SERVICE CONSTRUCTION, ARCHITECTURE ET URBANISME
DEPARTMENT OF BUILDING, ARCHITECTURE AND TOWN PLANNING

CNST - H - 200

Mécanique des solides et des fluides

មេកានិចនៃអង្គធាតុរឹងនិងសន្ទនីយវត្ថុ

Prof. Guy WARZEE

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

Table des matières

Table des matières

- **Cinématique des milieux continus**

  les vitesses de déformation
  le tourbillon
  les déformations (Green, évanouissantes)

- **Lois universelles de la mécanique des milieux continus : conservation ...**

  de la masse
  de la quantité de mouvement
  du moment de la quantité de mouvement
  de l'énergie

résultante cinétique

moment cinétique

Table des matières

Hooke

Navier-Stokes

- **Lois constitutives** pourquoi en a-t-on besoin ?

  les solides : élasticité linéaire
  les fluides : les fluides parfaits et
  les fluides visqueux newtoniens

- **Théorèmes des travaux virtuels**

  pourquoi les théorèmes des travaux virtuels ?
  travail virtuel externe
  théorème des travaux virtuels pour des déplacements infinitésimaux de corps rigide
  travail virtuel interne
  théorème des travaux virtuels pour des déplacements quelconques
  domaines de validité et remarques

Table des matières

- **Statique des fluides**

  Pascal, Archimède
  fluides compressibles, fluides incompressibles

- **Equations générales de cinématique des fluides**

  le champ de tourbillon
  tube de tourbillon, ...
  circulation de la vitesse, ...

F L U I D E S

Table des matières

- **Cinématique et dynamique des fluides parfaits**

  équations du mouvement : Euler, Lamb
  les théorèmes de Bernoulli (1 et 2)
  écoulement permanent irrotationnel
  vitesse du son, subsonique, supersonique
  portance d'un profil

  Mach

- **Cinématique et dynamique des fluides visqueux**

  équations du mouvement : Navier-Stokes
  les théorèmes de Bernoulli (3 et 4)
  les pertes de charge

7

Informations via Internet : "Université virtuelle"

http://uv.ulb.ac.be/

L'Université
Virtuelle

ULB

CTA

Connexion

Nom d'utilisateur:

Mot de passe:

OK

Liste des cours

CNST-H-200 - Mécanique des solides et des fluides (G.Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

CNST-H-303 - Analyse des structures (G. Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

CNST-H-403 - Méthode des éléments finis (structures) (G. Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

CNST-H-421 - Structural Analysis and Finite Elements (G. Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

CNST-H-508 - Méthode des éléments finis (compléments) (G. Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

CNST-H-200
Mécanique des solides et des fluides

.... Cercle de Mohr interactif
.... aide-mémoire pour l'examen écrit
.... modalités d'examens

BATir

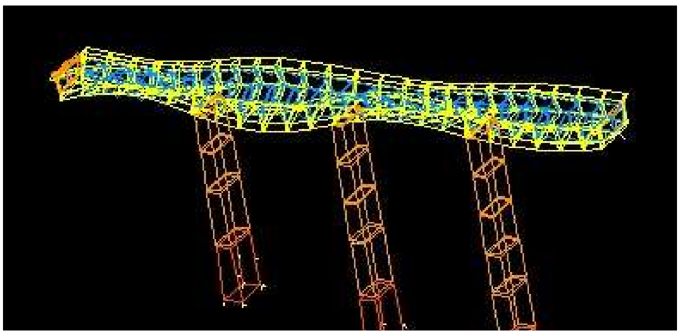
8

Application en génie civil ...

Le pont-canal des ascenseurs funiculaires de Strépy

calcul sismique

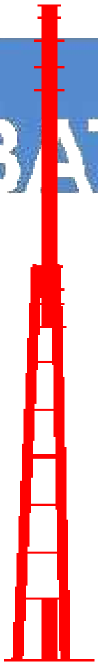
BATir

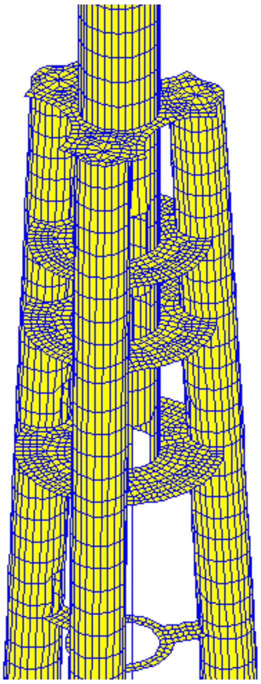


BATir

Application en génie civil ...

Tour de télécommunications à Namur

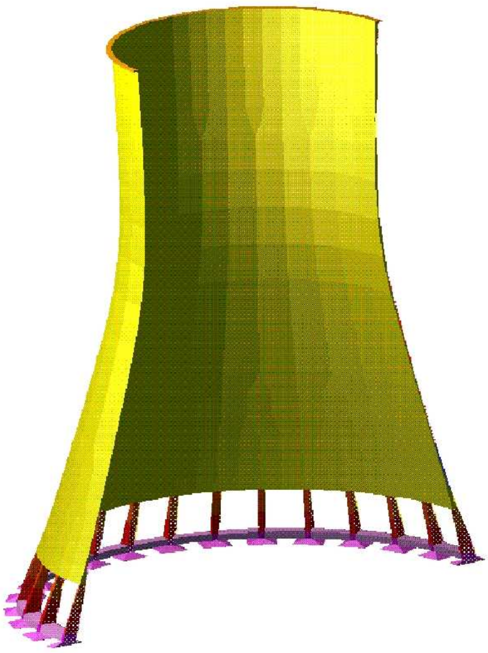




21.653 éléments ; 95.241 ddl

Application en génie civil ...

Tours de réfrigération de la centrale de Chooz



Références bibliographiques

- J. Salençon
  Mécanique des milieux continus - Ed. Ellipses, Paris, 1988

- F. Frey
  Analyse des structures et milieux continus (traité de génie civil) - Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1998

- J. Coirier
  Mécanique des milieux continus - Ed. Dunod, Paris, 1997

- I. L. Ryhming
  Dynamique des fluides - Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1985

BATir

Service Construction, Architecture et Urbanisme

Department of Building, Architecture and Town Planning

Introduction

ULB

Université Libre de Bruxelles, Université d'Europe

Les deux approches

Première approche (Euler)	Deuxième approche (d'Alembert)
équations du mouvement ↓ théorème de la résultante cinétique théorème du moment cinétique	← postulat de d'Alembert (travaux virtuels, puissances virtuelles)
loi de la résultante cinétique loi du moment cinétique ↓ équations du mouvement	→ théorème des puissances virtuelles théorème des travaux virtuels

Hypothèses de continuité

Un milieu est continu si on peut définir mathématiquement des densités de propriétés physiques qui sont des fonctions continues des coordonnées spatiales

- **exemple :**

$$dm = \rho \, dV \qquad (\rho \text{ continu})$$

Hypothèses de continuité

- deux points matériels infiniment voisins à l'instant t_0 restent infiniment voisins à tout instant $t > t_0$ et réciproquement

- continuité de la transformation par rapport au temps :
  point P_0 (x_0 , y_0 , z_0) à l'instant t_0 se déplace en P (x , y , z) à l'instant t

$$\begin{cases} x = f(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = g(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = h(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \quad \text{ou inversément} \quad \begin{cases} x_0 = F(x, y, z, t) \\ y_0 = G(x, y, z, t) \\ z_0 = H(x, y, z, t) \end{cases}$$

les fonctions f , g , h , F , G , H sont uniformes et continues et leurs dérivées partielles premières continues par rapport à l'ensemble des variables dont elles dépendent

Hypothèses de continuité

- **tout ensemble continu de points matériels à l'instant t_0 reste continu à l'instant t et réciproquement. Un ensemble fermé reste fermé**

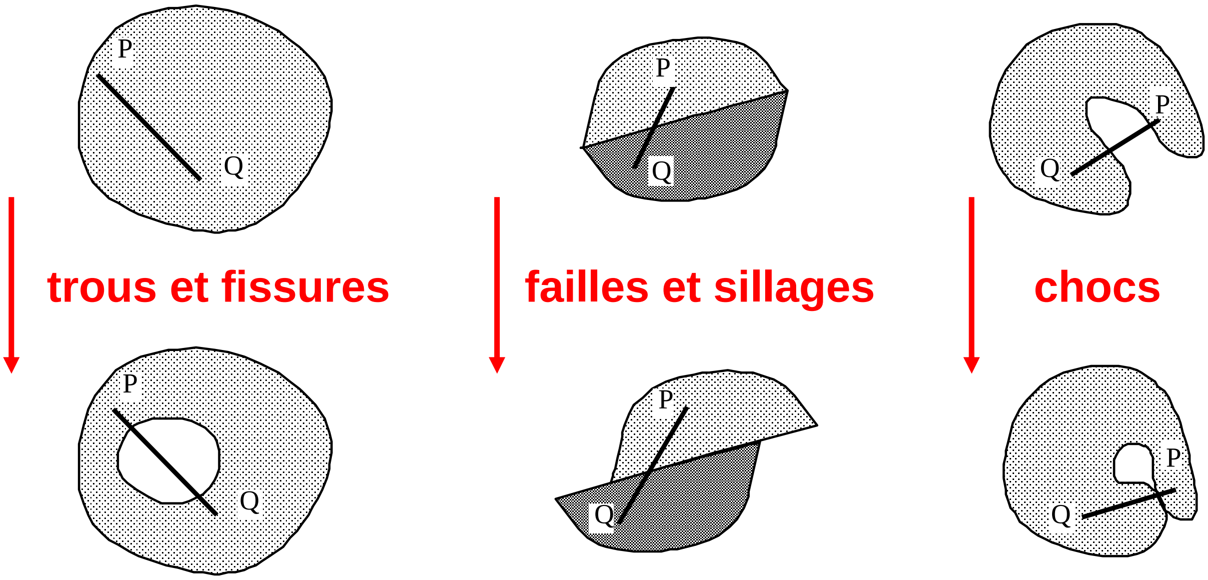
- **les points matériels à l'intérieur d'une surface fermée restent à l'intérieur de cette surface déformée (surface matérielle) qui ne contiendra aucun autre point matériel**

- **à l'intérieur d'une surface matérielle fermée, la quantité de masse est constante au cours du temps**

- **les points matériels constituant la frontière d'un milieu continu à un instant t_0, en forment la frontière en tout autre instant t**

Hypothèses de continuité

Phénomènes ne respectant pas les hypothèses de continuité ...



Notions de base et hypothèses

- **la masse est distribuée de façon continue**

$$\rho = \lim_{V=0} \frac{M}{V}$$

masse

masse volumique

volume

- **la cinématique étudie des points matériels (avec masse)**
- **les forces**
  - "à distance" : réparties en volume $\bar{f}\, dV$
  - "de contact" : réparties en surface $\bar{T}\, dS$

Définition de la résultante cinétique

- **résultante cinétique ou résultante des quantités de mouvement**

quantité de mouvement élémentaire : $\bar{v}\,.\,dm = \bar{v}\,.\rho\, dV$

$$\bar{\mathcal{R}} = \int_M \bar{v}\,.\,dm = \int_V \bar{v}\,.\rho\, dV$$

Définition du moment cinétique

- **moment cinétique ou moment des quantités de mouvement**

par rapport à un point géométrique fixe

$$\bar{\mathfrak{M}} = \int_M (\bar{r} \times \bar{v})\,.\,dm = \int_V (\bar{r} \times \bar{v})\,.\rho\, dV$$

Symboles et unités

symbole	en français …	en anglais …	S.I.
ρ	masse volumique	specific mass	kg/m^3
m	masse	mass	kg
V	volume	volume	m^3
$(\ldots)^{\bullet}$	dérivée matérielle	time derivative	s^{-1}
f_i	force de volume	volume load	N/m^3
F_i	force massique	mass load	N/kg
v_i	vecteur vitesse	velocity	m/s
r_i	vecteur position	position	m

Symboles et unités

symbole	en français …	en anglais …	S.I.
n_i	cosinus directeurs de la normale	components of the normal vector	-
δ_{ij}	symbole de Kronecker	symbol of Kronecker	-
$\overline{T}^{(n)}$	vecteur contrainte associé à la normale n	stress vector associated with normal vector n	N/m^2
τ_{ij}	tenseur des contraintes	stress tensor	N/m^2
σ_I , σ_{II}	contraintes principales	principal stresses	N/m^2
σ_n	contrainte normale	normal stress	N/m^2
τ_{nt}	contrainte tangentielle	shear stress	N/m^2
C ou M	couple ou moment résultant	torque or momentum	Nm

SERVICE CONSTRUCTION, ARCHITECTURE ET URBANISME
DEPARTMENT OF BUILDING, ARCHITECTURE AND TOWN PLANNING

BATir

Calcul tensoriel

ULB

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

Introduction

- les grandeurs physiques ou géométriques sont définies par leurs composantes dans un système d'axes
- la façon dont ces composantes varient lorsqu'on change de système d'axes, définit le type de grandeur (scalaire, vecteur, …)
- on définit, sur ces grandeurs, des opérations symboliques : addition, multiplication, …
- la définition de tout nouveau type de grandeur implique de définir :
  les lois de changement d'axes pour les composantes
  les opérations symboliques

Introduction

- **les formules traduisant des phénomènes physiques doivent être valables quel que soit le système d'axes**
- **pour simplifier, on se limitera aux systèmes d'axes rectilignes et rectangulaires (pour définir des tenseurs cartésiens)**
- **pour simplifier l'écriture des équations, on utilisera les notations indicielles**

Les notations indicielles : définitions

afin de simplifier les notations, on utilisera les notations indicielles

- **Un indice représente un numéro de composante**
- **Dans un terme d'une équation, un indice peut apparaître :**
  - **1 x** : il doit alors apparaître une fois dans tous les termes de l'équation. On dit qu'il s'agit d'un indice libre
  - **2 x** : il représente une sommation
    On dit qu'il s'agit d'un indice muet (on peut modifier son nom)
- **Un indice ne peut pas apparaître plus de 2 fois dans un terme d'une équation**

Les notations indicielles : exemples

exemples de notations correctes

notation développée	notation indicielle
$\bar{c} = c_x 1\bar{x} + c_y 1\bar{y} + c_z 1\bar{z}$	$\bar{c} = c_i 1\bar{x}_i$
$q = \bar{u} \,.\, \bar{n} = u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z$	$q = \bar{u} \,.\, \bar{n} = u_k n_k$
$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$	$c_i = \delta_{ijk} a_j b_k$

BATir

Les notations indicielles : exemples

exemples de notations correctes

équations	indices muets	indices libres
$\rho v_k \partial_k v_i = f_i - \partial_i p$	k	i
$\tau_{ij} = 2 \mu a_{ij} + \lambda \delta_{ij} a_{kk}$	k	i, j
$w = \frac{1}{2} \tau_{ij} a_{ij}$	i, j	-

BATir

Les notations indicielles : exemples

exemples de notations **fausses**

équations	indices libres	indices muets
$\tau_{kk} = 2\mu\, a_{kk} + \lambda\, \delta_{kk}\, a_{kk}$	–	k **erroné**
$k_{ij} = \lambda_i\, \delta_{ij}$	i **erroné**	i **erroné**

Les notations indicielles : remarques

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv (\ldots)_{,i}$$

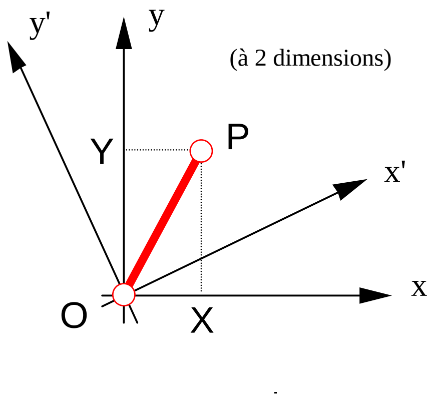
, en indice

$$\partial_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t}$$

l'indice 0 n'obéit **PAS** à la règle de notation indicielle

Les notations indicielles : rotation des axes

- **axes $\overline{1x}, \overline{1y}, \overline{1z}$**



$$x = OX \quad ; \quad y = OY \quad ; \quad z = OZ$$

$$\overline{OP} = x\,\overline{1x} + y\,\overline{1y} + z\,\overline{1z}$$

$$\overline{OP} = x_i\,\overline{1x_i} \qquad \text{avec} \qquad x = \overline{OP}\,.\,\overline{1x} \;\; ; \;\; y = \dots \;\; ; \;\; z = \dots$$

Les notations indicielles : rotation des axes

- **axes $\overline{1x'}, \overline{1y'}, \overline{1z'}$**

$$x' = \overline{OP}\,.\,\overline{1x'} \qquad \text{avec} \qquad \overline{OP} = x\,\overline{1x} + y\,\overline{1y} + z\,\overline{1z}$$

$$x' = (x\,\overline{1x} + y\,\overline{1y} + z\,\overline{1z})\,.\,\overline{1x'} = x\left(\overline{1x}.\overline{1x'}\right) + y\left(\overline{1y}.\overline{1x'}\right) + z\left(\overline{1z}.\overline{1x'}\right)$$

en notant : $\cos(x, x') = \left(\overline{1x}.\overline{1x'}\right)$ **; … et avec** $\cos(y', x) = \cos(x, y') \;\; ; \;\; \dots$

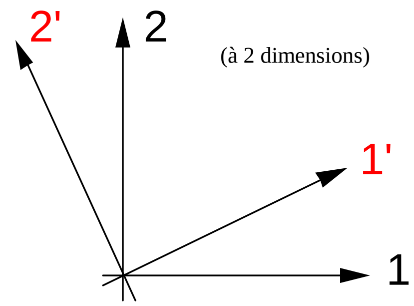
$$\begin{cases} x' = x\cos(x,x') + y\cos(y,x') + z\cos(z,x') \\ y' = x\cos(x,y') + y\cos(y,y') + z\cos(z,y') \\ z' = x\cos(x,z') + y\cos(y,z') + z\cos(z,z') \end{cases}$$

Les notations indicielles : rotation des axes

$$\begin{cases} x' = x \cos(x, x') + y \cos(y, x') + z \cos(z, x') \\ y' = x \cos(x, y') + y \cos(y, y') + z \cos(z, y') \\ z' = x \cos(x, z') + y \cos(y, z') + z \cos(z, z') \end{cases}$$

ou, en notations indicielles $\boxed{x_i' = x_j \cos(x_j, x_i')}$

et, similairement $\boxed{x_i = x_j' \cos(x_j', x_i)}$



3 équations (i = 1, 2, 3) avec,
dans chacune, une somme sur j = 1, 2, 3

Les notations indicielles : rotation des axes

$$\alpha_{ij} = \cos(x_j', x_i)$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad \text{avec} \quad \cos(x_j', x_i) = \cos(x_i, x_j')$$

uniquement si on permute aussi
"anciens axes" et "nouveaux axes"

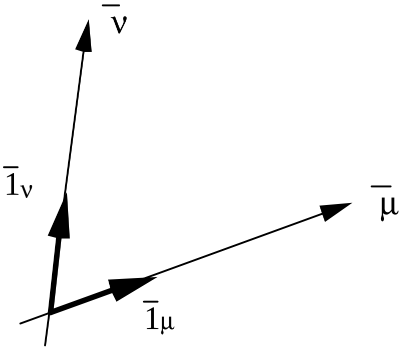
$$\boxed{x_I' = \alpha_{Ij}\, x_j \quad \text{avec} \quad \alpha_{Ij} = \cos(x_I', x_j)}$$

il est prudent d'utiliser des majuscules et des minuscules

35

Les notations indicielles : exemple

calcul de l'angle entre deux directions



$$\overline{1}\mu = \cos(\mu, x_i)\,\overline{1}x_i \quad \text{et} \quad \overline{1}\nu = \cos(\nu, x_j)\,\overline{1}x_j$$

$$\overline{1}\mu \,.\, \overline{1}\nu = \cos(\mu, x_i)\cos(\nu, x_j)\,\overline{1}x_i.\overline{1}x_j$$

$$\cos(\mu,\nu) = \cos(\mu, x)\cos(\nu, x) + \cos(\mu, y)\cos(\nu, y) + \cos(\mu, z)\cos(\nu, z)$$

$$\boxed{\cos(\mu,\nu) = \cos(\mu, x_i)\cos(\nu, x_i)}$$

BATir

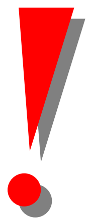
36

Leopold Kronecker

(1823 - 1891)

