ELECTROSTATIQUE

Le cas <u>statique</u> est celui où toutes les sources sont stationnaires. Toutes les charges sont fixes dans l'espace, ou bien si elles bougent, elles forment des courants continus, de sorte que ρ et $\vec{J}$ sont constants dans le temps.

Électrostatique

$$\begin{cases} div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \oint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} rot\,\vec{E} = 0 \\ \oint_c \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dl} = 0 \end{cases}$$

Magnétostatique

$$div\,\vec{B} = 0$$

$$rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{J}$$

Le champ électrique produit par une charge ponctuelle isolée q est :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{\vec{1}_R}{R^2}$$

et pour une charge répartie en volume :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho}{R^2}\vec{1}_R\, d\tau$$

La force sur une charge, en électrostatique, est

$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

et donc le champ électrique est une force par unité de charge.

La relation $\oint_c \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dl} = 0$ exprime que la circulation de $\vec{E}$ le long de tout parcours fermé est nulle.
Par conséquent la circulation de $\vec{E}$ entre deux points a et b (cela représente un travail par unité de charge) ne dépend pas du trajet suivi mais seulement des extrémités.
On peut donc écrire

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E}\,\overrightarrow{dl}$$

et

$$\vec{E} = -grad\,V$$

La fonction scalaire V est le <u>potentiel électrique</u>.

Le potentiel d'une charge ponctuelle est $$V = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

et pour une charge répartie en volume $$V = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho}{R}\,d\tau \qquad \text{(A)}$$

Aussi bien le champ que le potentiel respectent le <u>principe de superposition</u>

Equation du potentiel $$div\,(-grad\,V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ équation de Poisson

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

En un point où il n'y a pas de charge, $\rho = 0$, et l'équation de Poisson se réduit à <u>l'équation de Laplace</u>

$$\Delta V = 0$$

L'expression (A) pour le potentiel est donc la solution de l'équation de Poisson dans le cas général.
Résoudre un problème d'électrostatique consiste à trouver le champ électrique pour une certaine configuration

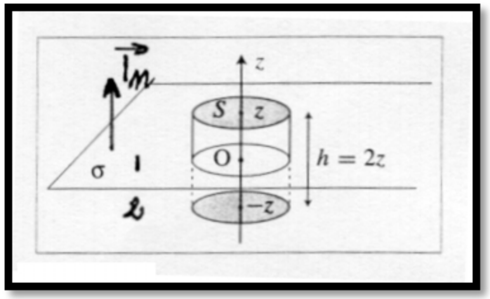
1) Si les positions de toutes les charges sont connues
2) Dans d'autres problèmes, la position des charges n'est pas connue a priori.
   Dans ce cas il faut résoudre l'équation de Poisson pour trouver le potentiel en tout point. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles qui doit être résolue avec des conditions aux limites adéquates qui imposent la valeur du potentiel sur certaines surfaces. On peut démontrer que la solution est alors <u>unique</u>.

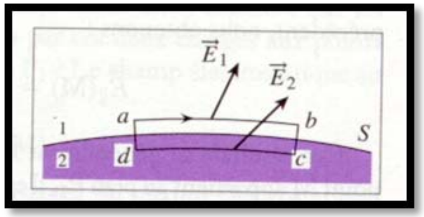
Variation du champ électrique au travers d'une surface chargée

$$\oint \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, S_b}{\varepsilon_0}$$

$$\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right).\,\vec{1}_n\; S_b = \frac{\sigma\, S_b}{\varepsilon_0}$$

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$





$$\oint_c \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dl} = 0$$

$$\int_a^b (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\,.\,\overrightarrow{dl} = 0$$

