charge superficielle totale qui sort d'un volume τ par polarisation

$$\oint_S \vec{P} \cdot \vec{dS}$$

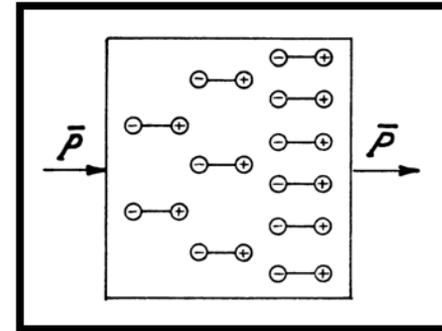
doit être compensée par une charge répartie en volume qui apparaît du fait de l'inégale distribution des dipôles :

$$Q_p + \oint_S \vec{P} \cdot \vec{dS} = 0$$

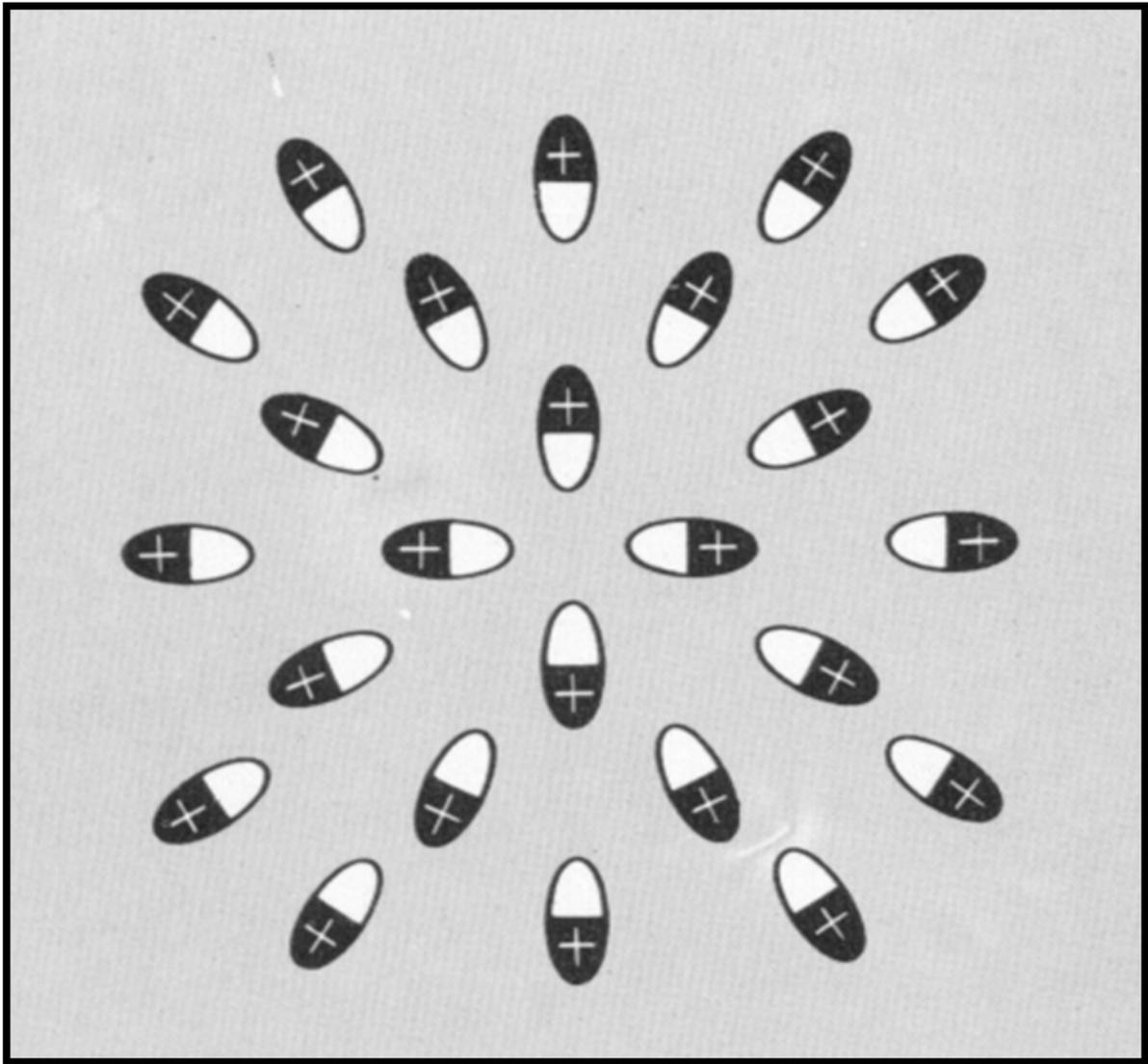
On peut attribuer Q_p à une densité volumique ρ_p :