Le symbole de Kronecker δ_{ij}

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}}$$



attention : $\delta_{22} = 1$ mais $\delta_{jj} = 3$

$$\left.\begin{array}{l} x_j = \alpha_{Kj}\, x'_K \\ x'_K = \alpha_{Ki}\, x_i \end{array}\right\} \quad x_j = \alpha_{Kj}\,\alpha_{Ki}\, x_i \qquad \boxed{\alpha_{Kj}\,\alpha_{Ki} = \delta_{ij}}$$

BATir

Le symbole de Kronecker δ_{ijk}

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } ijk \text{ est une permutation de } 1\,2\,3 \\ -1 & \text{si } ijk \text{ est une permutation de } 3\,2\,1 \\ 0 & \text{si } ijk \text{ n'est pas une permutation de } 1\,2\,3 \text{ ni de } 3\,2\,1 \end{cases}$$

la i$^{\text{ème}}$ composante du produit vectoriel $\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c}$ **s'écrit** $a_i = \delta_{ijk}\, b_j\, c_k$

la formule d'expulsion $\bar{a} \times \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \bar{b}\left(\bar{a}\,.\,\bar{c}\right) - \bar{c}\left(\bar{a}\,.\,\bar{b}\right)$

conduit à $\boxed{\delta_{ijk}\,\delta_{ipq} = \delta_{jp}\,\delta_{kq} - \delta_{jq}\,\delta_{kp}}$

Opérateur $\bar{\nabla}$

NB : une virgule devant un indice indique une dérivation

opérateur	notation symbolique	notation usuelle	notation indicielle
gradient	$\overline{\text{grad}}\ \phi$	$\bar{\nabla}\,\phi$	$\partial_i\,\phi = \phi_{,i}$
divergence	$\text{div}\ \bar{v}$	$\bar{\nabla}\,.\,\bar{v}$	$\partial_i\, v_i = v_{i,i}$
rotationnel	$\overline{\text{rot}}\ \bar{v}$	$\bar{\nabla} \times \bar{v}$	$\delta_{ijk}\,\partial_j\, v_k$
laplacien	$\Delta\,\phi$	$\left(\bar{\nabla}\,.\,\bar{\nabla}\right)\phi$	$\partial_{ii}\,\phi = \phi_{,ii}$

Un scalaire …

(ou tenseur d'ordre 0)

1

Un scalaire est une grandeur mesurée par un nombre indépendant du choix des axes coordonnés

exemples : la distance entre deux points
l'énergie cinétique
la masse

2

**Lors d'un changement d'axes,
la valeur du scalaire n'est pas modifiée**

Un vecteur …

(ou tenseur d'ordre 1)

$$v'_K = \bar{v} \,.\, 1\bar{x}'_K = (v_j \,.\, 1\bar{x}_j)\, 1\bar{x}'_K$$

$$= v_j\, (1\bar{x}'_K . 1\bar{x}_j) = v_j\, \alpha_{Kj}$$

1

Un vecteur est une grandeur mesurée par 3 composantes qui se transforment selon

$$v'_K = \alpha_{Kj}\, v_j$$

pour tout changement d'axes coordonnés

exemples : la vitesse
une force
le tourbillon

Un vecteur ...

(ou tenseur d'ordre 1)

soit un vecteur $\overline{v}$ défini par ses composantes : $\overline{v} = v_x \, \overline{1}x + v_y \, \overline{1}y + v_z \, \overline{1}z$ ou $\overline{v} = v_i \, \overline{1}x_i$

soit une direction définie par le vecteur unitaire :

$$\overline{1}\mu = \cos(\mu, x)\,\overline{1}x + \cos(\mu, y)\,\overline{1}y + \cos(\mu, z)\,\overline{1}z$$

ou $\overline{1}\mu = \cos(\mu, x_i)\,\overline{1}x_i$

la projection du vecteur $\overline{v}$ sur la direction $\overline{1}\mu$ s'écrit :

$$\overline{v}\,.\overline{1\mu} = v_x \cos(\mu, x) + v_y \cos(\mu, y) + v_z \cos(\mu, z)$$

$$\boxed{v^{(\mu)} = v_i \cos(\mu, x_i)}$$

Un vecteur ...

(ou tenseur d'ordre 1)

2

Un vecteur associe un scalaire $v^{(\mu)}$
à toute direction, par une combinaison linéaire des
cosinus directeurs de cette direction

$$\boxed{v^{(\mu)} = v_i \cos(\mu, x_i)}$$

la valeur du scalaire est évidemment
indépendante du système d'axes

ou ... Un tenseur d'ordre 1 associe un tenseur d'ordre 0
à toute direction, par ...

Un tenseur d'ordre 2

en généralisant la définition d'un vecteur, on a :

2

Un vecteur associe un scalaire à toute direction, par une combinaison linéaire des cosinus directeurs de cette direction

$$v^{(\mu)} = v_i \cos(\mu, x_i)$$

$$\overline{T}^{(n)} = \overline{T}_i \cos(n, x_i)$$

2

Un tenseur associe un vecteur à toute direction, par une combinaison linéaire des cosinus directeurs de cette direction

$$\overline{T}^{(n)} = \overline{T}_1 \cos(n, x_1) + \overline{T}_2 \cos(n, x_2) + \overline{T}_3 \cos(n, x_3)$$

Un tenseur d'ordre 2

$$\overline{T}^{(n)} = \overline{T}_i \cos(n, x_i)$$

ou $\overline{T}^{(n)} = \overline{T}_1 \cos(n, x_1) + \overline{T}_2 \cos(n, x_2) + \overline{T}_3 \cos(n, x_3)$

ou $\boxed{\overline{T}^{(n)} = \overline{T}_i n_i}$ avec $n_i = \cos(n, x_i)$

exprimons ces vecteurs $\overline{T}_i$ en fonction de leurs composantes

$$\begin{cases} \overline{T}_1 = T_{11}\,\overline{1}x_1 + T_{12}\,\overline{1}x_2 + T_{13}\,\overline{1}x_3 \\ \overline{T}_2 = T_{21}\,\overline{1}x_1 + T_{22}\,\overline{1}x_2 + T_{23}\,\overline{1}x_3 \\ \overline{T}_3 = T_{31}\,\overline{1}x_1 + T_{32}\,\overline{1}x_2 + T_{33}\,\overline{1}x_3 \end{cases}$$

ou $\boxed{\overline{T}_i = T_{ij}\,\overline{1}x_j}$

Un tenseur d'ordre 2

$$\boxed{\overline{T}_i = T_{ij}\,\overline{1}x_j}$$

le tenseur d'ordre 2 est donc défini par 9 composantes

la composante j de $\overline{T}^{(n)} = \overline{T}_i\, n_i$ s'écrit $T_j^{(n)} = T_{ij}\, n_i$

définissant les 9 composantes T_{ij}

cherchons ensuite comment ces 9 composantes T_{ij} se transforment lors d'un changement d'axes ...

Un tenseur d'ordre 2

cherchons comment ces 9 composantes T_{ij} se transforment lors d'un changement d'axes ...

à partir de $\overline{T}^{(n)} = \overline{T}_i\, n_i$ plaçons la direction $\overline{n}$ sur le nouvel axe x'_P

$$\overline{T}_{P'} = \alpha_{Pi}\, \overline{T}_i \qquad \text{avec} \qquad \alpha_{Pi} = \cos\left(x'_P\,,\, x_i\right)$$

projetons ce vecteur sur un nouvel axe x'_Q

$$\left[\overline{T}_{P'}\right]_{Q'} = \alpha_{Pi}\, \underbrace{\left[\overline{T}_i\right]_{Q'}}$$

$$\left[\overline{T}_i\right]_{Q'} = \alpha_{Qj}\left[\overline{T}_i\right]_j$$

(changement d'axes pour un vecteur)

$$v'_Q = \alpha_{Qj}\, v_j$$

47

Un tenseur d'ordre 2

$$\left[\overline{\overline{T}}_{P'}\right]_{Q'} = \alpha_{Pi}\,\alpha_{Qj}\left[\overline{\overline{T}}_{i}\right]_{j}$$

mais, par définition, on a

$$T'_{PQ} = \left[\overline{\overline{T}}_{P'}\right]_{Q'} \qquad \text{et} \qquad T_{ij} = \left[\overline{\overline{T}}_{i}\right]_{j}$$

et donc

$$\boxed{T'_{PQ} = \alpha_{Pi}\,\alpha_{Qj}\,T_{ij}}$$

BATir

48

Un tenseur d'ordre 2

1

Un tenseur est une grandeur mesurée par 9 composantes qui se transforment selon

$$\boxed{T'_{PQ} = \alpha_{Pi}\,\alpha_{Qj}\,T_{ij}}$$

pour tout changement d'axes coordonnés

exemples : **tenseur d'inertie**
tenseur des courbures
tenseur des contraintes
tenseur des déformations

BATir

Un tenseur d'ordre 2

1

Un **tenseur** est une grandeur mesurée par **9** composantes qui se transforment selon

$$\boxed{T'_{PQ} = \alpha_{Pi}\,\alpha_{Qj}\,T_{ij}}$$

pour tout changement d'axes coordonnés

1

Un **vecteur** est une grandeur mesurée par **3** composantes qui se transforment selon

$$\boxed{v'_K = \alpha_{Kj}\,v_j}$$

pour tout changement d'axes coordonnés

Tenseur symétrique - Tenseur antisymétrique

tenseur symétrique $T_{ij} = T_{ji}$

tenseur antisymétrique $T_{ij} = - T_{ji}$

on démontre aisément que le caractère symétrique ou antisymétrique d'un tenseur est indépendant du système d'axes

Propriété : tout tenseur peut être décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique

$$T_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right)}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)}_{\text{antisymétrique}}$$

$$(\;) \qquad [\;]$$

$$\boxed{T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]}}$$

Tenseur symétrique - Tenseur antisymétrique

on démontre aisément que le caractère symétrique ou antisymétrique d'un tenseur est indépendant du système d'axes

Propriété : si S_{ij} est un tenseur symétrique et A_{ij} est un tenseur antisymétrique

$$\boxed{S_{ij}\, A_{ij} = 0}$$

NB : démonstration
- en développant la double somme
- en travaillant en notations indicielles

Des invariants d'un tenseur

on peut définir des invariants d'un tenseur d'ordre 2

tenseur T_{ij} $\Longrightarrow$

$$T_{ii}$$

$$T_{ij}\, T_{ij}$$

$$T_{ij}\, T_{jk}\, T_{ki}$$

Remarque concernant α_{Pi}

un tenseur est défini par ses composantes dans **un** système d'axes

par contre, α_{Pi} relie **deux** systèmes d'axes

α_{Pi} n'est donc pas un tenseur, mais ses composantes forment une matrice de changement d'axes

Carl Friedrich Gauss

(1777 - 1855)

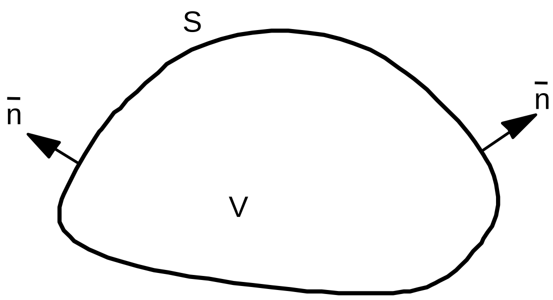
Théorème de Gauss 3D

dans un volume V limité par une
surface fermée S (suffisamment régulière)

$$\boxed{\int_V \partial_i T\ldots dV = \oint_S T\ldots n_i \, dS}$$

$T\ldots$ représente un scalaire, un vecteur, un tenseur quelconque

$\bar{n}$ est la normale unitaire extérieure au volume



TOUJOURS

Théorème de Gauss 3D

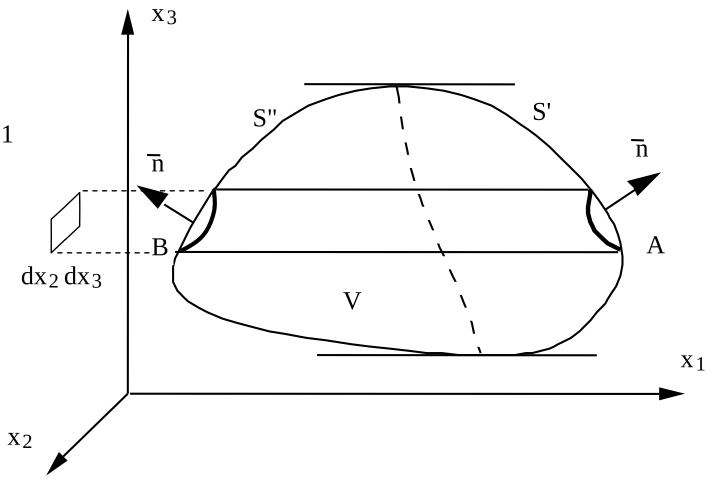
$$\boxed{\int_V \partial_1 T\ldots dV = \oint_S T\ldots n_1 dS}$$

démontrons le théorème pour i = 1

$$\int_V \partial_1\, T\ldots dV = \iiint \partial_1\, T\ldots dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \iint dx_2 dx_3 \int_B^A \partial_1\, T\ldots dx_1$$

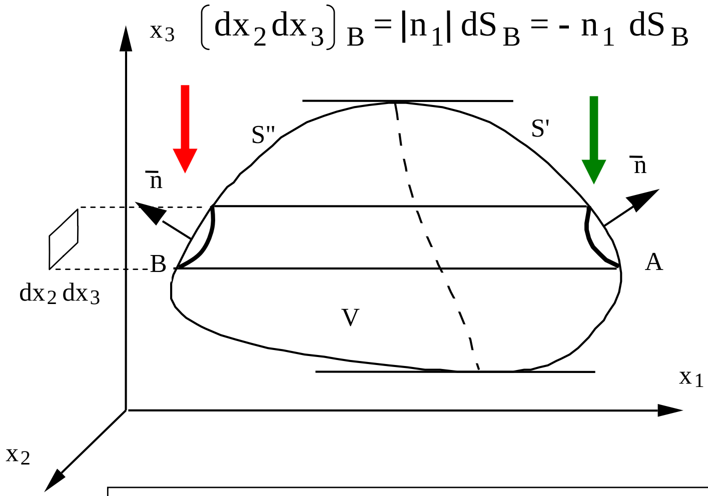
$$= \iint \left(T_A - T_B\right) dx_2 dx_3$$



Théorème de Gauss 3D

$$\left(dx_2 dx_3\right)_A = |n_1|\, dS_A = n_1\, dS_A \quad \text{car} \quad n_1 > 0$$

$$\left(dx_2 dx_3\right)_B = |n_1|\, dS_B = -\, n_1\, dS_B \quad \text{car} \quad n_1 < 0$$



$$\int_V \partial_1\, T\ldots dV = \iint \left(T_A - T_B\right) dx_2 dx_3$$

S' : la partie de S où $n_1 > 0$

S" : la partie de S où $n_1 < 0$

$$\boxed{\iiint \partial_1\, T\ldots dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{S'} T\ldots n_1\, dS' + \int_{S''} T\ldots n_1\, dS'' = \oint_S T\ldots n_1\, dS}$$

Applications du théorème de Gauss 3D

$$\int_V \partial_i T\ldots dV = \oint_S T\ldots n_i \, dS$$

$$\int_V \partial_i \phi \, dV = \oint_S \phi \, n_i \, dS$$

$$\int_V \overline{\text{grad}} \, \phi \, dV = \oint_S \phi \, \overline{n} \, dS$$

$$\int_V \partial_i v_i \, dV = \oint_S v_i \, n_i \, dS$$

$$\int_V \text{div} \, \overline{v} \, dV = \oint_S \overline{v} \, \overline{n} \, dS$$

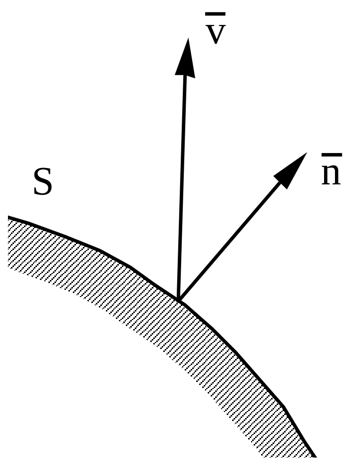
$$\int_V \partial_i \, \delta_{ijk} \, v_j \, dV = \oint_S \delta_{ijk} \, v_j \, n_i \, dS$$

$$\int_V \overline{\text{rot}} \, \overline{v} \, dV = \oint_S \overline{n} \times \overline{v} \, dS$$

La notion de débit ...

Considérons

- une surface S de normale $\overline{n}$
- la vitesse $\overline{v}$ des points matériels traversant cette surface
- une grandeur A attachée à ces points matériels

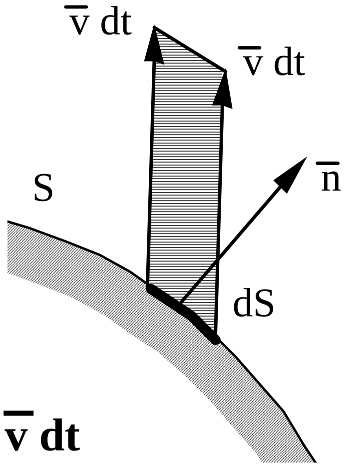


le débit de la grandeur A au travers de la surface S est la quantité de cette grandeur traversant la surface par unité de temps

La notion de débit ...

Considérons

- un élément de surface **dS** de normale $\overline{\mathbf{n}}$
- la vitesse $\overline{\mathbf{v}}$ des points matériels traversant cette surface
- une grandeur **A** attachée à ces points matériels
- après un temps **dt**, les particules se sont déplacées de $\overline{\mathbf{v}}\,\mathbf{dt}$
- le volume de particules ayant traversé la surface **dS** est le volume hachuré (base x hauteur) : $[\,\overline{n}.\overline{v}\,dt\,]\,dS$



et le débit élémentaire (volume par unité de temps) de la grandeur A est

$$\boxed{dq = A\;\overline{v}\;.\;\overline{n}\;dS}$$

seule la composante normale de la vitesse contribue au débit !

La notion de débit ...

$$\boxed{dq = A\;\overline{v}\;.\;\overline{n}\;dS}$$

- débit élémentaire volumique

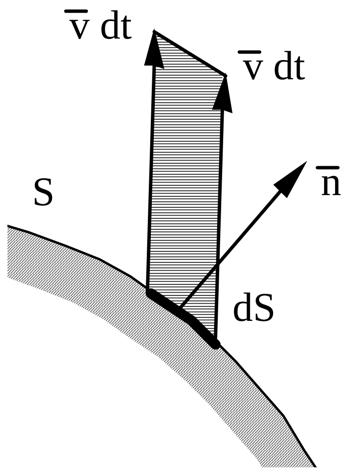
$$\boxed{dq = \;\overline{v}\;.\;\overline{n}\;dS}$$

- débit élémentaire massique

$$\boxed{dq = \rho\;\overline{v}\;.\;\overline{n}\;dS}$$

- débit élémentaire de la quantité de mouvement

$$\boxed{d\overline{q} = (\rho\;\overline{v})\;\;\overline{v}.\;\overline{n}\;dS}$$



La notion de débit ...

- débit volumique

$$\boxed{dq = \bar{v} \,.\, \bar{n}\, dS} \quad \Rightarrow \quad q = \int_s \bar{v} \,.\, \bar{n}\, dS$$

- débit massique

$$\boxed{dq = \rho\, \bar{v} \,.\, \bar{n}\, dS} \quad \Rightarrow \quad q = \int_s \rho\, \bar{v} \,.\, \bar{n}\, dS$$

- débit de la quantité de mouvement

$$\boxed{d\bar{q} = (\rho\, \bar{v})\ \bar{v} .\, \bar{n}\, dS} \quad \Rightarrow \quad \bar{q} = \int_s (\rho\, \bar{v})\ \bar{v} .\, \bar{n}\, dS$$

BATir

BATir

Service Construction, Architecture et Urbanisme
Department of Building, Architecture and Town Planning

Les contraintes

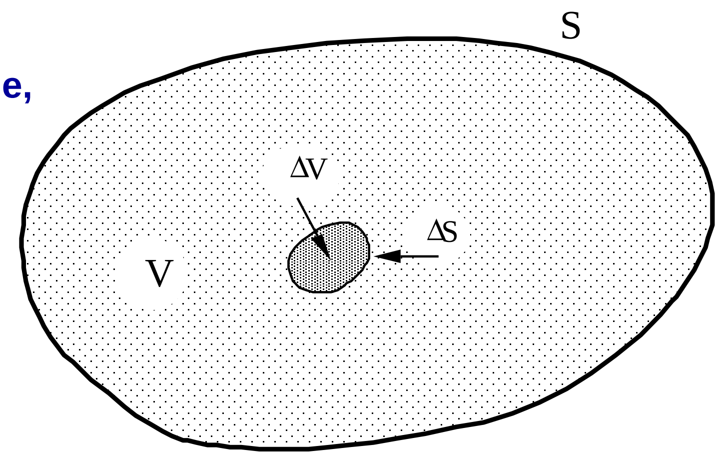
(1)

ULB
UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

Les contraintes : définition ...

considérons un volume V limité par une surface fermée S

isolons une partie ΔV du volume, limitée par la surface fermée ΔS



quelles sont les forces
(et quels sont les couples) agissant sur ΔV ?