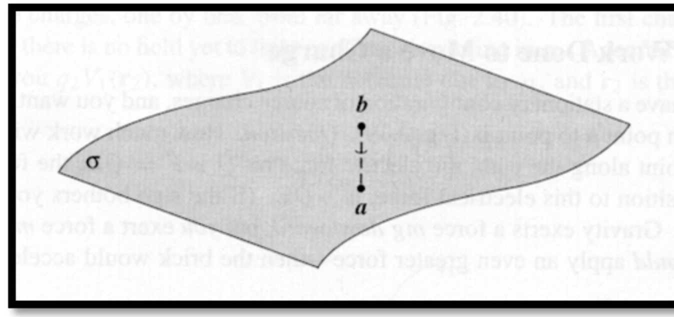
$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$$

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{1}_n$$

$\vec{1}_n$ est le vecteur unité dirigé de 2 vers 1.

$$V_1 - V_2 = -\int_a^b \vec{E} \, . \, \overrightarrow{dl}$$

$$V_1 = V_2$$



La gradient de V est cependant discontinu :

$$\left(grad\ V\right)_1 - \left(grad\ V\right)_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{1}_n$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = grad\ V \, . \, \vec{1}_n$$

qui est la dérivée normale du potentiel (c'est-à-dire le taux de variation dans la direction perpendiculaire à la surface).

<u>Remarque</u>

Si l' espace 2 est un conducteur parfait, $\vec{E}_2 = 0$

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{1}_n \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Énergie électrostatique

Travail à fournir pour déplacer une charge

$$W = \int_a^b \vec{f} \,.\, \overrightarrow{dl}$$

$$\vec{f} = -q\,\vec{E}$$

$$W = -q \int_a^b \vec{E} \,.\, \overrightarrow{dl} = q\left[V(b) - V(a)\right]$$

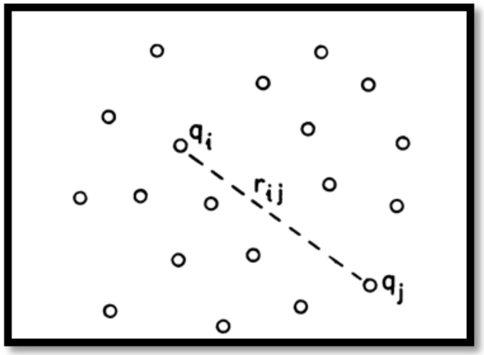
Si on fixe le zéro de potentiel à l'infini $(V(\infty) = 0)$, le travail nécessaire pour amener la charge test depuis l'infini jusqu'au point b sera :

$$W = q\,V(b)$$

Ce travail correspond à un accroissement de l'énergie potentielle du système, c'est-à-dire de l'énergie que l'on pourra récupérer si on laisse toutes les charges retourner à l'infini.

Energie électrostatique d'un ensemble de charges

$$W_2 = q_2 \, \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \, r_{12}}$$



$$W_3 = q_3 \, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)$$

$$W_4 = q_4 \, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}}\right)$$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1\,q_2}{r_{12}} + \frac{q_1\,q_3}{r_{13}} + \frac{q_1\,q_4}{r_{14}} + \frac{q_2\,q_3}{r_{23}} + \frac{q_2\,q_4}{r_{24}} + \frac{q_3\,q_4}{r_{34}}\right)$$

De manière générale pour n charges :

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{n} \frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}$$

symétriser cette relation

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0\, r_{ij}}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i\, V(\vec{R}_i)$$

où $V(\vec{R}_i)$ est le potentiel produit au point $\vec{R}_i$ (la position de q_i) par toutes les autres charges.