$$Q_p = \int_{\tau} \rho_p d\tau$$

$$\int_{\tau} \rho_p d\tau = -\oint_S \vec{P} \cdot \vec{dS} \quad \text{et sous forme différentielle} \quad \rho_p = -\text{div } \vec{P}$$



Exemple schématique de polarisation non uniforme



Équations électrostatiques en présence de diélectriques

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\rho = \rho_l + \rho_p$$

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho_l + \rho_p = \rho_l - \operatorname{div} \vec{P}$$

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_l$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = Q_l$$

Diélectriques linéaires

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \\ &= \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} = \varepsilon \vec{E}\end{aligned}$$

où ε est la permittivité du diélectrique, et ε_r sa permittivité relative.

Historiquement ε_0 a reçu le nom de "permittivité du vide", mais évidemment il n'y a pas de dipôles dans le vide.

On a toujours : $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ et $\varepsilon_r \geq 1$

Si la permittivité ε est constante en tout point, le diélectrique est homogène et on aura :

$$\begin{aligned}\rho_p &= -\operatorname{div} \vec{P} = -\operatorname{div} \left(\frac{\chi_e \varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{D} \right) = - \left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_l \\ \rho_p &= - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \rho_l\end{aligned}$$

La densité de charge de polarisation est proportionnelle, en tout point, à la densité de charges réalisées ou libres.

En particulier s'il n'y a pas de charge libre à l'intérieur du diélectrique, on y aura $\rho_p = 0$.

La densité de charge totale est $\rho = \rho_l + \rho_p = \varepsilon_0 \frac{\rho_l}{\varepsilon}$

L'équation fondamentale du champ peut alors s'écrire $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_l}{\varepsilon}$

et le potentiel vérifiera l'équation de Poisson $\Delta V = -\frac{\rho_l}{\varepsilon}$

La théorie des diélectriques linéaires et homogènes est donc semblable à celle des champs dans le vide, sauf qu'on remplace partout ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$. Le champ est partout ε_r fois plus petit que lorsqu'il n'y a pas de diélectrique. Le potentiel est divisé par le même facteur.

La densité d'énergie potentielle électrique dans le vide est :

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Pour un espace rempli de diélectrique, on obtient par un calcul semblable :

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

En remplaçant

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}$$

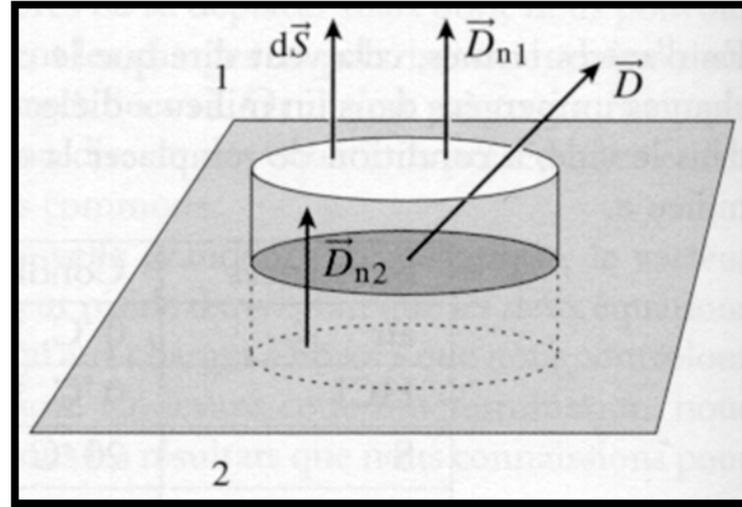
Le deuxième terme est donc l'énergie additionnelle qui doit être fournie par les sources pour établir le champ \vec{E} dans un milieu diélectrique. C'est l'énergie nécessaire pour polariser le diélectrique.