Les contraintes : définition ...

- forces de volume (appelées "forces à distance") $\bar{f}\ \Delta V$

  exemple : forces de pesanteur $\bar{f} = \rho \bar{g}$

- couples de volume $\bar{\mu}\ \Delta V$ (non pris en compte ici)

  exemple : couple dû à un champ électrique ou magnétique

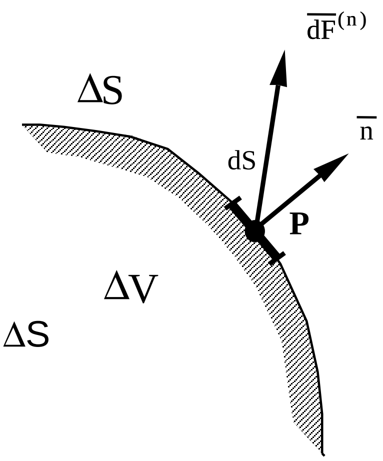
- forces de surface agissant sur ΔS (appelées "forces de contact")

  elles représentent l'action du reste du volume V
  sur l'élément ΔV isolé

Les contraintes : définition ...

- **forces de surface agissant sur ΔS (appelées "forces de contact")**

  elles représentent l'action du reste du volume V
  sur l'élément ΔV isolé



action sur dS de la matière située du côté de $\overline{n}$ (extérieure à ΔV)

normale extérieure au volume ΔV

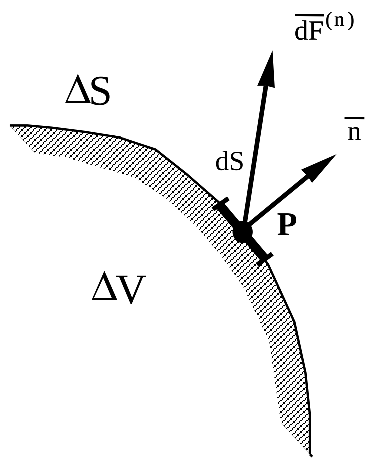
dS = portion élémentaire de ΔS

on admet que $\overline{dF}^{(n)}$ est appliquée au centre de dS
(pas de couple réparti en surface)

Les contraintes : définition ...

on admet également que

$$\lim_{dS \to 0} \frac{\overline{dF}^{(n)}}{dS} = \overline{T}^{(n)}$$



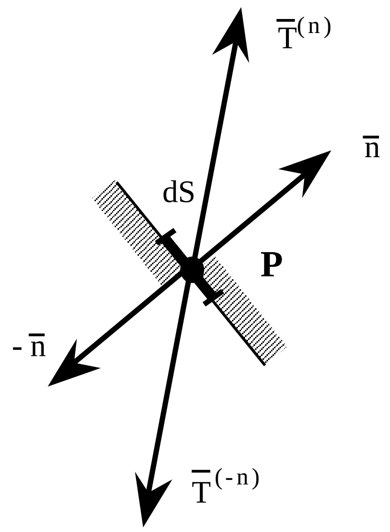
est une fonction du point P et NON des points voisins

cela implique que le couple réparti en surface est nul

vecteur contrainte, au point P, associé à la facette de normale $\overline{n}$

Les contraintes : définition ...

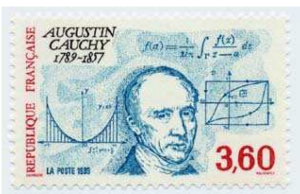
$$\lim_{dS \to 0} \frac{\overline{dF}^{(n)}}{dS} = \overline{T}^{(n)}$$



en vertu de l'égalité
de l'action et de la réaction

$$\boxed{\overline{dF}^{(n)} = -\,\overline{dF}^{(-n)}} \Longrightarrow \boxed{\overline{T}^{(n)} = -\,\overline{T}^{(-n)}}$$

Augustin Cauchy



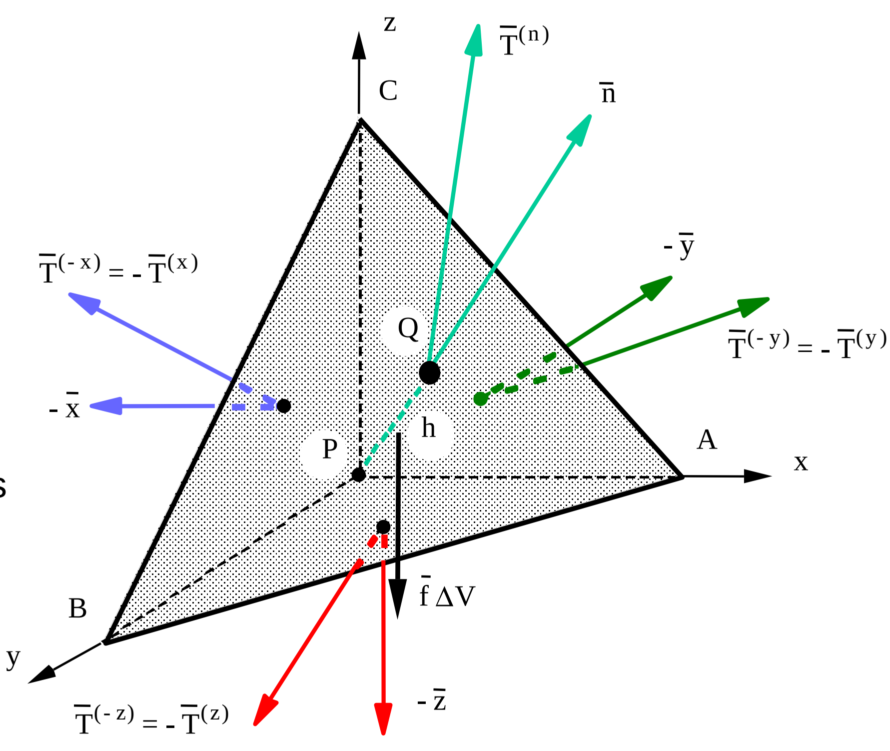
(1789 - 1857)

La loi de Cauchy ...

cherchons la liaison

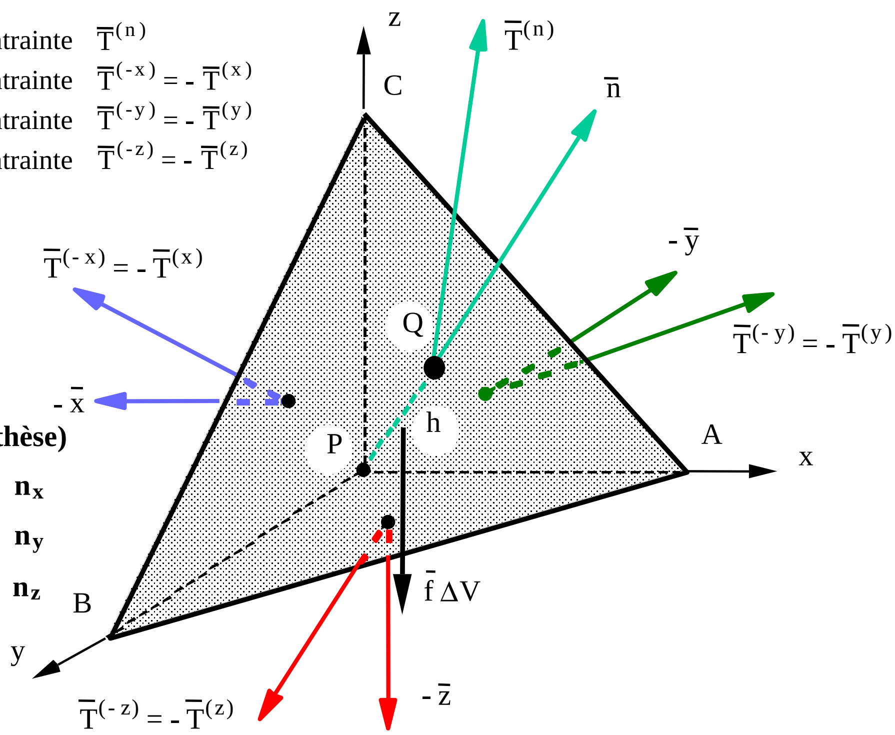
entre $\overline{T}^{(n)}$ **et** $\overline{n}$

on considère un tétraèdre élémentaire PABC dont les arêtes sont alignées selon les axes x, y, z et la face est de normale $\overline{n}$



La loi de Cauchy ...

- face ABC : normale $\bar{n}$ contrainte $\bar{T}^{(n)}$
- face PBC : normale $-\bar{x}$ contrainte $\bar{T}^{(-x)} = -\bar{T}^{(x)}$
- face PCA : normale $-\bar{y}$ contrainte $\bar{T}^{(-y)} = -\bar{T}^{(y)}$
- face PAB : normale $-\bar{z}$ contrainte $\bar{T}^{(-z)} = -\bar{T}^{(z)}$



face ABC : aire = ΔS (par hypothèse)

face PBC : aire = $\Delta S \cos(\bar{n},\bar{x}) = \Delta S\ n_x$

face PCA : aire = $\Delta S \cos(\bar{n},\bar{y}) = \Delta S\ n_y$

face PAB : aire = $\Delta S \cos(\bar{n},\bar{z}) = \Delta S\ n_z$

La loi de Cauchy ...

Appliquons la loi de la résultante cinétique au volume élémentaire du tétraèdre

$$\left[\rho\,\bar{v}\left(\frac{1}{3}h\,\Delta S\right)\right]^{\bullet} = \bar{f}\left(\frac{1}{3}h\,\Delta S\right) + \bar{T}^{(n)}\,\Delta S + \bar{T}^{(-x)}\,\Delta S_x + \bar{T}^{(-y)}\,\Delta S_y + \bar{T}^{(-z)}\,\Delta S_z$$

ou

$$\left[\rho\,\bar{v}\left(\frac{1}{3}h\,\Delta S\right)\right]^{\bullet} - \bar{f}\left(\frac{1}{3}h\,\Delta S\right) = \left[\bar{T}^{(n)} + \bar{T}^{(-x)}\,n_x + \bar{T}^{(-y)}\,n_y + \bar{T}^{(-z)}\,n_z\right]\Delta S$$

avec

face ABC : aire = ΔS (par hypothèse)

face PBC : aire = $\Delta S \cos(\bar{n},\bar{x}) = \Delta S\ n_x$

face PCA : aire = $\Delta S \cos(\bar{n},\bar{y}) = \Delta S\ n_y$

face PAB : aire = $\Delta S \cos(\bar{n},\bar{z}) = \Delta S\ n_z$

71

La loi de Cauchy ...

Si on fait tendre le volume du tétraèdre vers 0 (en faisant tendre h vers 0) il reste :

$$\left[\rho\,\bar{v}\,\cancel{(\tfrac{1}{3}h\,\Delta S)}\right]^{\bullet} - \bar{f}\,\cancel{(\tfrac{1}{3}h\,\Delta S)} = \left[\bar{T}^{(n)} + \bar{T}^{(-x)}\,n_x + \bar{T}^{(-y)}\,n_y + \bar{T}^{(-z)}\,n_z\right]\Delta S$$

$$\boxed{\bar{T}^{(n)} = \bar{T}^{(x)}\,n_x + \bar{T}^{(y)}\,n_y + \bar{T}^{(z)}\,n_z}$$

montrant qu'un vecteur est associé à toute direction par une combinaison linéaire des cosinus directeurs de cette direction

on a donc un tenseur

72

Le tenseur des contraintes ...

$$\boxed{\bar{T}^{(n)} = \bar{T}^{(x)}\,n_x + \bar{T}^{(y)}\,n_y + \bar{T}^{(z)}\,n_z}$$

projetons les vecteurs $\bar{T}^{(x)}$ $\bar{T}^{(y)}$ $\bar{T}^{(z)}$ sur les axes coordonnés et appelons τ_{ij} ou T_{ij} la composante selon l'axe j du vecteur contrainte agissant sur la facette de normale i

$$\boxed{T_j^{(n)} = \tau_{ij}\,n_i}$$

relation de Cauchy

τ_{ij} sont les composantes d'un tenseur du 2ème ordre : le tenseur des contraintes

73

Le tenseur des contraintes ...

$$\boxed{\bar{T}^{(n)} = \bar{T}^{(x)} n_x + \bar{T}^{(y)} n_y + \bar{T}^{(z)} n_z}$$

ou

$$\boxed{\bar{T}^{(n)} = \bar{T}^{(1)} n_1 + \bar{T}^{(2)} n_2 + \bar{T}^{(3)} n_3}$$

$$\boxed{\bar{T}^{(n)} = \bar{T}_1 n_1 \quad + \bar{T}_2 n_2 \quad + \bar{T}_3 n_3}$$

si $\bar{n}$ est // à $\bar{1}_{x_1}$: $\bar{n} = (1, 0, 0) \longrightarrow \bar{T}^{(n)} = \bar{T}_1 = \bar{T}^{(1)}$

$\bar{T}_i$ **est donc le vecteur contrainte agissant sur la facette de normale x_i**

74

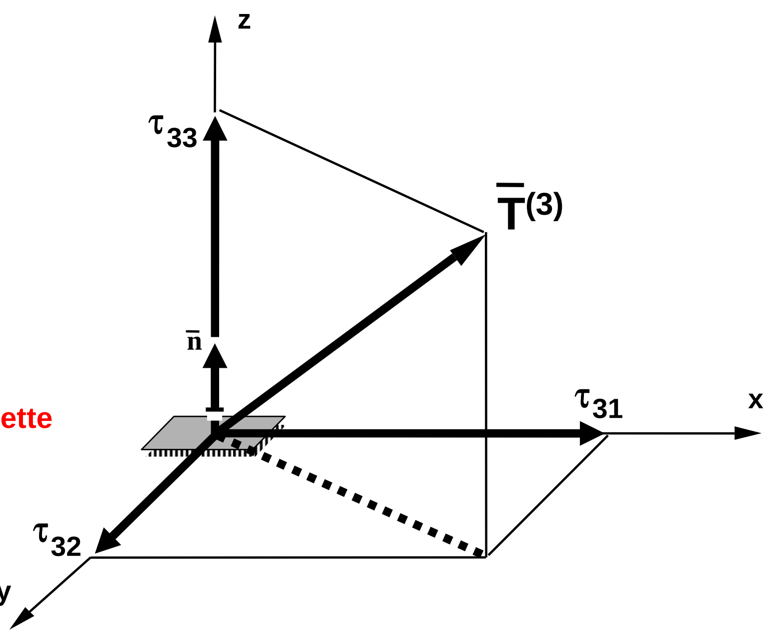
Le tenseur des contraintes ...

Les valeurs τ_{ij} sont les 9 composantes du tenseur des contraintes

$$\boxed{T_j^{(n)} = \tau_{ij}\, n_i}$$

**l'indice i représente la normale
à la facette considérée**

**l'indice j représente la direction
sur laquelle on projette
la contrainte correspondant à cette facette**



Le tenseur des contraintes ...

- lorsque deux indices sont égaux, il s'agit d'une composante selon la normale à la facette : on dira "composante normale" et on la notera **σ** avec un seul indice

- lorsque deux indices sont différents, il s'agit d'une composante dans le plan de la facette : on dira "composante tangentielle"

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} \sigma_x = \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y = \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z = \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

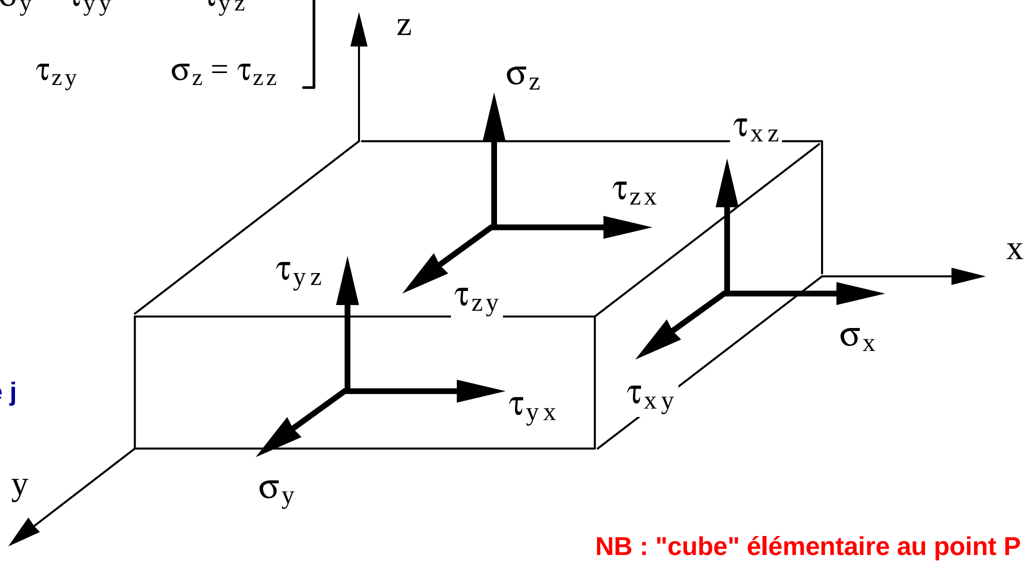
Le tenseur des contraintes ...

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} \sigma_x = \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y = \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z = \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\tau_{ij}$$

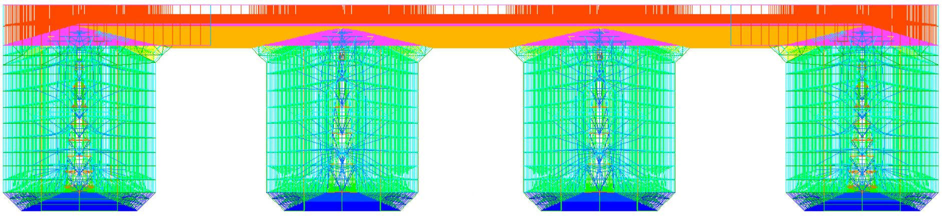
composante j

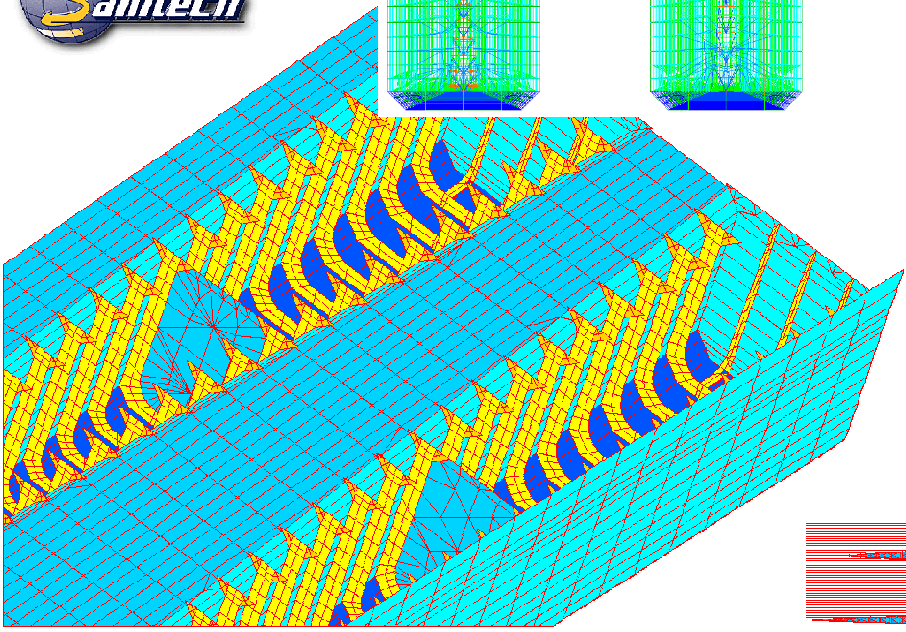
facette i

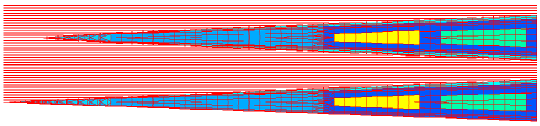


NB : "cube" élémentaire au point P

Maillage d'un quadrimaran







BATir

BATir

Service Construction, Architecture et Urbanisme
Department of Building, Architecture and Town Planning

La dérivée matérielle

ULB

Université Libre de Bruxelles, Université d'Europe

La dérivée matérielle : définition ...