Energie électrostatique d'une distribution continue de charges

$$W = \frac{1}{2}\int_\tau \rho V \, d\tau$$

$$\rho = \varepsilon_0 \, div \, \vec{E}$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\tau V \, div \, \vec{E} \, d\tau$$

$$div\,(V\,\vec{E}) = V \, div \, \vec{E} + \vec{E} \,.\, grad \, V$$

$$W = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_\tau \vec{E} \,.\, grad \, V \, d\tau + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\tau div\,(V\,\vec{E}) \, d\tau$$

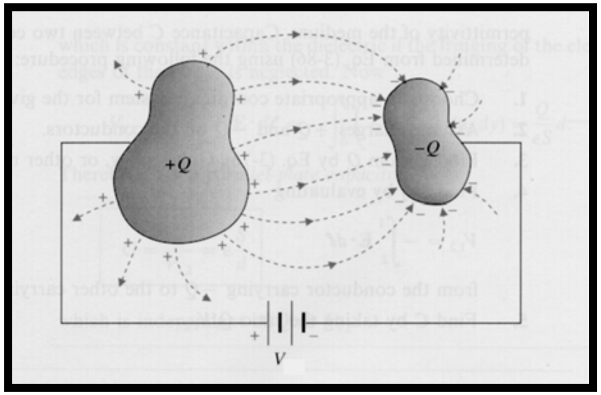
théorème d'Ostrogradsky pour la 2ème intégrale, et en remplaçant $grad \, V = -\vec{E}$ dans la 1ère :

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\tau E^2 \, d\tau + \frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S V \, \vec{E} \,.\, \overrightarrow{dS}$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{tout l'espace}} E^2 \, d\tau$$

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \, E^2$$

Condensateurs



A l'équilibre électrostatique :

- Le champ électrique $\vec{E}$ sera nul à l'intérieur de chaque conducteur;
- Toute la charge se répartira à la surface des conducteurs sous forme d'une densité superficielle σ;
- Tous les points à l'intérieur et sur la surface d'un conducteur seront au même potentiel;
- Le champ électrique à l'extérieur, et au voisinage immédiat du conducteur, est normal à la surface du conducteur :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{1}_n$$

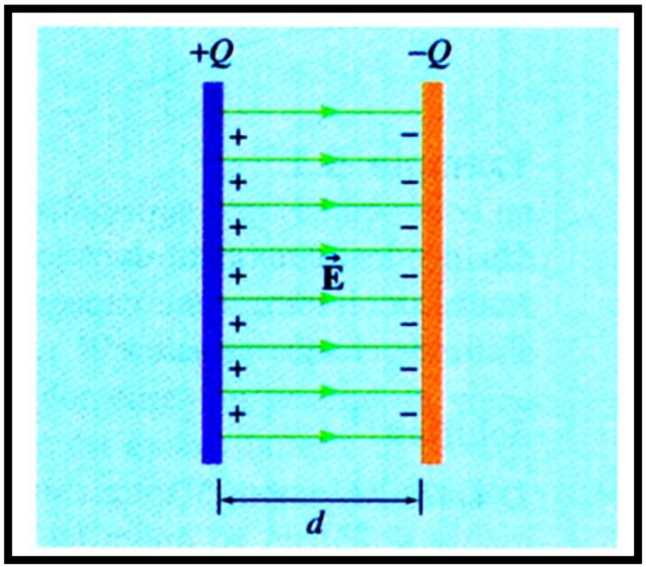
où σ est la densité superficielle locale de charge.

$$V = V_1 - V_2 = -\int_2^1 \vec{E}\,\overrightarrow{dl}$$

(V_1 est le potentiel du conducteur chargé positivement)

$$Q = C\,V$$

Condensateur plan



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0\ A}$$

$$V = E\ d = \frac{d}{\varepsilon_0\ A} Q$$

$$C = \frac{\varepsilon_0\ A}{d} \qquad \text{(F)}$$

Énergie emmagasinée dans un condensateur

L'énergie emmagasinée dans un condensateur est le travail accompli, par exemple par une pile, pour le charger. Il faut donc transférer des charges d'une armature à l'autre (la charge circulera dans les fils et non dans l'espace entre les armatures).
Il s'agit donc de l'énergie nécessaire pour effectuer la séparation des charges.