Conditions aux limites

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_l$$

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$



$\sigma = \sigma_l + \sigma_p$: densité surfacique totale.

$$P_{2n} - P_{1n} = \sigma_p = \sigma_{p2} + \sigma_{p1}$$

Dans le cas où les milieux 1 et 2 sont tous les deux des diélectriques linéaires :

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1 \qquad \vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2$$

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma_l$$

S'il n'y a pas de charges libres à l'interface : $\sigma_l = 0$

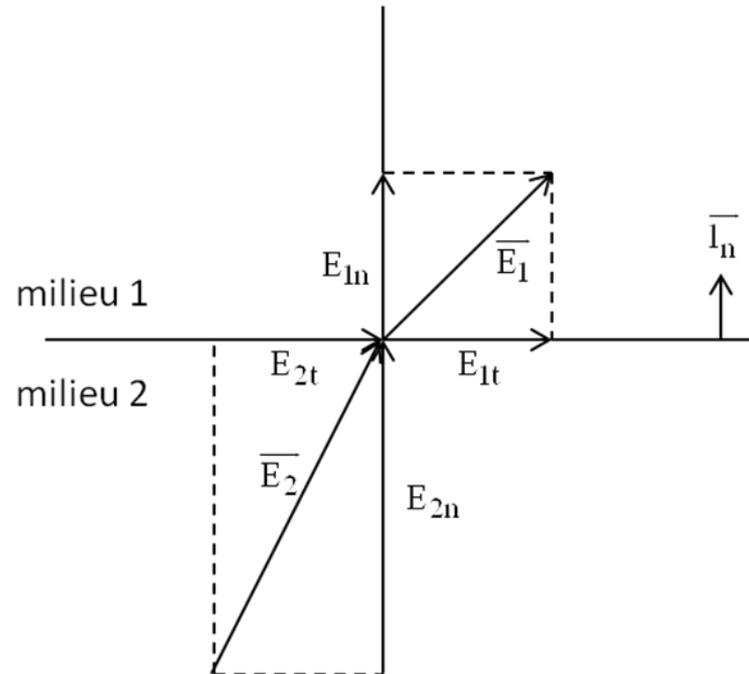
$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

et il y a réfraction des lignes de champ électrique :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \alpha_1$$

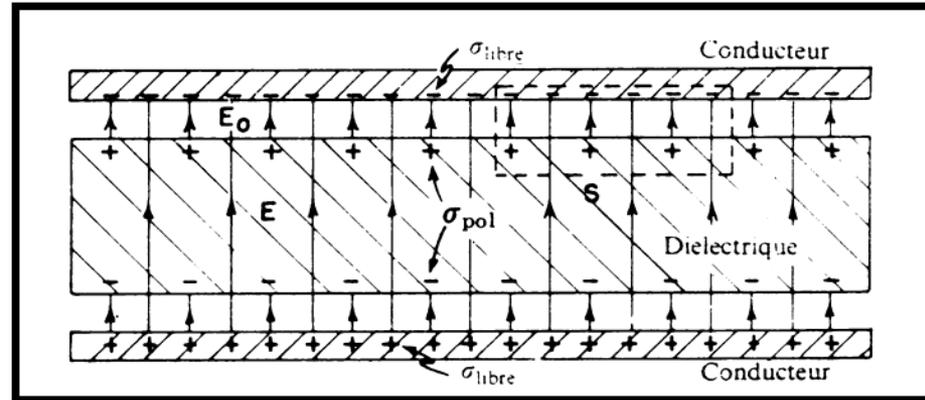


Condensateur plan

Le champ dans le diélectrique sera

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_l - \sigma_p}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma_l - P}{\epsilon_0}$$



Pour un diélectrique linéaire

$$P = \chi_e \epsilon_0 E$$

$$E = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0} \frac{1}{1 + \chi_e} = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\epsilon_r}$$