Considérons une grandeur $T_{kl...}(\bar{x}, t)$

Par définition, la dérivée matérielle est la dérivée par rapport au temps, prise en suivant la particule dans son mouvement

Si une particule occupe la position $\bar{X}$ **à l'instant t et la position** $\bar{X}'$ **à l'instant t' = t + dt**

on a, par définition :

$$\boxed{\dot{T}_{kl...} = \lim_{dt \to 0} \frac{T_{kl...}(\bar{x}', t+dt) - T_{kl...}(\bar{x}, t)}{dt}}$$

La dérivée matérielle d'une grandeur locale

Comme la position $\bar{X}$ **est fonction du temps t** $\longrightarrow$ $T_{kl...}(\bar{x}, t)$ **est une fonction du temps uniquement**

$$\dot{T}_{kl...} = \frac{\partial T_{kl...}}{\partial t} + \frac{\partial T_{kl...}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \quad \textbf{avec} \quad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial t} \quad \textbf{et} \quad v_i = \frac{dx_i}{dt}$$

$$\boxed{\dot{T}_{kl...} = \partial_0 T_{kl...} + v_i \cdot \partial_i T_{kl...}}$$

on a

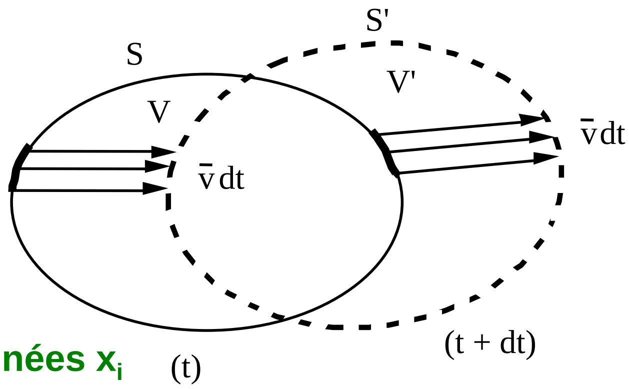
$$\boxed{\dot{T}_{kl...} = \partial_0 T_{kl...} + \left(\bar{v} \cdot \overline{\text{grad}}\right) T_{kl...}}$$

La dérivée matérielle d'une intégrale de volume

Considérons

$$I = \int_V T_{kl\ldots} \, dV$$

indices ! ! !



- **instant t, points matériels de coordonnées x_i**
  le volume V est limité par la surface fermée S

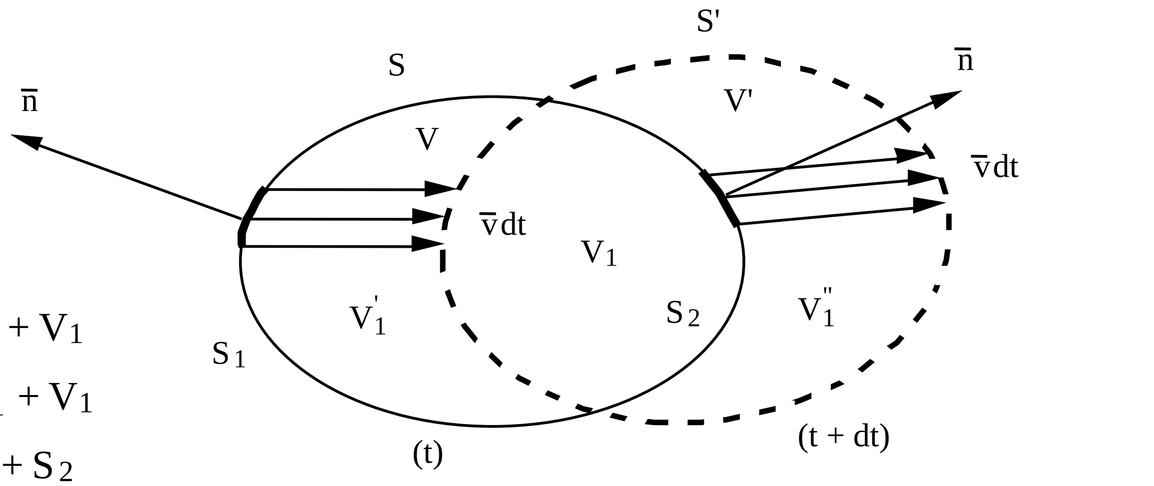
- **instant t+dt, ces mêmes points matériels ont comme coordonnées x'_i**
  et le volume est devenu V', la surface est devenue S'

avec : $$x_i' = x_i + v_i \, dt$$

La dérivée matérielle d'une intégrale de volume

$$\boxed{I^{\bullet} \, dt = \int_{V'} T_{kl\ldots}(\bar{x}', t+dt) \, dV' - \int_V T_{kl\ldots}(\bar{x}, t) \, dV}$$

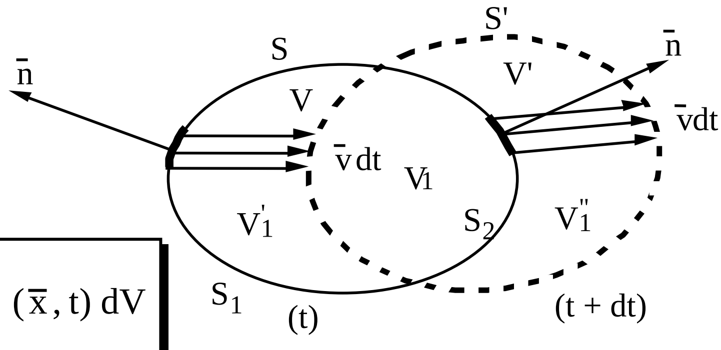
(lim pour : $dt \to 0$)



$$\begin{cases} V = V_1' + V_1 \\ V' = V_1'' + V_1 \\ S = S_1 + S_2 \end{cases}$$

S_1 est telle que $\bar{v} \cdot \bar{n} < 0$; S_2 est telle que $\bar{v} \cdot \bar{n} > 0$

La dérivée matérielle d'une intégrale de volume



$$I^{\bullet}\,dt = \int_{V'} T_{kl\ldots}(\bar{x}', t+dt)\,dV' - \int_{V} T_{kl\ldots}(\bar{x}, t)\,dV$$

$$I^{\bullet}\,dt = \int_{V_1} T_{kl\ldots}\,(\bar{x}', t+dt)\,dV_1 + \int_{V_1''} T_{kl\ldots}\,(\bar{x}', t+dt)\,dV_1''$$

t + dt

$$-\int_{V_1} T_{kl\ldots}\,(\bar{x}, t)\,dV_1 - \int_{V_1'} T_{kl\ldots}\,(\bar{x}, t)\,dV_1'$$

t

(lim pour : $dt \rightarrow 0$)

La dérivée matérielle d'une intégrale de volume

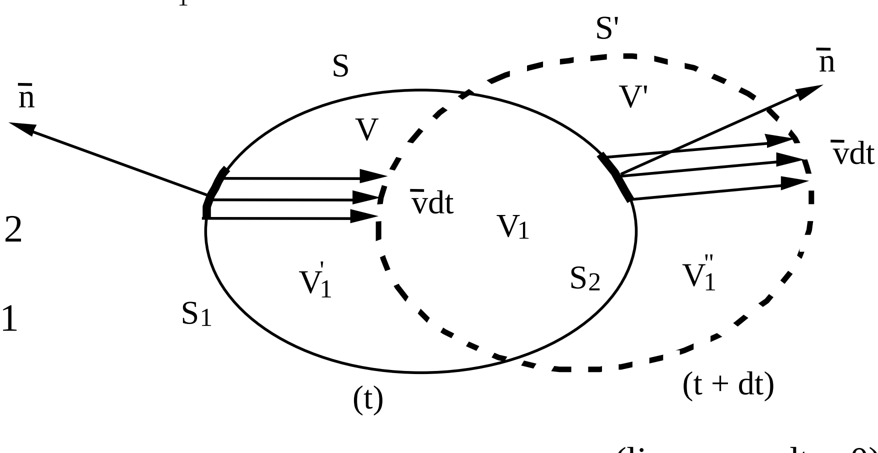
$$I^{\bullet}\,dt = \int_{V_1''} T_{kl\ldots}\,(\bar{x}', t+dt)\,dV_1'' - \int_{V_1'} T_{kl\ldots}\,(\bar{x}, t)\,dV_1'$$

en réordonnant les termes

$$+\int_{V_1} \left[\, T_{kl\ldots}\,(\bar{x}', t+dt) - T_{kl\ldots}\,(\bar{x}, t) \,\right] dV_1$$

et en exprimant

$$\begin{cases} dV_1'' = +\, n_i\, v_i\, dt\, dS_2 \\ dV_1' = -\, n_i\, v_i\, dt\, dS_1 \end{cases}$$



(lim pour : $dt \rightarrow 0$)

La dérivée matérielle d'une intégrale de volume

$$dV_1'' = + n_i\, v_i\, dt\, dS_2$$

$$dV_1' = - n_i\, v_i\, dt\, dS_1$$

$$I^{\bullet}\, dt = \int_{V_1''} T_{kl\ldots}\, (\bar{x}', t+dt)\, dV_1'' - \int_{V_1'} T_{kl\ldots}\, (\bar{x}, t)\, dV_1'$$

$$+ \int_{V_1} [\, T_{kl\ldots}\, (\bar{x}', t+dt) - T_{kl\ldots}\, (\bar{x}, t)\,]\, dV_1$$

$$\boxed{I^{\bullet} = \int_V \partial_0 T_{kl\ldots}\, dV + \oint_S T_{kl\ldots}\, v_i\, n_i\, dS}$$

La dérivée matérielle d'une intégrale de volume

les différentes formules utiles

$$\boxed{I^{\bullet} = \int_V \partial_0 T_{kl\ldots}\, dV + \oint_S T_{kl\ldots}\, v_i\, n_i\, dS}$$

théorème de Gauss

$$\boxed{I^{\bullet} = \int_V \left[\, \partial_0 T_{kl\ldots} + \partial_i (v_i\, T_{kl\ldots})\, \right] dV}$$

$$\boxed{I^{\bullet} = \int_V \left[\, T^{\bullet}_{kl\ldots} + T_{kl\ldots}\, (\partial_i\, v_i)\, \right] dV}$$

SERVICE CONSTRUCTION, ARCHITECTURE ET URBANISME
DEPARTMENT OF BUILDING, ARCHITECTURE AND TOWN PLANNING

Les lois fondamentales

ULB
UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

Les lois de "conservation" ...

- loi de la conservation de la masse
  - la masse contenue dans un volume matériel ne varie pas au cours du temps
- loi de la résultante cinétique
  - la dérivée par rapport au temps de la résultante cinétique est égale à la somme des forces appliquées
- loi du moment cinétique
  - la dérivée par rapport au temps du moment cinétique est égale à la somme des moments des forces appliquées

Conservation de la masse

considérons un volume V contenant une masse M

$$M = \int_V \rho \, dV$$

et appliquons la formule de dérivée matérielle d'une intégrale de volume

$$I^{\bullet} = \int_V \left[\partial_0 T_{kl\ldots} + \partial_i (v_i T_{kl\ldots})\right] dV$$

quel que soit le volume V

$$M^{\bullet} = \int_V [\partial_0 \rho + \partial_i (v_i \rho)] \, dV = 0$$

cela donne l'équation locale de conservation de la masse (équation de continuité)

$$\partial_0 \rho + \partial_i (\rho v_i) = 0$$

Conservation de la masse

plusieurs formes de l'équation de continuité

$$\partial_0 \rho + \partial_i (\rho v_i) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \bar{v}) = 0$$

$$\rho^{\bullet} + \rho \, \partial_i v_i = 0$$

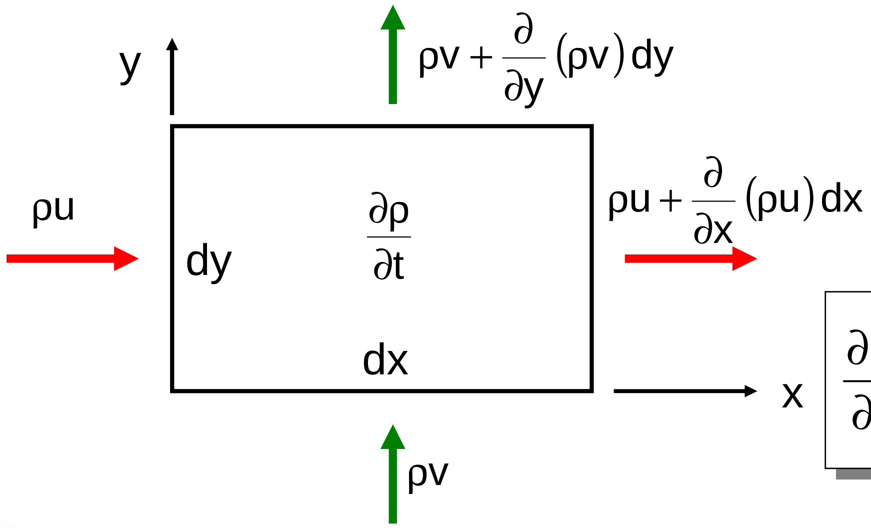
$$\rho^{\bullet} + \rho \, \mathrm{div} \, \bar{v} = 0$$

car $\dfrac{d\rho}{dt} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i$

Conservation de la masse ...

qu'on retrouve facilement …. sur un rectangle élémentaire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx\,dy = \cancel{\rho u}\,dy + \cancel{\rho v}\,dx - \left(\cancel{\rho u} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\,dx\right)dy - \left(\cancel{\rho v} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\,dy\right)dx$$



l'accroissement de masse provient du débit de masse entrant par S

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0}$$

Conservation de la masse

conséquence pour le calcul de la dérivée matérielle d'une intégrale de volume

$$I = \int_V T\ldots \rho\, dV = \int_M T\ldots dM$$

$$I^{\bullet} = \int_M T^{\bullet}\ldots dM = \int_V T^{\bullet}\ldots \rho\, dV$$

on peut dériver sous l'intégrale car la masse est constante

on peut dériver sous l'intégrale en groupant ρdV

Loi de la résultante cinétique

$$dm = \rho \; dV$$

par définition $$\overline{\mathcal{R}} = \int_M \overline{v} \, . \, dm = \int_V \overline{v} \, . \rho \; dV$$

et on a donc directement $$\overline{\mathcal{R}}^{\bullet} = \int_V \overline{v}^{\bullet} . \rho \; dV$$

et la loi de la résultante cinétique s'écrit

$$\int_V \rho v_i^{\bullet} dV = \int_V f_i \, dV + \oint_S T_i^{(n)} dS$$

Loi de la résultante cinétique

$$\int_V \rho v_i^{\bullet} dV = \int_V f_i \, dV + \oint_S T_i^{(n)} dS$$

$$\oint_S \tau_{ji} n_j \, dS = \int_V \partial_j \tau_{ji} \, dV$$

et donc

$$\int_V \rho v_i^{\bullet} dV = \int_V [\, f_i + \partial_j \tau_{ji} \,] \; dV$$

95

Loi de la résultante cinétique

$$\int_V \rho v_i^{\bullet} \, dV = \int_V \left[f_i + \partial_j \tau_{ji} \right] dV$$

on en déduit les équations du mouvement (dynamique)

$$\boxed{\rho \left[\partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i \right] = f_i + \partial_j \tau_{ji}}$$

et les équations d'équilibre de translation (statique)

$$\boxed{f_i + \tau_{ji,j} = 0}$$

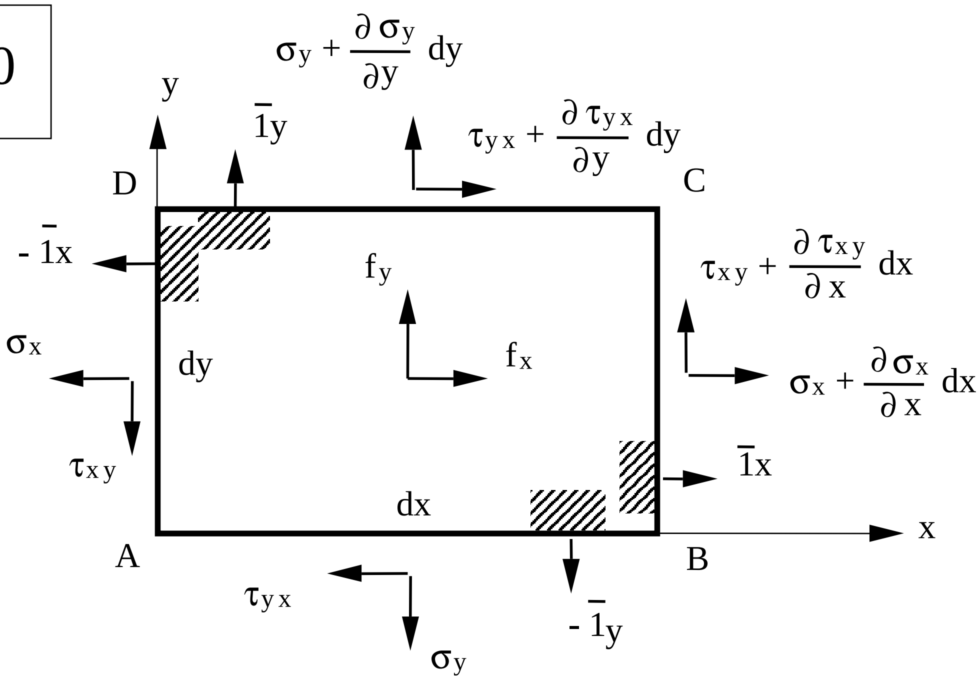
BATir

96

Equations d'équilibre de translation

qu'on retrouve facilement …. sur un rectangle élémentaire

$$\boxed{f_i + \tau_{ji,j} = 0}$$



BATir

Equations d'équilibre de translation

qu'on retrouve facilement …. sur un rectangle élémentaire

$$-\sigma_x\,dy + \left[\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right]dy - \tau_{yx}\,dx + \left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right]dx + f_x\,dx\,dy = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$-\sigma_y\,dx + \left[\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}dy\right]dx - \tau_{xy}\,dy + \left[\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dx\right]dy + f_y\,dx\,dy = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0$$

Loi du moment cinétique

par définition $$\overline{\mathfrak{M}} = \int_M (\bar{r} \times \bar{v}).\,dm = \int_V (\bar{r} \times \bar{v}).\rho\,dV$$

et on a donc directement $$\overline{\mathfrak{M}}^{\bullet} = \int_V (\bar{r} \times \bar{v})^{\bullet}\,\rho\,dV$$

ou $$\overline{\mathfrak{M}}^{\bullet} = \int_V [\cancel{(\bar{v} \times \bar{v})} + (\bar{r} \times \bar{v}^{\bullet})]\,\rho\,dV$$

$$dm = \rho\,dV$$

Loi du moment cinétique ...

et la loi du moment cinétique s'écrit

$$\underbrace{\int_V (\bar{r} \times \dot{\bar{v}})\, \rho\, dV}_{\text{dérivée du moment cinétique}} = \underbrace{\int_V (\bar{r} \times \bar{f})\, dV}_{\text{moment des forces de volume}} + \underbrace{\oint_S (\bar{r} \times \bar{T}^{(n)})\, dS}_{\text{moment des forces de surface}}$$

moments calculés par rapport à l'origine des axes
(point géométrique fixe)

en l'absence de couples répartis en volume et en surface

Loi du moment cinétique ...