1) Le travail nécessaire pour déplacer une charge q_1 d'un point A à un point B est :

$$q_1\left(V_B - V_A\right)$$

Supposons qu'à un moment du processus la charge sur chaque armature soit q, et donc la tension soit q/C. Le travail nécessaire alors pour transférer une charge élémentaire dq est :

$$dW = \frac{q}{C}\,dq$$

Le travail total pour faire passer toute la charge Q est donc

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{Q^2}{2\,C}$$

Ce travail est emmagasiné sous forme d'énergie potentielle, et on peut écrire :

$$W = \frac{1}{2}\,C\,V^2$$

2) $$W = \frac{1}{2}\left[\int_{S_1} \sigma_1 V_1 \, dS_1 + \int_{S_2} \sigma_2 V_2 \, dS_2\right]$$

où S_1 et S_2 sont les surfaces des deux conducteurs. Comme les potentiels V_1 et V_2 sont constants sur les surfaces :

$$W = \frac{1}{2}\left[V_1 \, Q + V_2 \, (-Q)\right] = \frac{1}{2} Q \, V = \frac{1}{2} C \, V^2$$

3) (pour le condensateur plan)

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \, E^2$$

$$W = \int_\tau \frac{1}{2} \varepsilon_0 \, E^2 \, d\tau = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \, E^2 \, A \, d = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \, A}{d} V^2 = \frac{1}{2} C \, V^2$$

Forces électrostatiques

Condensateur plan à charge constante

Force entre les armatures d'un condensateur plan. Si nous imaginons que l'espacement entre les armatures est augmenté d'une petite quantité Δz , le travail mécanique accompli par l'extérieur pour déplacer les armatures est

$$\Delta W = F_m \, \Delta d$$

où F_m est la force mécanique. Ce travail doit être égal à la variation d'énergie du condensateur. L'énergie du condensateur est :

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Si le condensateur est déconnecté de la pile qui a servi à le charger, la charge Q reste constante :

$$\Delta W = \frac{1}{2} Q^2 \, \Delta\left(\frac{1}{C}\right)$$

$$F_m \, \Delta d = \frac{1}{2} Q^2 \Delta\left(\frac{1}{C}\right)$$

Pour le condensateur plan :

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon_0 \; A}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{\Delta d}{\varepsilon_0 \; A}$$

et la force mécanique entre les armatures est

$$F_m = \frac{Q^2}{2 \; \varepsilon_0 \; A}$$

Il existe donc une force électrique d'attraction entre les armatures qui tend à augmenter la valeur de la capacité. La mesure de la force F_m permettrait de mesurer la charge Q, c'est le principe d'un électromètre.

Condensateur plan à potentiel constant

Si le condensateur reste connecté à la pile pendant le déplacement virtuel, la différence de potentiel V restera constante, et c'est la charge qui va varier. Il faut donc tenir compte du travail fourni par la source pour garder le potentiel constant (nouvelle séparation des charges). Comme on a toujours $Q = C\,V$, la variation de charge est $\Delta Q = V\,\Delta C$ et le travail fourni par la source est

$$V\,\Delta Q = V^2\,\Delta C$$

La variation d'énergie potentielle est donnée par

$$W = \frac{1}{2} C\,V^2 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta W = \frac{1}{2} V^2\,\Delta C$$

Le bilan donne :

travail de la source + travail mécanique = variation d'énergie potentielle

$$V^2\,\Delta C \quad + \quad F_m\,\Delta z \quad = \quad \frac{1}{2} V^2\,\Delta C$$

et donc $F_m\,\Delta z = -\frac{1}{2} V^2\,\Delta C$ $\qquad \Delta C = -\frac{\varepsilon_0\,A}{d^2}\Delta d$