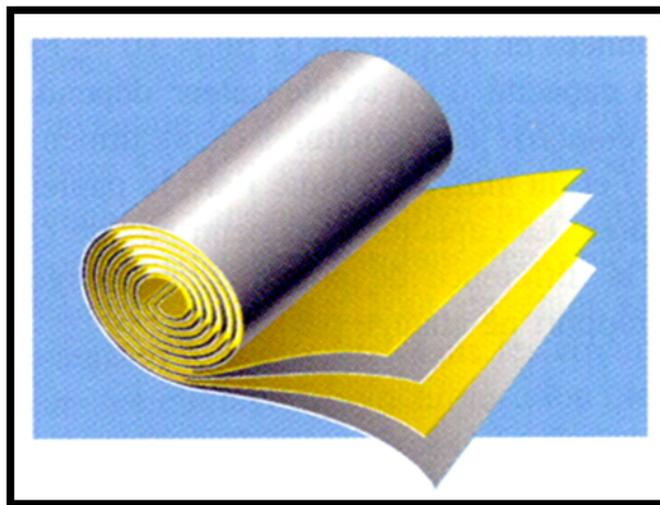
Le champ est donc réduit du facteur ϵ_r .

$$V = E \cdot d = \frac{\sigma_l \cdot d}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\epsilon_r}$$

$$Q = \sigma_l \cdot A$$

et la capacité est donnée par

$$C = \epsilon_r \cdot \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon A}{d}$$



	permittivité relative ϵ_r	rigidité diélectrique MV/m
air	1,0006	3
verre	5 à 10	30
papier	2 à 4	15
polystyrène	2,6	20
mica	6	200
eau	80	-

Force sur un diélectrique entre plaques parallèles

$$C = \frac{\epsilon_0 w}{d} (\epsilon_r x + L - x)$$

Principe des travaux virtuels

$$F_m = \frac{dW}{dx}$$

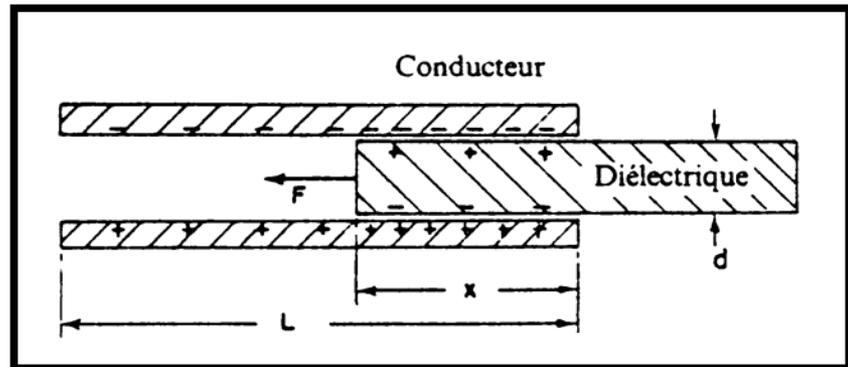
A charge constante :

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$F_m = \frac{dW}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx}$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{\epsilon_0 w}{d} (\epsilon_r - 1)$$

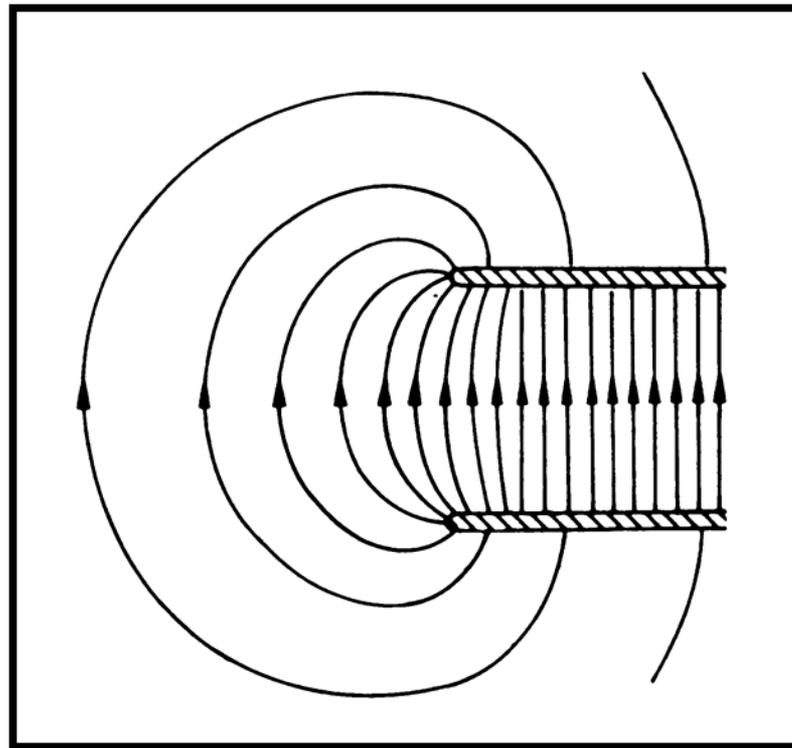
$$F_m = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 w}{d} (\epsilon_r - 1)$$