$$\int_V (\bar{r} \times \dot{\bar{v}})\, \rho\, dV = \int_V (\bar{r} \times \bar{f})\, dV + \oint_S (\bar{r} \times \bar{T}^{(n)})\, dS$$

$$\int_V \delta_{ijk}\, x_j\, \rho\, \dot{v}_k\, dV = \int_V \delta_{ijk}\, x_j\, f_k\, dV + \oint_S \delta_{ijk}\, x_j\, T_k^{(n)}\, dS$$

$$= \int_V \delta_{ijk}\, x_j\, f_k\, dV + \oint_S \delta_{ijk}\, x_j\, \tau_{sk}\, n_s\, dS$$

Gauss

$$= \int_V \delta_{ijk}\, x_j\, f_k\, dV + \int_V \delta_{ijk}\, \partial_s \left(x_j\, \tau_{sk} \right) dV$$

Loi du moment cinétique ...

$$\int_V \delta_{ijk}\, x_j\, \rho\, \dot{v}_k\, dV = \int_V \delta_{ijk}\, x_j\, f_k\, dV + \int_V \delta_{ijk}\, \partial_s\left(x_j\, \tau_{sk}\right) dV$$

$$\partial_s\left(x_j\, \tau_{sk}\right) = \partial_s\left(x_j\right) \tau_{sk} + x_j\, \partial_s \tau_{sk}$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_s} = \delta_{js} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial x} = 1 \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\int_V \delta_{ijk}\, x_j\, \rho\, \dot{v}_k\, dV = \int_V \delta_{ijk}\, x_j\, f_k\, dV + \int_V \delta_{ijk} \left(\tau_{jk} + x_j\, \partial_s \tau_{sk}\right) dV$$

Loi du moment cinétique ...

$$\int_V \delta_{ijk}\, x_j\, \rho\, \dot{v}_k\, dV = \int_V \delta_{ijk}\, x_j\, f_k\, dV + \int_V \delta_{ijk} \left(\tau_{jk} + x_j\, \partial_s \tau_{sk}\right) dV$$

$$\int_V \delta_{ijk}\, x_j \underbrace{\left(\rho\, \dot{v}_k - f_k - \partial_s \tau_{sk} \right)}_{=0 \text{ car équation du mouvement}} dV - \int_V \delta_{ijk}\, \tau_{jk}\, dV = 0$$

$$\int_V \delta_{ijk}\, \tau_{jk}\, dV = 0 \quad \text{quel que soit V}$$

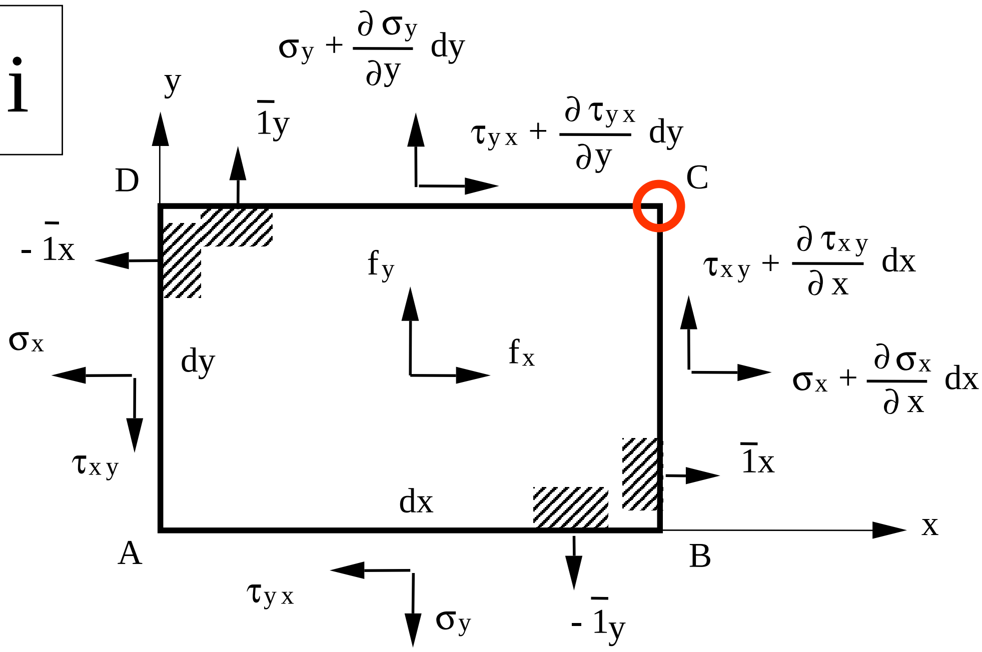
$$\delta_{ijk}\, \tau_{jk} = 0 \qquad \delta_{ijk} \text{ antisymétrique en jk} \longrightarrow \boxed{\tau_{jk} \text{ symétrique}}$$

aussi bien en statique qu'en dynamique !

Equations d'équilibre de rotation

qu'on retrouve facilement …. sur un rectangle élémentaire en écrivant l'équilibre de rotation autour du point C

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$



Equations d'équilibre de rotation

qu'on retrouve facilement …. sur un rectangle élémentaire

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

$$[\ \tau_{xy}\, dy\ ]\, dx - [\ \tau_{yx}\, dx\ ]\, dy + \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\, dx\, dy\, \frac{dy}{2} \right] - \left[\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\, dy\, dx\, \frac{dx}{2} \right] + [\ f_x\, dx\, dy\ ]\, \frac{dy}{2} - [\ f_y\, dx\, dy\ ]\, \frac{dx}{2} = 0$$

et, en négligeant les termes du 3ème ordre en dx, dy devant ceux du 2ème ordre

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Théorème de Cauchy - Poisson

ce double théorème lie :

- les équations d'équilibre (ou du mouvement) en volume et en surface
- les lois de la résultante cinétique et du moment cinétique

$$T_j^{(n)} = \tau_{ij}\, n_i \qquad \rho\, \dot{v}_i = \tau_{ij,j} + f_i \qquad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

POISSON
appliquer à un volume quelconque

CAUCHY
appliquer à un tétraèdre élémentaire

$$\dot{\bar{\mathcal{M}}} = \ldots \qquad \dot{\bar{\mathcal{R}}} = \ldots$$

BATir

BATir

SERVICE CONSTRUCTION, ARCHITECTURE ET URBANISME
DEPARTMENT OF BUILDING, ARCHITECTURE AND TOWN PLANNING

Les contraintes

(2)

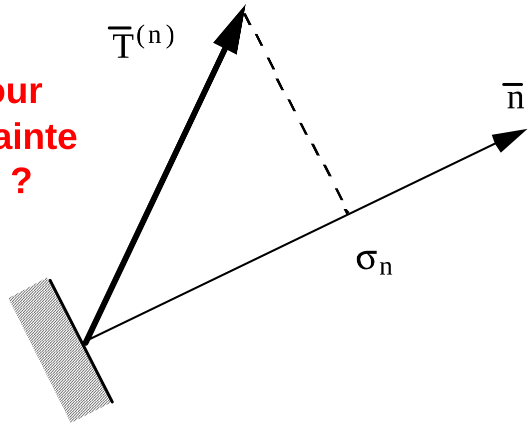
ULB

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

Propriétés du tenseur des contraintes ...

… et par extension, de tout tenseur symétrique du 2ème ordre

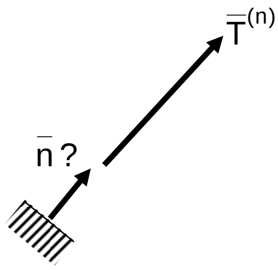
question 1 : existe-t-il des directions pour lesquelles le vecteur contrainte est aligné selon la normale ?



question 2 : existe-t-il des directions pour lesquelles la composante normale du vecteur contrainte est extrémum ?

Valeurs propres et directions principales ...

question 1 : existe-t-il des directions pour lesquelles le vecteur contrainte est aligné selon la normale ?



$$\overline{\mathbf{T}}^{(\mathbf{n})} = \lambda\, \overline{\mathbf{n}} \qquad \text{ou} \qquad \tau_{ij}\, n_j = \lambda\, n_i$$

$$(\tau_{ij} - \lambda \delta_{ij})\, n_j = 0$$

il s'agit d'un système algébrique homogène dont les inconnues sont n_j

on ne peut pas avoir la solution triviale $n_j = 0$ car le vecteur $\overline{n}$ est de longueur unitaire ($n_i\, n_i = 1$). On doit donc avoir :

$$\text{dét}\left| \tau_{ij} - \lambda\, \delta_{ij} \right| = 0$$

Valeurs propres et directions principales ...

$$\text{dét}\left| \tau_{ij} - \lambda\, \delta_{ij} \right| = 0$$ **s'écrit, en développant**

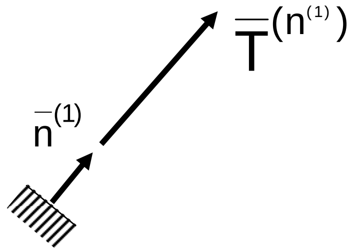
$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

équation du 3ème degré en λ,

→ **au moins une racine réelle (λ_1)**

? les deux autres racines sont-elles également réelles ?

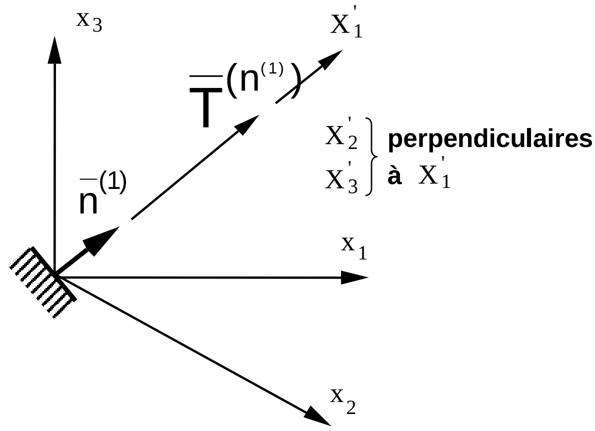
pour cette racine $\lambda = \lambda_1$ le système est compatibles et il y a au moins une solution que nous appelons $\overline{n}^{(1)}$



Valeurs propres et directions principales ...

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x'_1, x'_2, x'_3)$$

$$\tau'_{PQ} = \alpha_{Pi}\, \alpha_{Qj}\, \tau_{ij}$$



$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_Y - \lambda & \tau'_{YZ} \\ 0 & \tau'_{YZ} & \sigma'_Z - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

avec $\tau'_{12} = 0$ et $\tau'_{13} = 0$ car $x'_1 \,//\, \overline{n}^{(1)}$

Valeurs propres et directions principales ...

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_Y - \lambda & \tau'_{YZ} \\ 0 & \tau'_{YZ} & \sigma'_Z - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda_1 - \lambda)\left[\lambda^2 - \lambda(\sigma'_Y + \sigma'_Z) + \sigma'_Y\sigma'_Z - \tau'_{YZ}\tau'_{YZ}\right] = 0$$

$$B^2 - 4AC = \left(\sigma'_Y + \sigma'_Z\right)^2 - 4\left(\sigma'_Y\sigma'_Z - \tau'^2_{YZ}\right)$$
$$= \left(\sigma'_Y - \sigma'_Z\right)^2 + 4\,\tau'^2_{YZ} \geq 0$$

λ_2 et λ_3 sont donc réelles aussi

Valeurs propres et directions principales ...

question 1 : existe-t-il des directions pour lesquelles le vecteur contrainte est aligné selon la normale ?

les 3 racines λ_1 λ_2 λ_3 sont réelles

propriété 1 : il existe au moins 3 directions pour lesquelles $\overline{n}$ est // à $\overline{T}^{(n)}$

Valeurs propres et directions principales ...

propriété 2 : les directions $\bar{n}^{(1)}$ et $\bar{n}^{(2)}$ correspondant à $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sont orthogonales

$$+ \quad \left(\tau_{ij} - \lambda_1 \, \delta_{ij} \right) n_j^{(1)} = 0 \qquad \times \, n_i^{(2)}$$

$$- \quad \left(\tau_{ij} - \lambda_2 \, \delta_{ij} \right) n_j^{(2)} = 0 \qquad \times \, n_i^{(1)}$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \; \delta_{ij} \, n_i^{(1)} \, n_j^{(2)} = 0 \qquad n_i^{(1)} \, n_i^{(2)} = 0$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \; n_i^{(1)} \, n_i^{(2)} = 0$$

$$\boxed{\bar{n}^{(1)} \perp \bar{n}^{(2)}}$$

Valeurs propres et directions principales ...

propriété 3 : les directions $\bar{n}^{(1)}$ et $\bar{n}^{(2)}$ correspondant à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^*$ définissent un plan où toutes les directions sont principales

$$\left(\tau_{ij} - \lambda^* \; \delta_{ij} \right) n_j^{(1)} = 0 \qquad \times \, \alpha$$

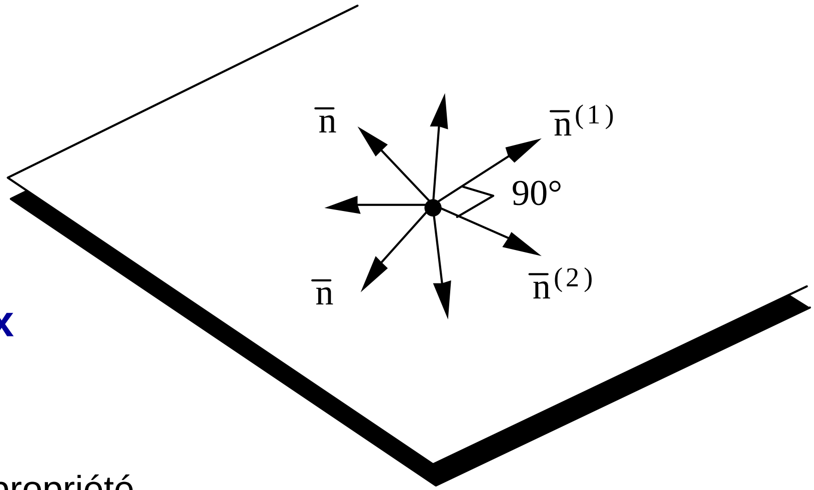
$$\left(\tau_{ij} - \lambda^* \; \delta_{ij} \right) n_j^{(2)} = 0 \qquad \times \, \beta$$

$$\left(\tau_{ij} - \lambda^* \; \delta_{ij} \right) \left(\alpha \, n_j^{(1)} + \beta \, n_j^{(2)} \right) = 0 \qquad \forall \, \alpha \, , \, \beta$$

Valeurs propres et directions principales ...

$$(\tau_{ij} - \lambda^{*} \delta_{ij}) \; (\alpha \, n_j^{(1)} + \beta \, n_j^{(2)}) = 0 \qquad \forall \, \alpha , \beta$$

toutes les directions du plan $\overline{n}^{(1)}$ $\overline{n}^{(2)}$ sont donc principales et on peut y choisir deux directions orthogonales

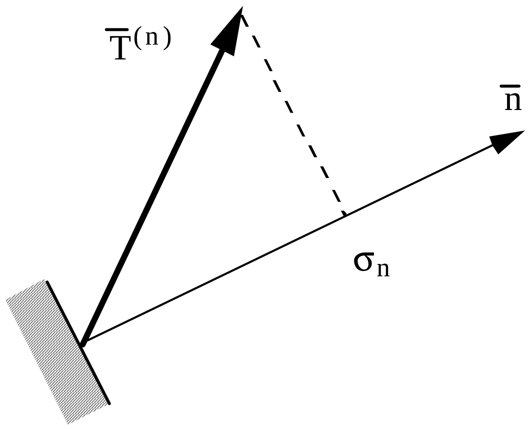


ce qui généralise la propriété

Propriétés du tenseur des contraintes ...

question 2 : **existe-t-il des directions pour lesquelles la composante normale du vecteur contrainte est extrémum ?**

$$\boxed{\sigma_n = \overline{T}^{(n)} \, . \, \overline{n}} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\sigma_n = \tau_{ij} \, n_j \, n_i}$$



il s'agit d'un extrémum lié par la condition

$$n_i \, n_i = 1$$

qu'on transforme en extrémum libre
à l'aide de multiplicateurs de Lagrange

$$(\tau_{ij} \, n_j) \, n_i \; - \lambda \, (n_i \, n_i - 1) \quad \text{extrémum}$$

Propriétés du tenseur des contraintes ...

$$(\tau_{ij}\, n_j)\, n_i \; - \lambda\,(n_i\, n_i - 1) \quad \text{extrémum}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_k}\Big[\,(\tau_{ij}\, n_j)\, n_i \; - \lambda\,(n_i\, n_i - 1)\Big] = 0 \qquad \text{avec :} \quad \frac{\partial n_i}{\partial n_k} = \delta_{ik}$$

$$\tau_{ij}\, n_j \;\; \delta_{ik} + \tau_{ij}\, n_i \;\; \delta_{jk} \; - 2\lambda \;\; n_i\, \delta_{ik} = 0$$

$$\tau_{jk}\, n_j \; + \tau_{ik}\, n_i \; - 2\lambda \;\; n_k = 0$$

$$\boxed{(\tau_{kj} - \lambda\,\delta_{kj})\, n_j = 0}$$

….. ce sont les directions principales

Propriétés du tenseur des contraintes ...

… et par extension, de tout tenseur symétrique du 2ème ordre

le tenseur des contraintes

- **possède 3 directions principales (au moins 3 ...)**
- **ces directions sont orthogonales**
- **les valeurs principales sont les contraintes principales (les contraintes normales selon ces directions)**
- **pour ces directions, la contrainte normale est extrémum**

Invariants du tenseur des contraintes ...

on peut définir comme invariants

$$I_1 = \tau_{ii}$$

$$I_2 = \tfrac{1}{2}(\tau_{ij}\,\tau_{ji} - \tau_{ii}\,\tau_{jj})$$

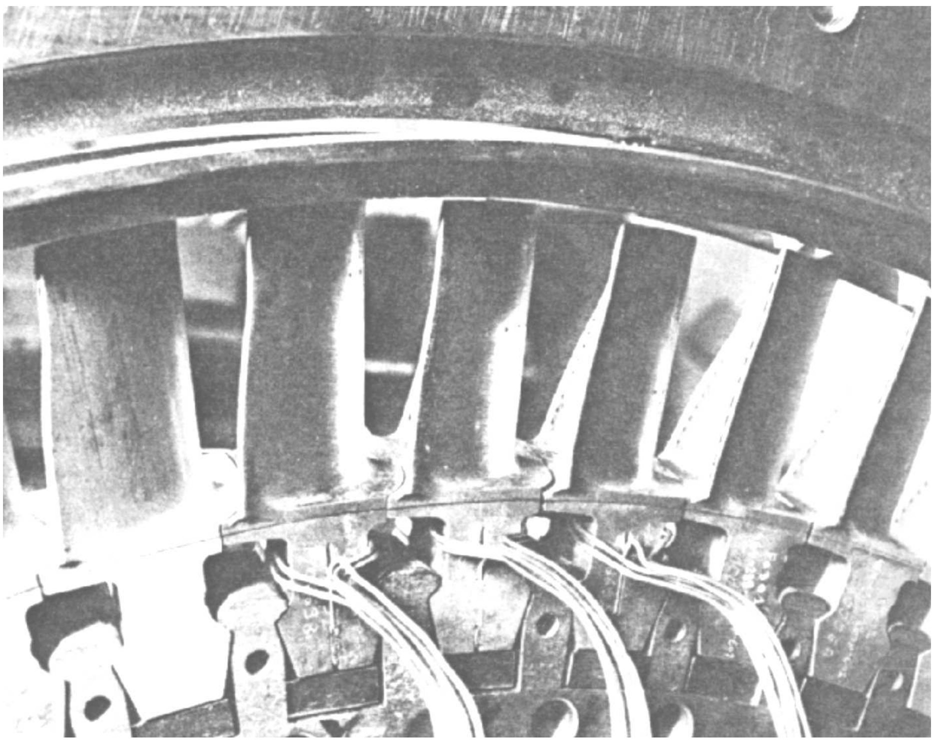
$$I_3 = \tfrac{1}{6}\,\delta_{pqr}\,\delta_{ijk}\,\tau_{pi}\,\tau_{qj}\,\tau_{rk}$$

amenant l'équation caractéristique sous la forme

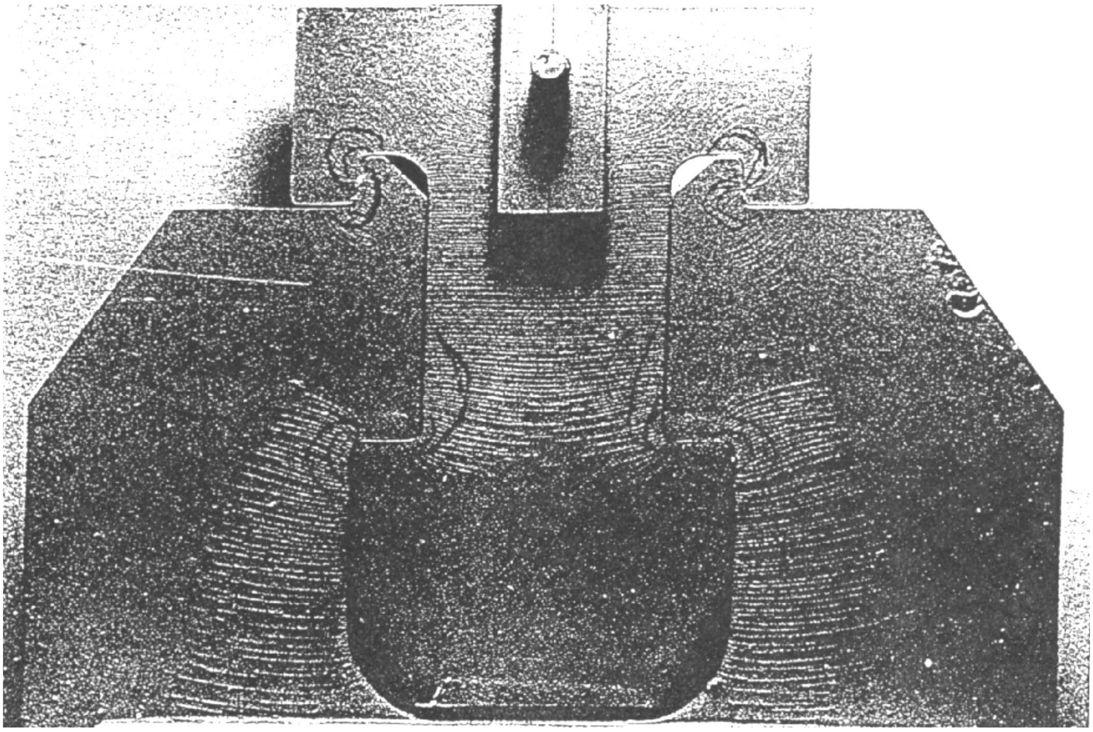
$$\boxed{\lambda^3 = I_1\,\lambda^2 + I_2\,\lambda + I_3}$$

et le théorème de Hamilton - Cayley démontre que tous les invariants d'ordre supérieur s'expriment en fonction de ces 3 invariants I_1 I_2 I_3