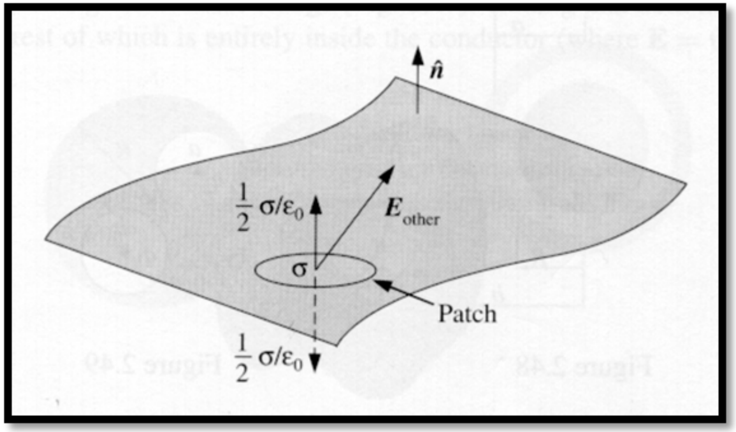
$$F_m = \frac{\varepsilon_0\,A}{2\,d^2} V^2$$

ce qui donne bien le même résultat . On constate que la force est proportionnelle au carré de la différence de potentiel (en alternatif ce sera le carré de la valeur efficace). En mesurant cette force en aura donc un voltmètre (de type quadratique): c'est le principe du voltmètre électrostatique.

Force sur une charge de surface

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{local}} + \vec{E}_{\text{autres}}$$

Le champ $\vec{E}_{\text{autres}}$ ne subit pas de discontinuité en P. La discontinuité est due seulement aux charges de la plage locale qui donnent un champ $\dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}$ de part et d'autre de la surface (et s'éloignant de la surface).



Surface chargée

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_{\text{autres}} + \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{1}_n$$

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}_{\text{autres}} - \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{1}_n$$

Par définition, la force sur la plage sera due exclusivement à $\vec{E}_{\text{autres}}$ (car en statique, une charge ne peut pas exercer de force sur elle-même). La force par unité de surface sera :

$$\vec{f} = \sigma\,\vec{E}_{\text{autres}}$$

$$\vec{E}_{\text{autres}} = \frac{1}{2}\left[\vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{int}}\right]$$

En particulier pour un conducteur, le champ est nul à l'intérieur et vaut $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ à l'extérieur :

$$\vec{E}_{\text{int}} = 0$$

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{1}_n$$

$$\vec{E}_{\text{autres}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{1}_n$$

(dans le cas d'un conducteur, toutes les autres charges du conducteur "conspirent" pour produire un champ additionnel au point P égal en intensité au champ local)

La force est donc

$$\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\,\varepsilon_0}\vec{1}_n$$

Le dipôle électrique

Moment dipolaire $\vec{p}$:

$$\vec{p} = q\,\vec{d} \qquad \text{(C.m)}$$

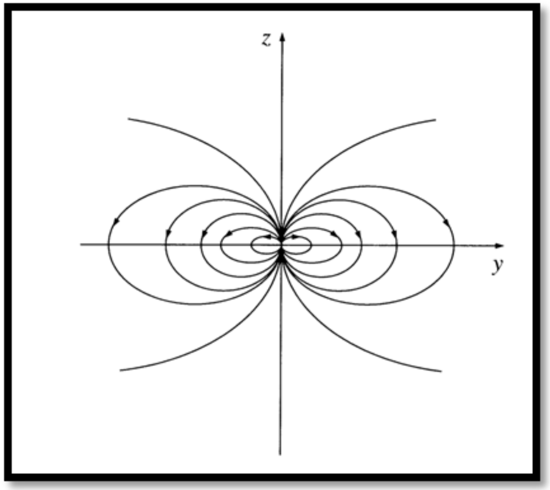
C'est un vecteur orienté de la charge négative vers la charge positive.

Le potentiel d'un dipôle est donné par :

$$V\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\vec{p}\,.\,\vec{1}_R}{R^2}$$

où $\vec{R}$ représente le vecteur joignant le dipôle au point considéré.