Cette force mécanique (négative pour un accroissement de x) doit équilibrer la force électrique interne du système :

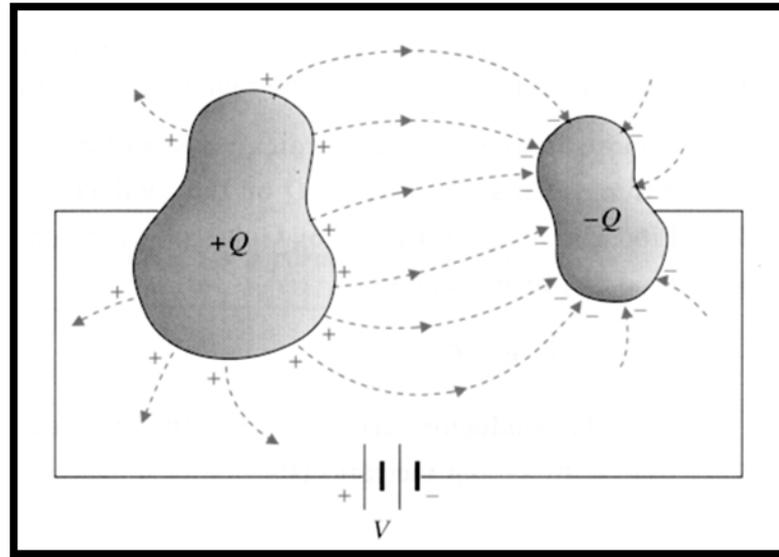
$$F_m = -F$$

et donc le diélectrique est attiré vers l'intérieur des plaques.



Expression générale de la capacité

$$C = \frac{Q}{V}$$



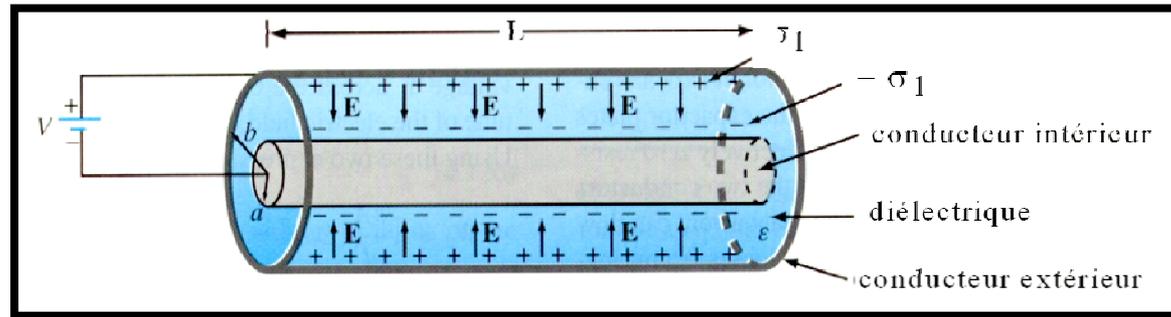
Toutes les lignes de champ partent du conducteur positif pour aboutir au conducteur négatif. L'expression générale de la capacité sera donc

$$C = \frac{\oint_S \epsilon \vec{E} \cdot \vec{dS}}{-\int_l \vec{E} \cdot \vec{dl}}$$

où S est une surface entourant le conducteur positif et l est un chemin allant du conducteur négatif (potentiel bas) au conducteur positif (potentiel haut).

Exemple : condensateur cylindrique

On suppose L suffisamment grand pour pouvoir négliger les effets de bords.



Par application de la loi de Gauss, en exploitant la symétrie cylindrique du problème, on obtient pour le champ entre les conducteurs :

$$\vec{E} = \frac{-Q}{\epsilon 2\pi r L} \vec{1}_r$$

où Q est la charge totale (charge libre) d'une armature.

$$V = -\int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_a^b \frac{Q}{\epsilon 2\pi r L} dr = \frac{Q}{\epsilon 2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$