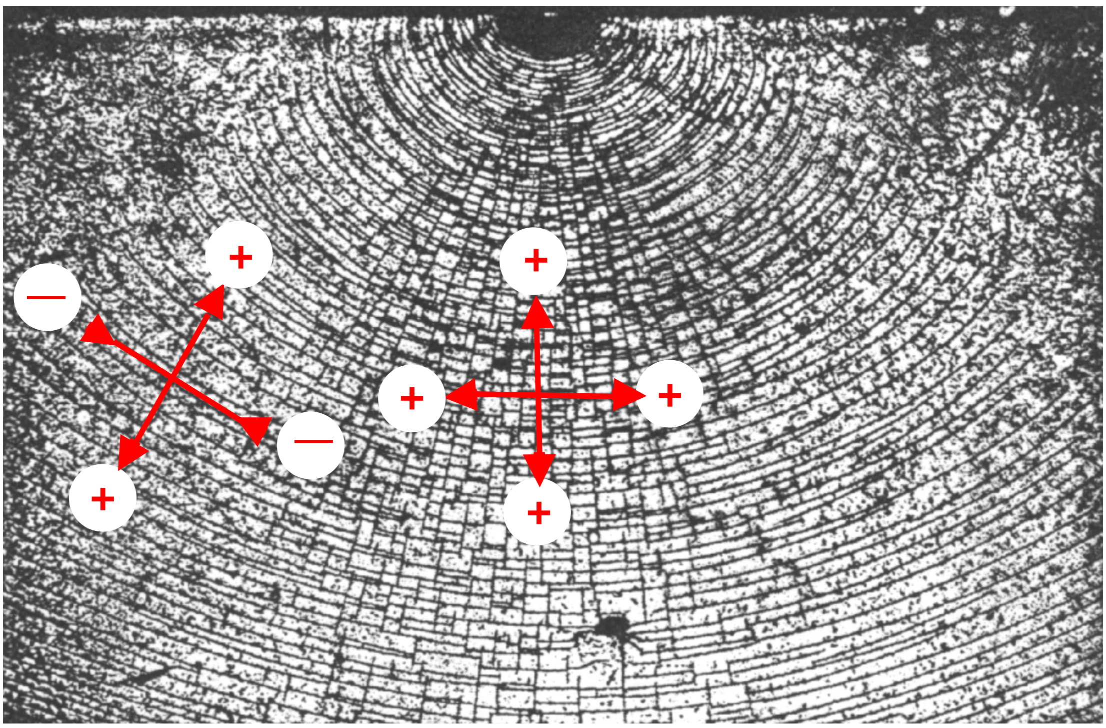
Jauges de contraintes sur des aubes



Vernis craquelant sur un pied d'aube



Vernis craquelant



Otto Mohr

(1835 - 1918)

Constructions du cercle de Mohr

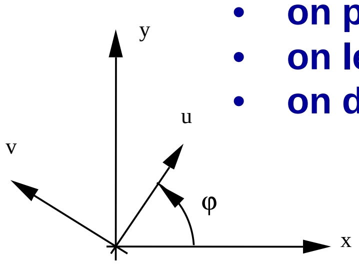
Le cercle de Mohr est une construction graphique traduisant les lois de changement d'axes pour les composantes du tenseur (en un point).

Il permet ...

- **de trouver les composantes du tenseur des contraintes, pour n'importe quelle orientation de normale (de facette)**
- **de trouver les valeurs des contraintes principales et les directions correspondantes**
- **de trouver les valeurs des contraintes tangentielles extrémum et les directions correspondantes**
- **de vérifier rapidement des résultats obtenus par calculs**

Cercle de Mohr ...

- **on part des formules de changement d'axes**
- **on les applique à une rotation d'angle φ autour de l'axe z**
- **on distribue les termes pour faire apparaître 2φ**



$$\boxed{\tau'_{PQ} = \alpha_{Pi}\,\alpha_{Qj}\,\tau_{ij}}$$

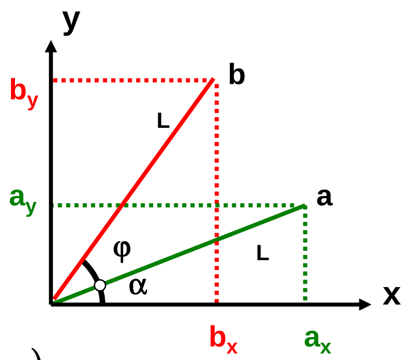
$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_u &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi \\
\sigma_v &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi \\
\tau_{uv} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi
\end{aligned}\right.$$

σ_z est inchangé

$$\left\{\begin{aligned}
\tau_{uz} &= \tau_{xz}\cos\varphi + \tau_{yz}\sin\varphi \\
\tau_{vz} &= -\tau_{xz}\sin\varphi + \tau_{yz}\cos\varphi
\end{aligned}\right.$$

Cercle de Mohr ...

comparons les formules obtenues à celles d'une rotation d'un vecteur de longueur L



$$a_x = L \cos\alpha$$
$$a_y = L \sin\alpha$$

$$b_x = L\cos(\alpha+\varphi) = L\left(\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha\right)$$
$$b_y = L\sin(\alpha+\varphi) = L\left(\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha\right)$$

$$b_x = a_x\cos\varphi - a_y\sin\varphi$$
$$b_y = a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi$$

Cercle de Mohr ...

… et comparons

$$b_x = a_x\cos\varphi - a_y\sin\varphi$$
$$b_y = a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi$$

angle de rotation :

φ $\qquad$ -2φ

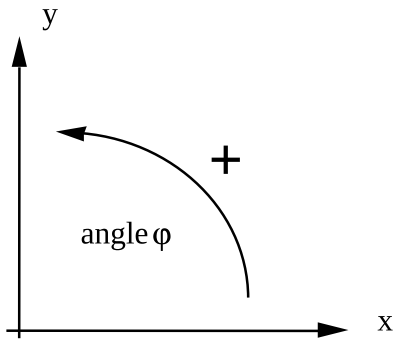
$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$
$$\tau_{uv} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

centre de rotation :

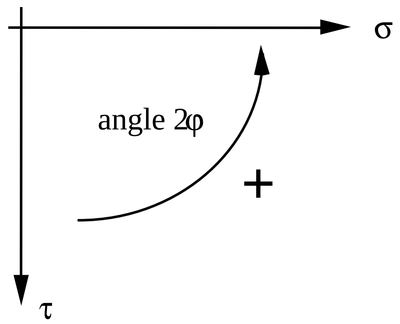
$0\ ,\ 0$ $\qquad$ $\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\ ,\ 0$

Cercle de Mohr ...

… pour garder le même sens de rotation dans le plan physique (x,y) et le graphique des contraintes (σ , τ), on portera l'axe τ vers le bas



plan physique



"plan" des contraintes

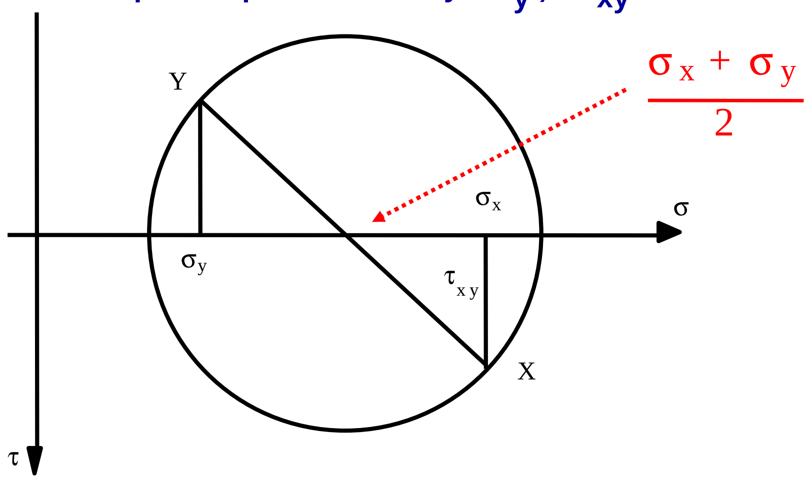
Cercle de Mohr ...

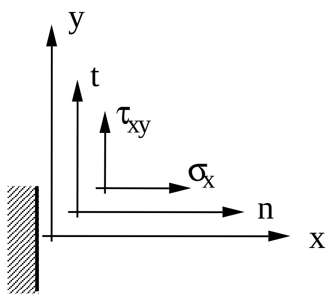
… construisons le cercle de Mohr connaissant l'état de contrainte dans les axes x , y.

En axes locaux n, t :

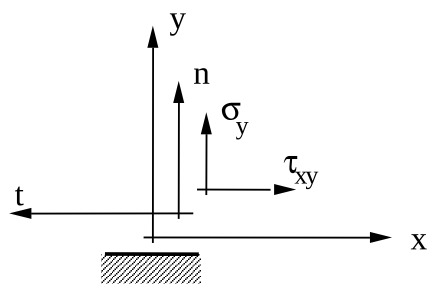
le point représentatif de x : σ_x , τ_{xy}

le point représentatif de y : σ_y , $-\tau_{xy}$





facette de normale x

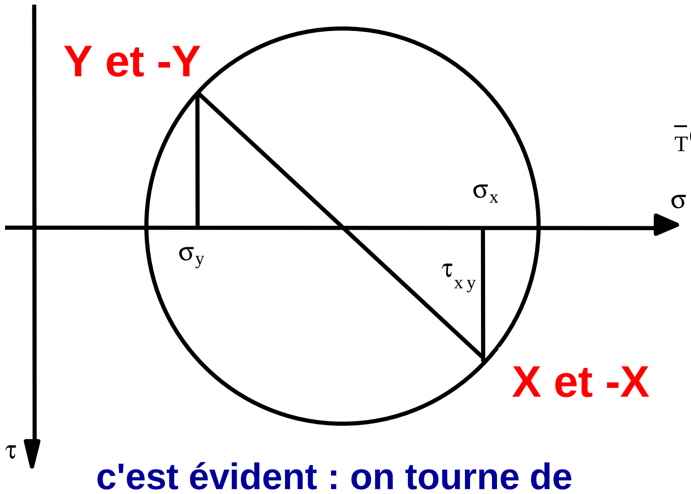


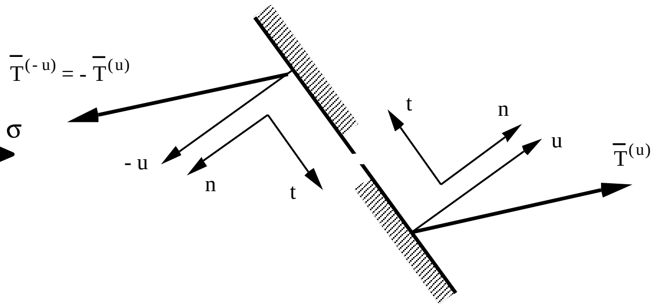
facette de normale y

Cercle de Mohr ...

considérons deux facettes de normale opposée **u** et **-u**

par l'égalité de l'action et de la réaction, on a $\boxed{\overline{T}^{(u)} = -\overline{T}^{(-u)}}$





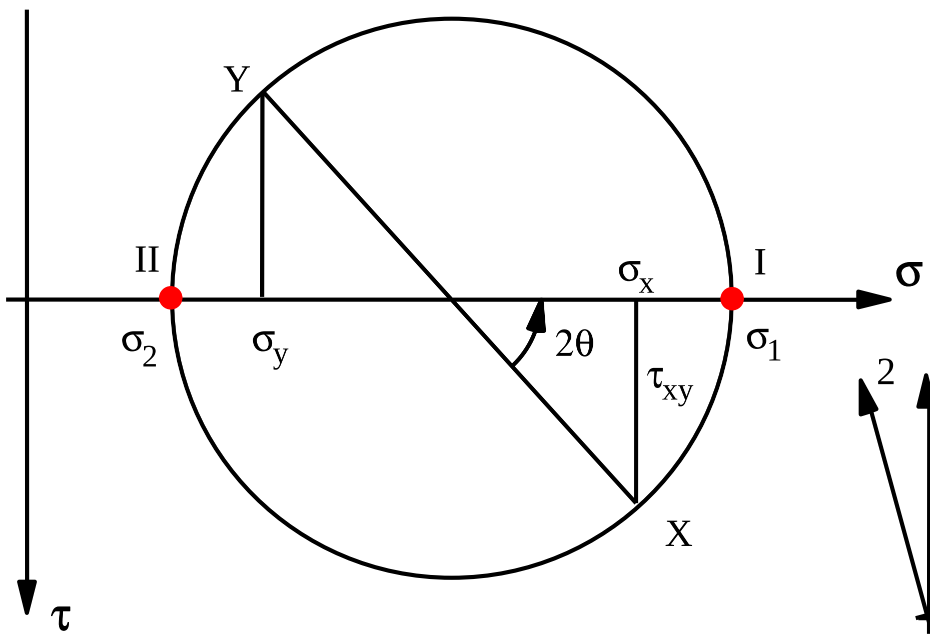
c'est évident : on tourne de
2 x 180°= 360° ⟶ même point

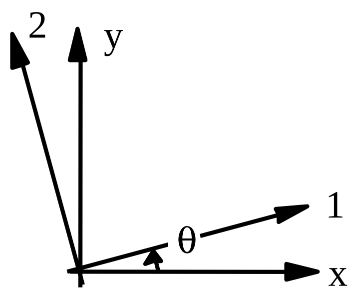
$$\boxed{\sigma_n^{(u)} = \sigma_n^{(-u)} \quad \text{et} \quad \tau_{nt}^{(u)} = \tau_{nt}^{(-u)}}$$

BATir

Cercle de Mohr ...

contraintes principales et directions principales



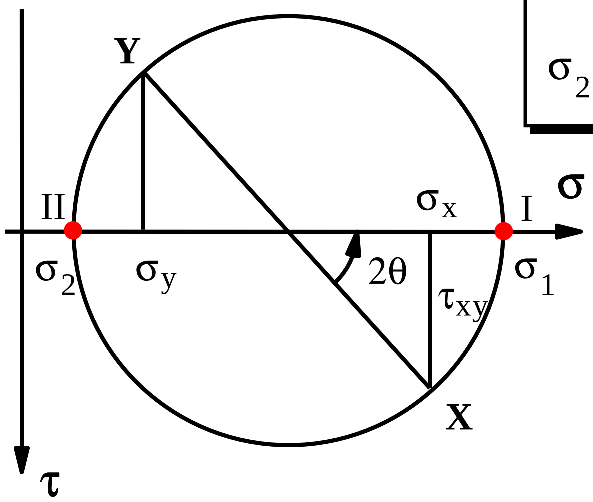


BATir

Cercle de Mohr ...

la détermination des contraintes principales est immédiate à partir du cercle de Mohr ...

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

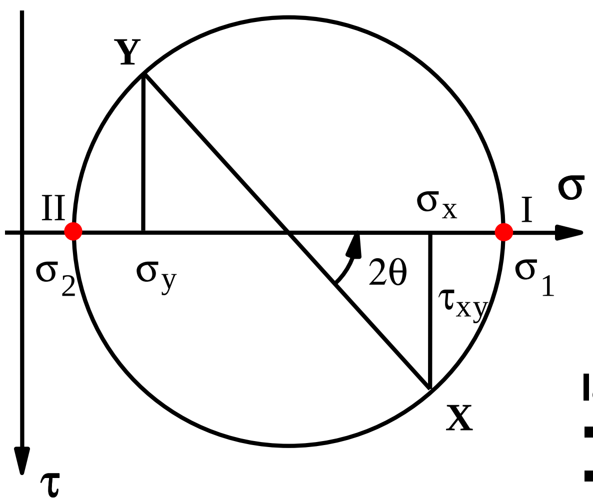


$$\text{tang } 2\theta = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Cercle de Mohr ...

attention au calcul de la valeur de θ ...

$$\text{tang } 2\theta = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



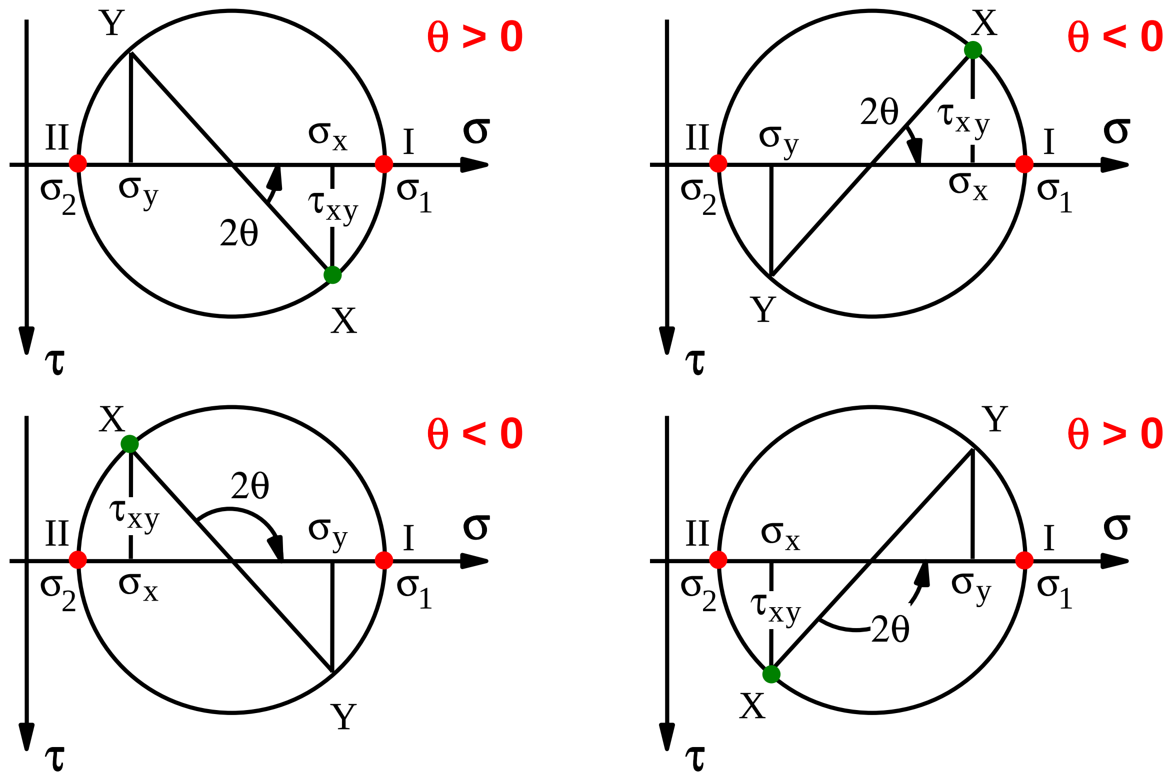
$$2\theta = \text{atan}\left(\frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \pm k\pi$$

$$\theta = \frac{1}{2}\,\text{atan}\left(\frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \pm k\,\frac{\pi}{2}$$

la valeur de k est telle que :
- **θ est compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$**
- **θ est de même signe que τ_{xy}**