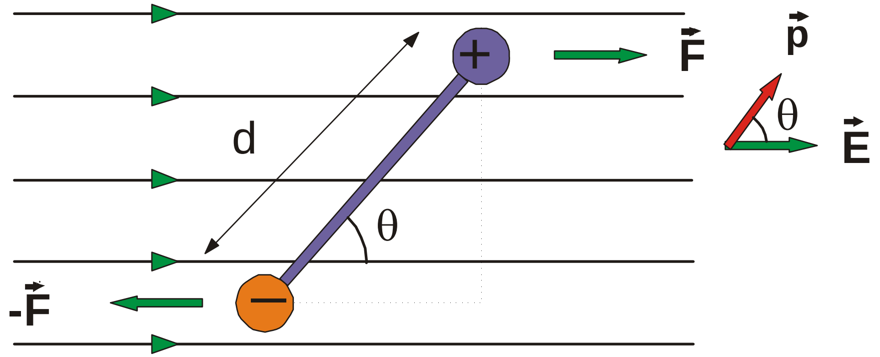
Le champ électrique d'un dipôle orienté suivant l'axe z est :



Champ d'un dipôle

Couple sur un dipôle

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

où $\vec{r}$ est le vecteur position du point d'application de la force.

Pour le dipôle, dans un champ uniforme :

$$\vec{\tau} = (\vec{r}_+ \times \vec{F}_+) + (\vec{r}_- \times \vec{F}_-)$$

$$\vec{F}_+ = -\vec{F}_- = q\,\vec{E}$$

$$\vec{\tau} = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times q\,\vec{E} = \vec{d} \times q\,\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Energie potentielle d'un dipôle

$$W = q\,V_+ - q\,V_-$$

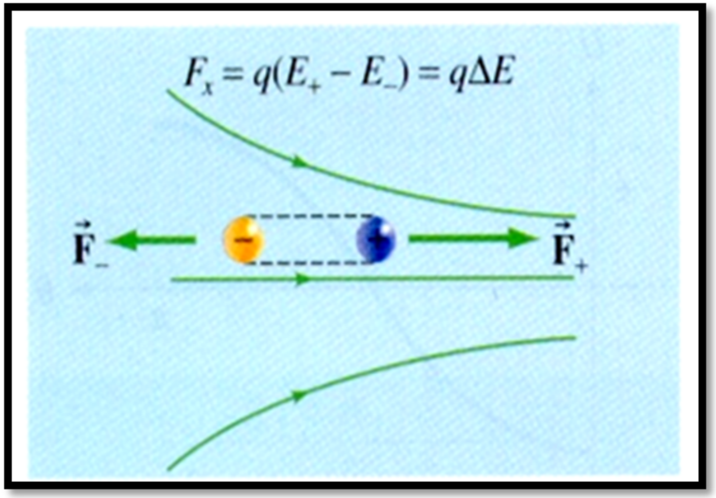
$$V_+ - V_- = -\vec{E} \,.\, \vec{d}$$

$$W = -\vec{p} \,.\, \vec{E} = -p\;E\;\cos\theta$$

Force sur un dipôle

Si le champ est non uniforme, le dipôle sera soumis, en plus du couple, à une force résultante non nulle.

cas particulier : le moment $\vec{p}$ est parallèle au champ $\vec{E}$



$$F_x = F_{x+} + F_{x-} = q\,(E_{x+} - E_{x-})$$

$$E_{x+} - E_{x-} = d\,\frac{dE_x}{dx}$$

$$F_x = p\,\frac{dE_x}{dx}$$

Si $\frac{dE_x}{dx}$ est positif, la force est dirigée dans le sens de x positif, c'est-à-dire vers la région où le champ est le plus grand.

Dans le cas général, on a : $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\,(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = q\,\overrightarrow{\Delta E}$

$$\Delta E_x = \vec{d}\,.\,grad\;E_x$$

$$F_x = \vec{p}\,.\,grad\;E_x = p_x\,\frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y\,\frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z\,\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$\vec{F} = (\vec{p}\,.\,grad)\,\vec{E}$$