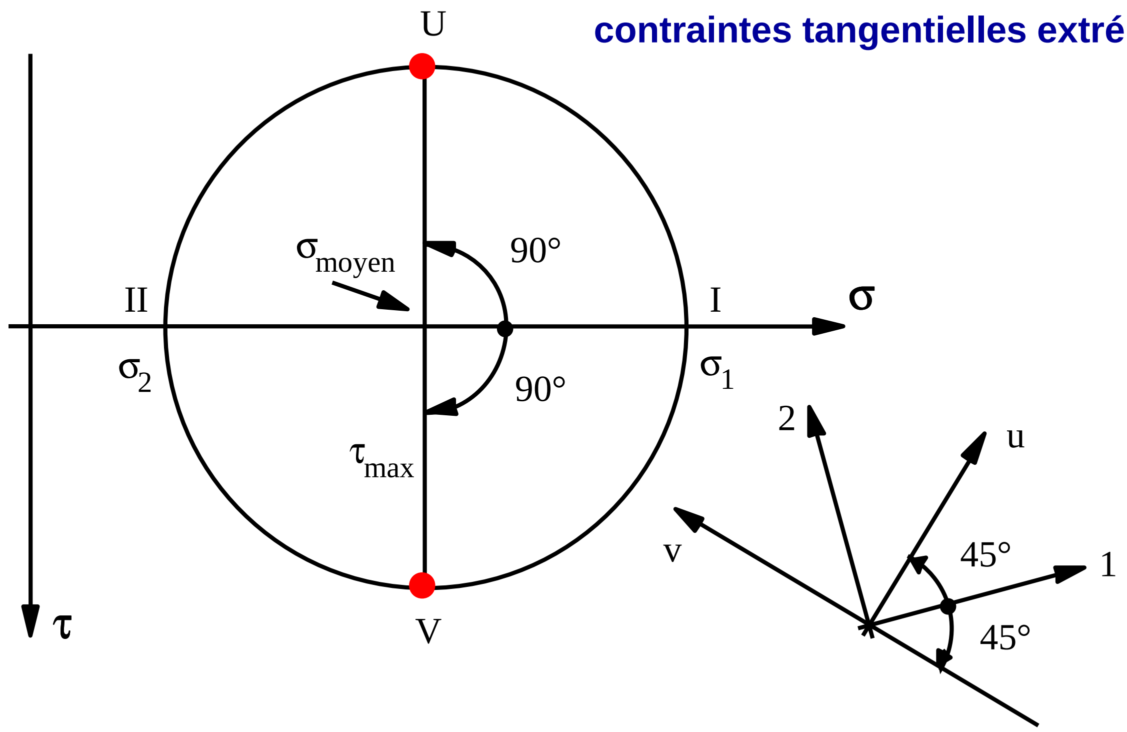
Cercle de Mohr ...

attention au calcul de la valeur de θ ...



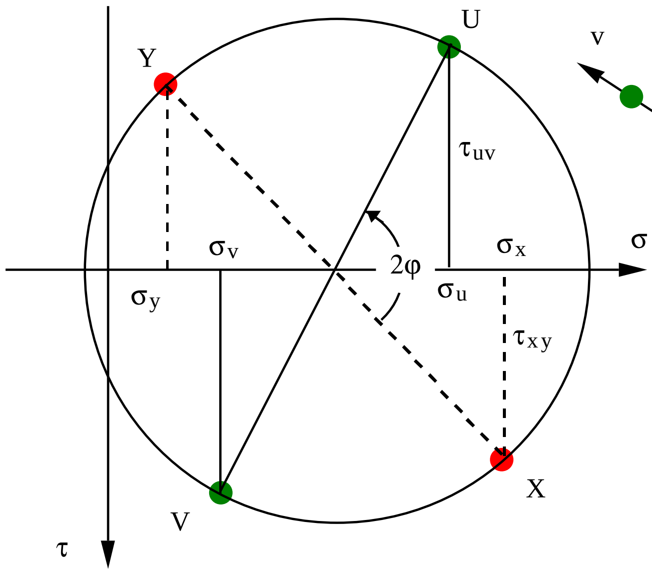
Cercle de Mohr ...

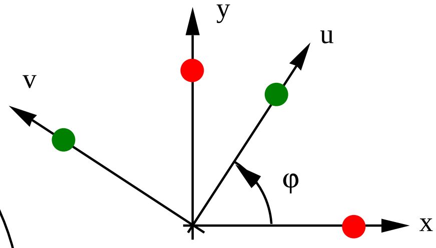
contraintes tangentielles extrémum



Cercle de Mohr ...

trouver les composantes après un changement d'axes

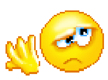


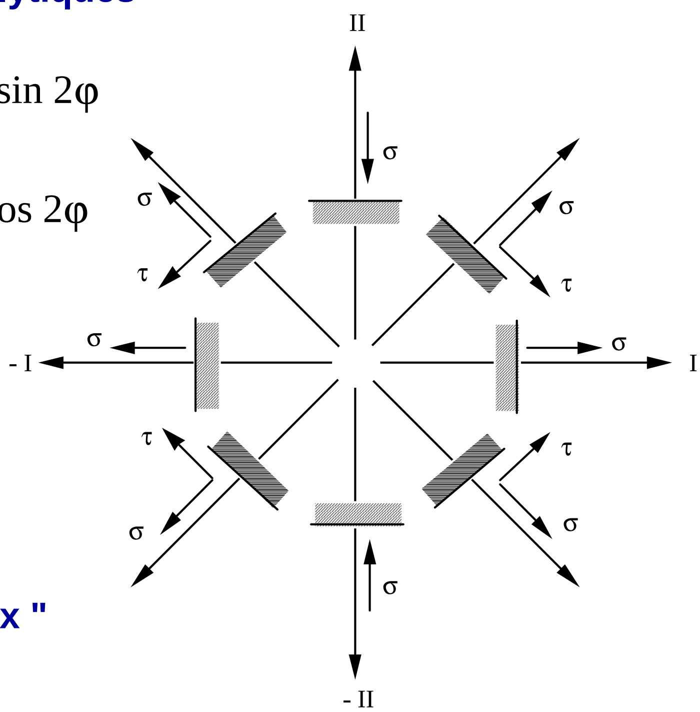


Signe des contraintes tangentielles ...

repartons des relations analytiques

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma_u = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi \\ \tau_{uv} = \qquad - \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi\end{array}\right.$$



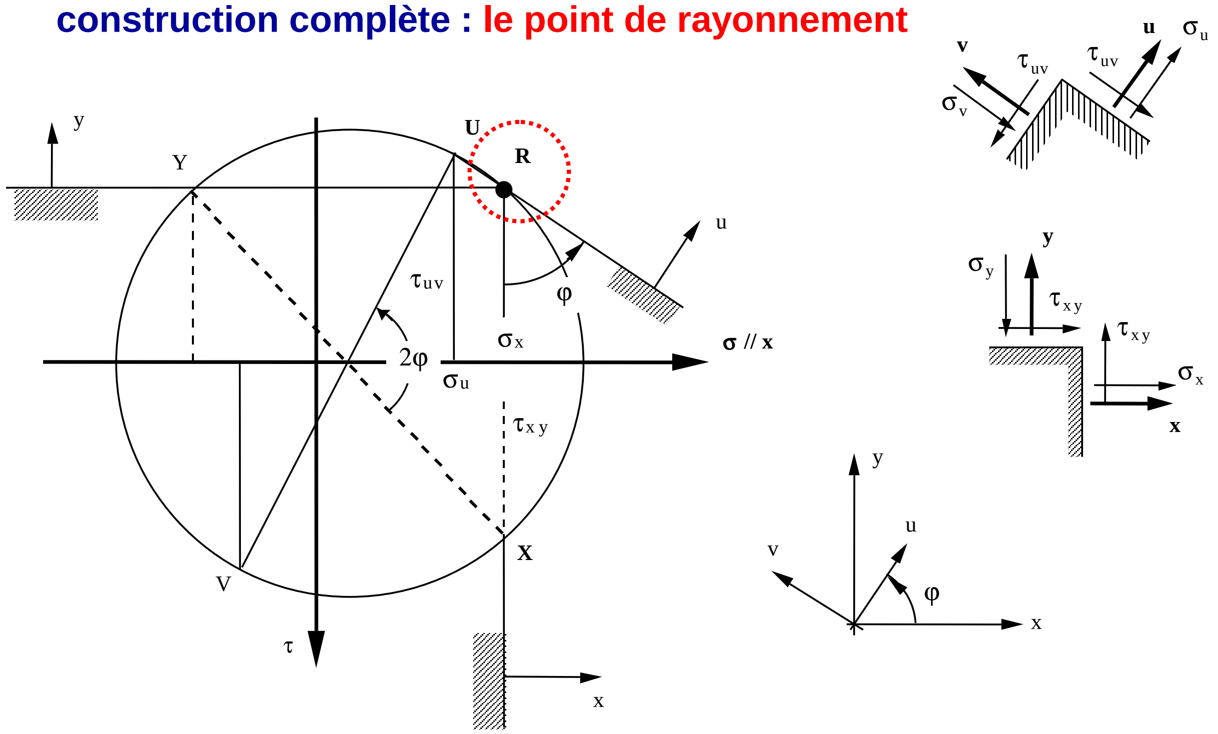


on trouve $\dfrac{\partial \sigma_u}{\partial \varphi} = 2\,\tau_{uv}$

indiquant que " τ pointe vers le σ max "

Cercle de Mohr ...

construction complète : le point de rayonnement



Informations via Internet : "Université virtuelle"

http://uv.ulb.ac.be/

L'Université Virtuelle

ULB

CTA

Connexion

Nom d'utilisateur:

Mot de passe:

OK

Liste des cours

CNST-H-200 - Mécanique des solides et des fluides (G.Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

CNST-H-303 - Analyse des structures (G. Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

CNST-H-403 - Méthode des éléments finis (structures) (G. Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

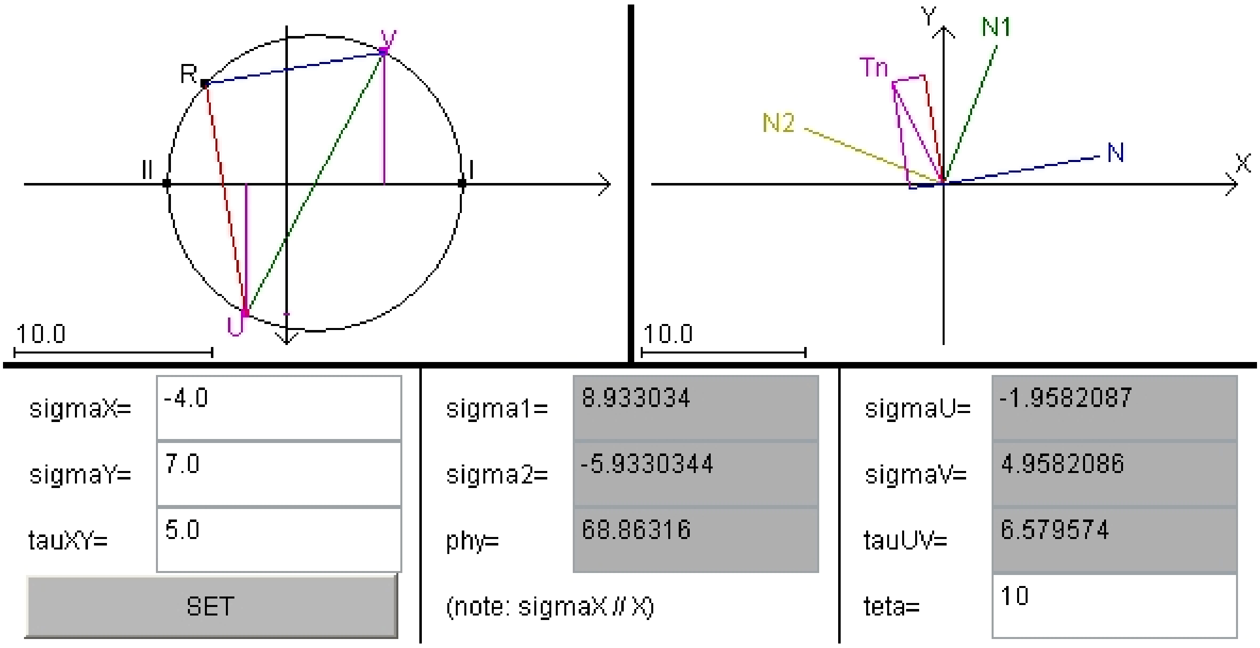
CNST-H-421 - Structural Analysis and Finite Elements (G. Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

CNST-H-508 - Méthode des éléments finis (compléments) (G. Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

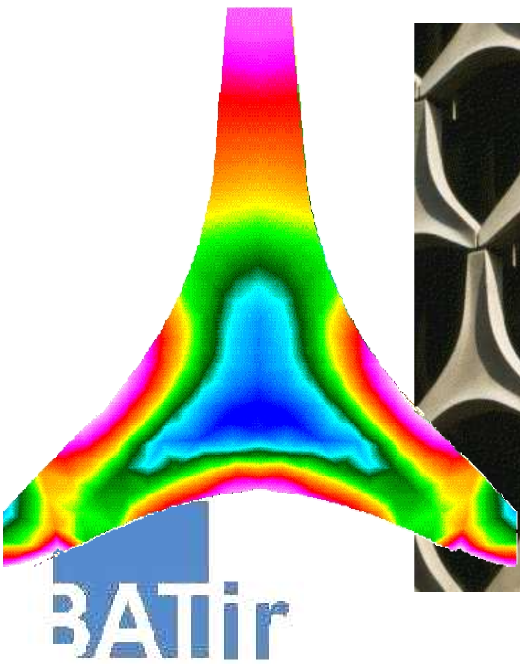
CNST-H-200
Mécanique des solides et des fluides

.... Cercle de Mohr interactif
.... aide-mémoire pour l'examen écrit
.... modalités d'examens

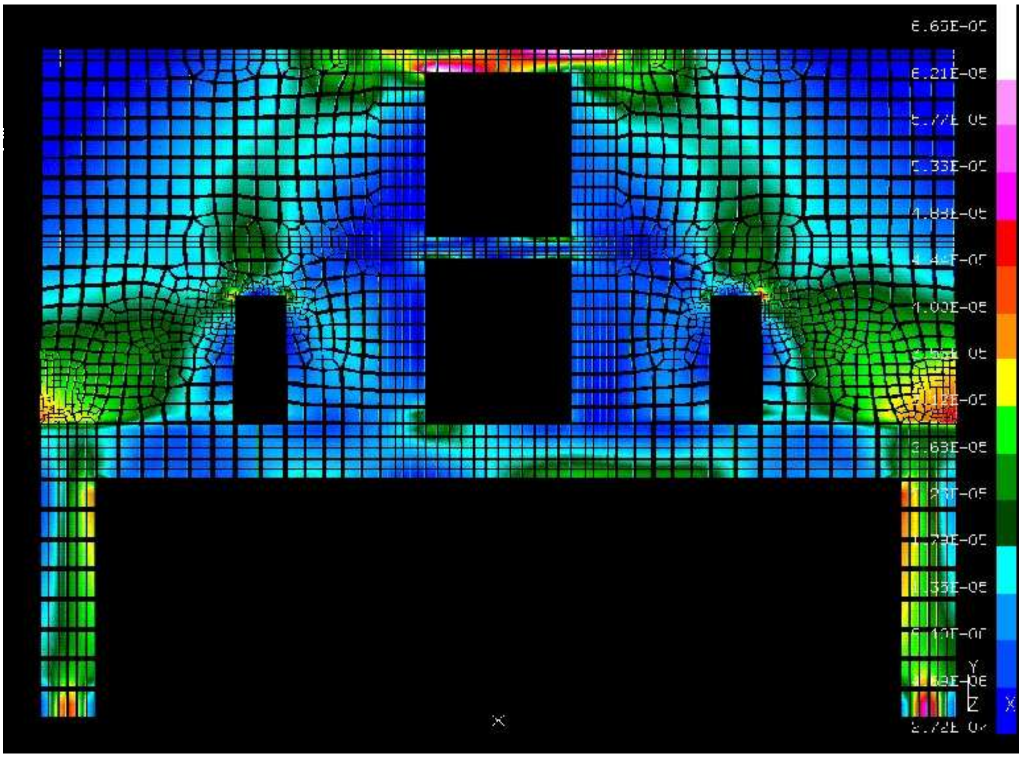
Cercle de Mohr interactif sur Internet ...



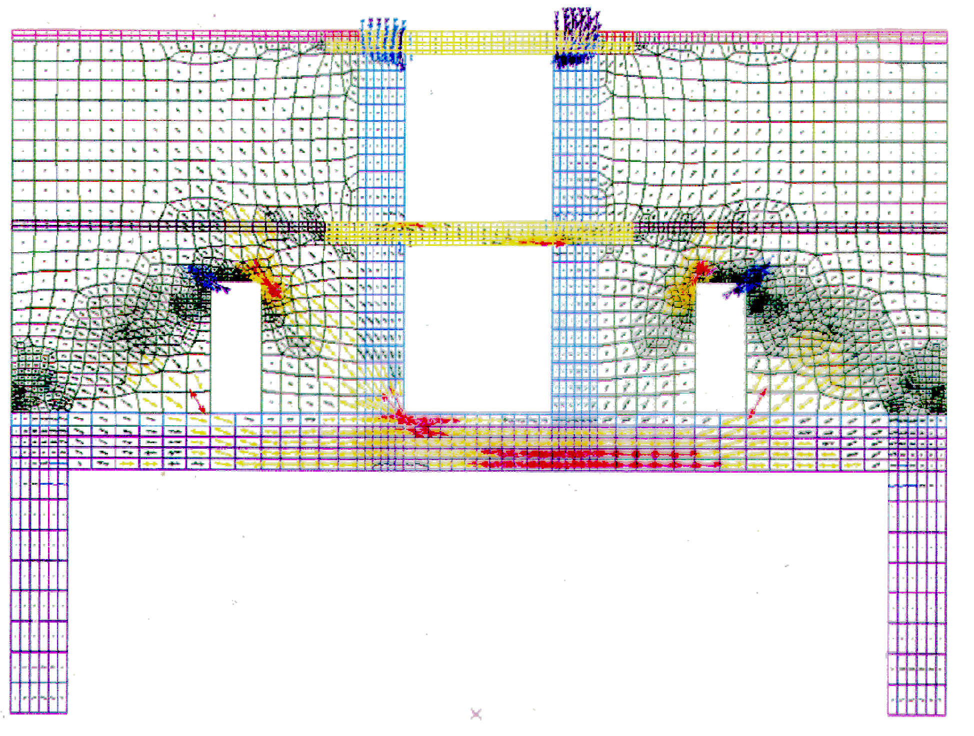
Façade de la CGER (Fortis) à Bruxelles ...



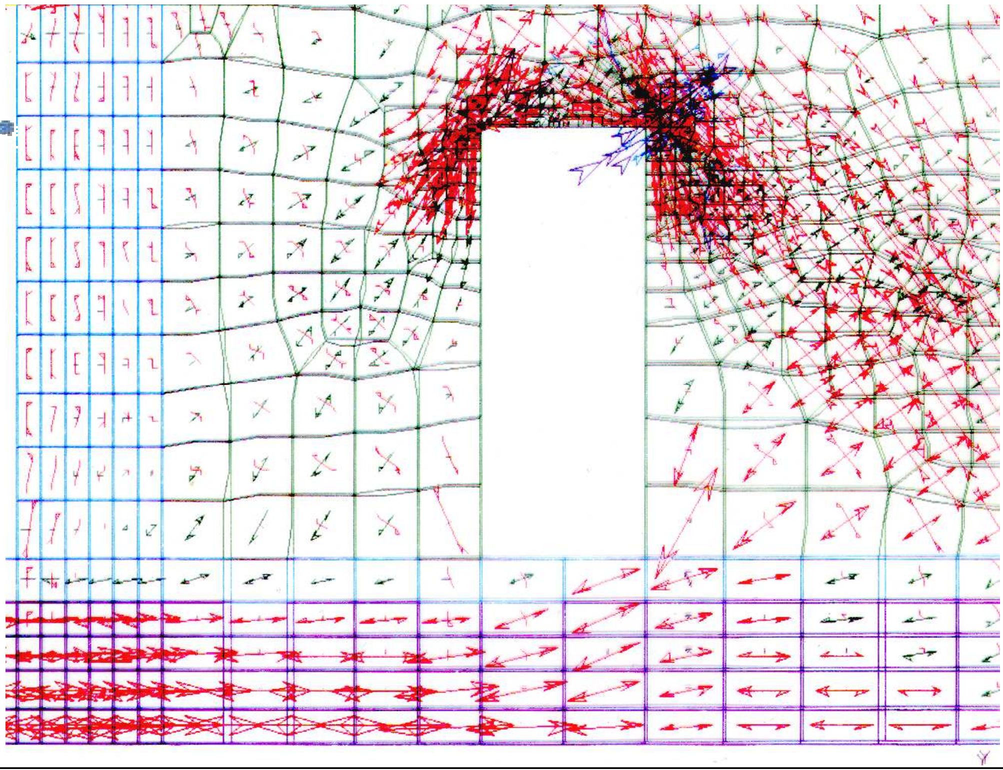
Voile de l'hôtel Conrad (Wiltcher) ...



Voile de l'hôtel Conrad (Wiltcher) ...



Voile de l'hôtel Conrad (Wiltcher) ...



BATir

SERVICE CONSTRUCTION, ARCHITECTURE ET URBANISME
DEPARTMENT OF BUILDING, ARCHITECTURE AND TOWN PLANNING

Cinématique des milieux continus

déformations
vitesses de déformation

ULB
UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

Cinématique des milieux continus ...

étude des

(1)
- **déplacements**
- **déformations**

(2)
- **vitesses**
- **vitesses de déformation**

sans considérer les forces qui les produisent

on veillera à distinguer :

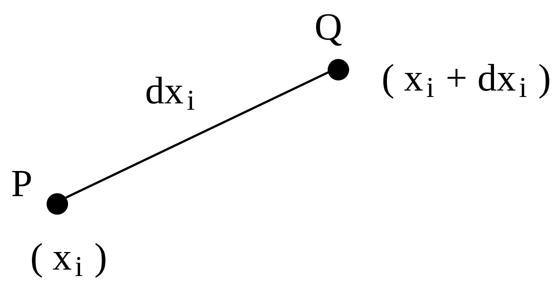
- **les points géométriques (points de l'espace)**
- **les points matériels (porteurs de masse)**

Vitesse de déformation, vitesse de rotation ...

on désire caractériser la déformabilité du milieu continu

on considère deux points voisins P et Q

et on exprime la vitesse de Q en fonction de la vitesse de P par un développement en série limité au 1er ordre



$$v_i\,(Q) = v_i\,(P) + \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right]_P dx_j + ...$$

$$= v_i\,(P) + v_{i,j}\,dx_j + ...$$

ou

$$\boxed{\begin{aligned} dv_i &= v_i\,(Q) - v_i(P) \\ &= v_{i,j}\,dx_j \end{aligned}}$$

Vitesse de déformation, vitesse de rotation ...

$$dv_i = v_{i,j}\, dx_j$$

on décompose $v_{i,j}$ en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique

$$v_{i,j} = v_{(i,j)} + v_{[i,j]}$$

$$v_{(i,j)} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right) \qquad \text{et} \qquad v_{[i,j]} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} - v_{j,i}\right)$$

$$dv_i = dv_i^{*} + dv_i^{**}$$

$$dv_i^{*} = v_{(i,j)}\, dx_j \qquad \text{et} \qquad dv_i^{**} = v_{[i,j]}\, dx_j$$

on étudiera séparément l'interprétation physique de chacune des deux parties

Vitesse de déformation, vitesse de rotation ...

étude de la partie antisymétrique

pour exprimer la partie antisymétrique des dérivées, on utilise le rotationnel (opérateur de dérivée antisymétrique)

$$\boxed{\omega_i = \frac{1}{2}\,\delta_{ijk}\,\partial_j\, v_k} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\overline{\omega} = \frac{1}{2}\,\overline{\text{rot}}\;\overline{v}}$$

vecteur tourbillon

$$\delta_{ipq}\,\omega_i = \frac{1}{2}\,\delta_{ipq}\,\delta_{ijk}\, v_{[k,j]}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta_{pj}\,\delta_{qk} - \delta_{pk}\,\delta_{qj}\right) v_{[k,j]}$$

$$= \frac{1}{2}\left(v_{[q,p]} - v_{[p,q]}\right)$$

$$= v_{[q,p]}$$

seule la partie antisymétrique des dérivées de la vitesse intervient !

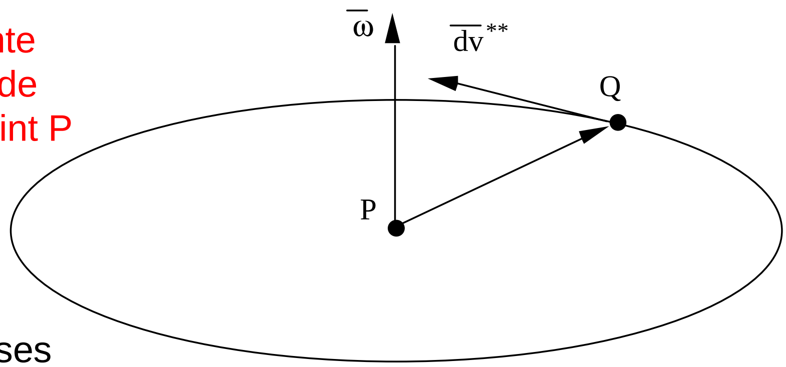
149

Vitesse de déformation, vitesse de rotation ...

étude de la partie antisymétrique $$dv_i^{**} = v_{[i,j]}\, dx_j$$

$$\boxed{dv_i^{**} = \delta_{ijk}\, \omega_j\, dx_k} \quad \text{ou} \quad \boxed{\overline{dv}^{**} = \overline{\omega} \times \overline{PQ}}$$

la partie antisymétrique représente donc un mouvement de rotation de corps indéformable autour du point P



$\overline{\omega}$ = tourbillon du champ de vitesses

150

Vitesse de déformation, vitesse de rotation ...

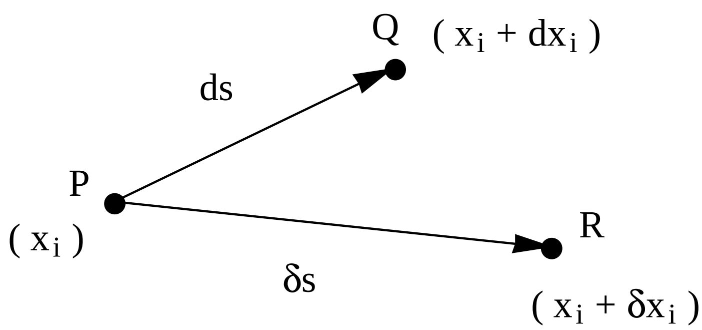
étude de la partie symétrique

comme la partie antisymétrique représente un mouvement de corps indéformable, la partie symétrique doit représenter la déformabilité du milieu continu

il faut donc alors considérer deux points Q et R voisins de P

$$dv_i = v_i(Q) - v_i(P)$$
$$= v_{i,j}\, dx_j$$

$$\delta v_i = v_i(R) - v_i(P)$$
$$= v_{i,j}\, \delta x_j$$



151

Vitesse de déformation, vitesse de rotation ...

étude de la partie symétrique

la dérivée du produit scalaire $(\overline{ds}\,.\,\overline{\delta s})$ permettra de caractériser la déformabilité
(ce produit scalaire ne change que si une des longueurs change ou si l'angle change)

$$(dx_i\ \delta x_i)^{\bullet} = dv_i\ \delta x_i + dx_i\ \delta v_i$$

$$= v_{i,j}\ dx_j\ \delta x_i + v_{i,j}\ dx_i\ \delta x_j$$

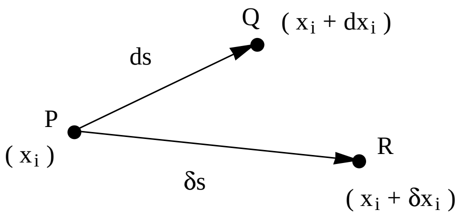
$$= (v_{i,j} + v_{j,i})\ dx_i\ \delta x_j$$

$$= 2\ v_{(i,j)}\ \ dx_i\ \delta x_j$$

$$dx_i = x_i(Q) - x_i(P)$$

$$(dx_i)^{\bullet} = v_i(Q) - v_i(P) = dv_i$$

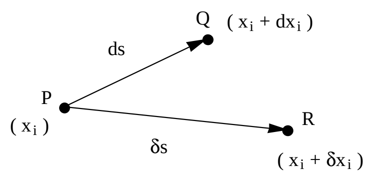
$$(\delta x_i)^{\bullet} = v_i(R) - v_i(P) = \delta v_i$$



152

Tenseur des vitesses de déformation ...

étude de la partie symétrique



$$(dx_i\ \delta x_i)^{\bullet} = 2\ v_{(i,j)}\ \ dx_i\ \delta x_j$$

avec $$\boxed{V_{ij} = \frac{1}{2}(\ v_{i,j} + v_{j,i}\ )\ = v_{(i,j)}}$$

fonction linéaire !

c'est un tenseur symétrique du 2ème ordre :
il possède donc toutes les propriétés établies pour le tenseur des contraintes

- valeurs principales, directions principales
- cercle de Mohr, formules analytiques de changement d'axes

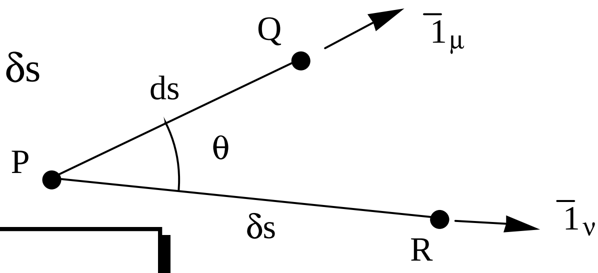
Tenseur des vitesses de déformation ...

signification physique des composantes de V_{ij}

$$(dx_i\ \delta x_i)^{\bullet} = (\overline{ds}\ .\ \overline{\delta s})^{\bullet} = (ds\ \delta s \cos\theta)^{\bullet}$$

$$= ds^{\bullet}\ \delta s \cos\theta + ds\ \delta s^{\bullet} \cos\theta - ds\ \delta s \sin\theta\ \theta^{\bullet}$$

$$= \left[\left(\frac{ds^{\bullet}}{ds} + \frac{\delta s^{\bullet}}{\delta s}\right)\cos\theta - \theta^{\bullet}\sin\theta\right] ds\ \delta s$$



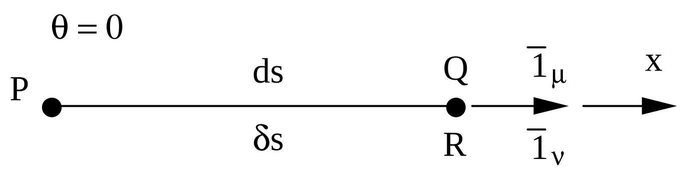
$$\boxed{\left(\frac{ds^{\bullet}}{ds} + \frac{\delta s^{\bullet}}{\delta s}\right)\cos\theta - \theta^{\bullet}\sin\theta = 2\,V_{ij}\,\mu_i\,\nu_j}$$

ensuite faire
des choix particuliers

BATir

Tenseur des vitesses de déformation ...

signification physique
des composantes de V_{ij}



$$\boxed{\left(\frac{ds^{\bullet}}{ds} + \frac{\delta s^{\bullet}}{\delta s}\right)\cos\theta - \theta^{\bullet}\sin\theta = 2\,V_{ij}\,\mu_i\,\nu_j}$$

$$\boxed{\frac{dx_1^{\bullet}}{dx_1} = V_{11}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{dx^{\bullet}}{dx} = V_{xx}}$$

$$\mu_i = \frac{dx_i}{ds} \quad \text{et} \quad \nu_i = \frac{\delta x_i}{\delta s}$$

$$\mu_i = \nu_i = (1, 0, 0)$$

vitesse relative de déformation dans la direction x

BATir

Tenseur des vitesses de déformation ...

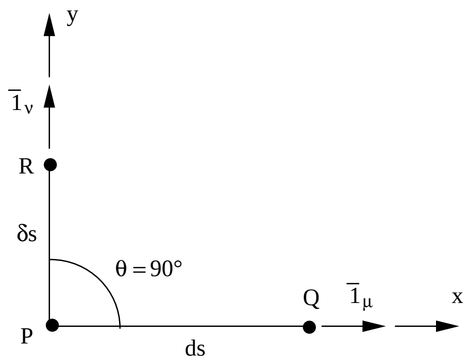
signification physique
des composantes de V_{ij}

$\mu_i = (1, 0, 0)$

$\nu_i = (0, 1, 0)$

$$\boxed{\left(\frac{\dot{ds}}{ds} + \frac{\dot{\delta s}}{\delta s}\right)\cos\theta - \dot{\theta}\,\sin\theta = 2\, V_{ij}\,\mu_i\,\nu_j}$$

$\boxed{-\dot{\theta} = 2\, V_{12}}$ ou $\boxed{-\dot{\theta} = 2\, V_{xy}}$



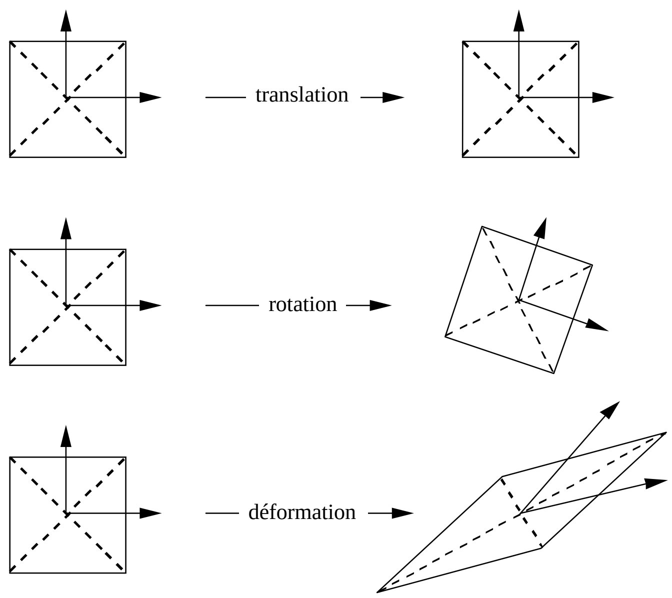
vitesse de diminution de l'angle
initialement droit entre x et y

En résumé ...

$$v_i(Q) = v_i(P) + v_{i,j}\, dx_j$$

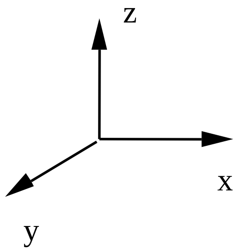
$$v_i(Q) = v_i(P) + v_{(i,j)}\, dx_j + v_{[i,j]}\, dx_j$$

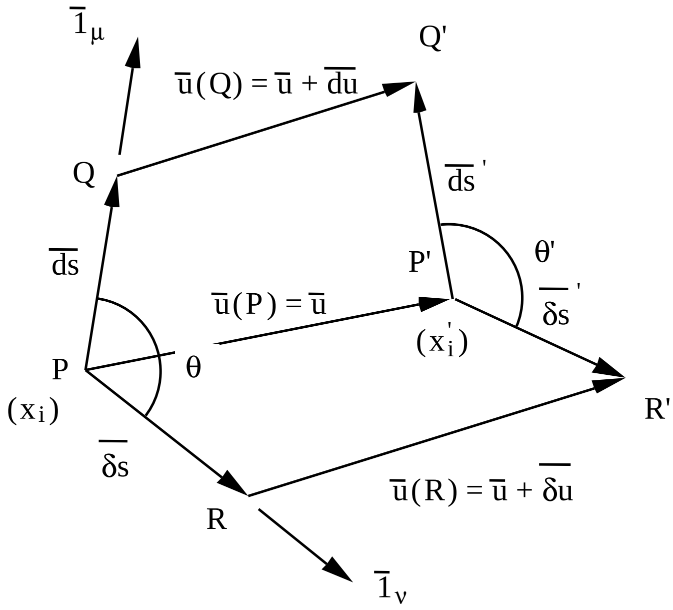
$$v_i(Q) = v_i(P) + V_{ij}\, dx_j + \left(\overline{\omega} \times \overline{PQ}\right)_i$$



Déformation, rotation ...

on désire caractériser la déformabilité du milieu continu





comme précédemment, de façon similaire, on considère les déplacements d'un point P et de deux points Q et R infiniment voisins

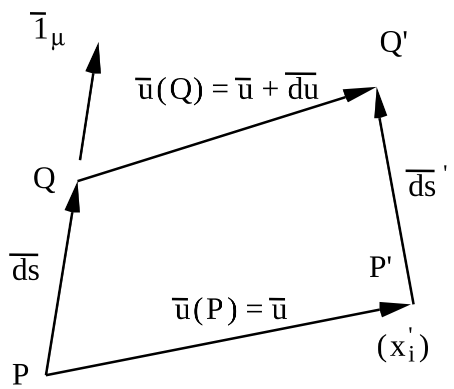
Tenseur des déformations de Green ...

on désire caractériser la déformabilité du milieu continu

$$x_i'(Q') = x_i(Q) + u_i(Q)$$

$$x_i'(P') = x_i(P) + u_i(P)$$

$$\left[x_i'(Q') - x_i'(P')\right] = \left[x_i(Q) - x_i(P)\right] + \left[u_i(Q) - u_i(P)\right]$$



ou $$dx_i' = dx_i + du_i$$

$$u_i(Q) = u_i(P) + \left.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|_P dx_j + ...$$

$$du_i = u_i(Q) - u_i(P)$$

$$\boxed{du_i = u_{i,j}\, dx_j}$$

toutes les grandeurs sont évaluées au point P

Tenseur des déformations de Green ...

$$\boxed{\overline{ds'}\,.\,\overline{\delta s'} - \overline{ds}\,.\,\overline{\delta s} = ds'\,.\,\delta s' \cos\theta' - ds\,.\,\delta s \cos\theta}$$

ici également la variation du produit scalaire caractérisera la déformation

$$\overline{ds}'\,.\,\overline{\delta s}' - \overline{ds}\,.\,\overline{\delta s} = dx_i'\,.\,\delta x_i' - dx_i\,.\,\delta x_i$$

$$= \left[\, dx_i + u_{i,j}\, dx_j \right]\left[\, \delta x_i + u_{i,k}\, \delta x_k \right] - dx_i\,.\,\delta x_i$$

$$= u_{i,j}\, dx_j\, \delta x_i + u_{i,k}\, dx_i\, \delta x_k + u_{i,j}\, u_{i,k}\, dx_j\, \delta x_k$$

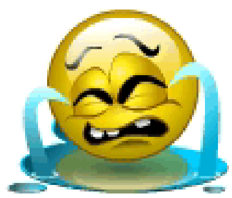
$$= \left[\, u_{k,j} + u_{j,k} + u_{i,j}\, u_{i,k} \right] dx_j\, \delta x_k$$

$$= 2\, L_{jk}\, dx_j\, \delta x_k$$

$$\boxed{L_{jk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right]}$$

Tenseur des déformations de Green ...

$$\boxed{L_{jk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right]}$$



fonction non linéaire des déplacements !

c'est un tenseur symétrique du 2ème ordre :
il possède donc toutes les propriétés établies pour le tenseur des contraintes

- valeurs principales, directions principales
- cercle de Mohr, formules analytiques de changement d'axes

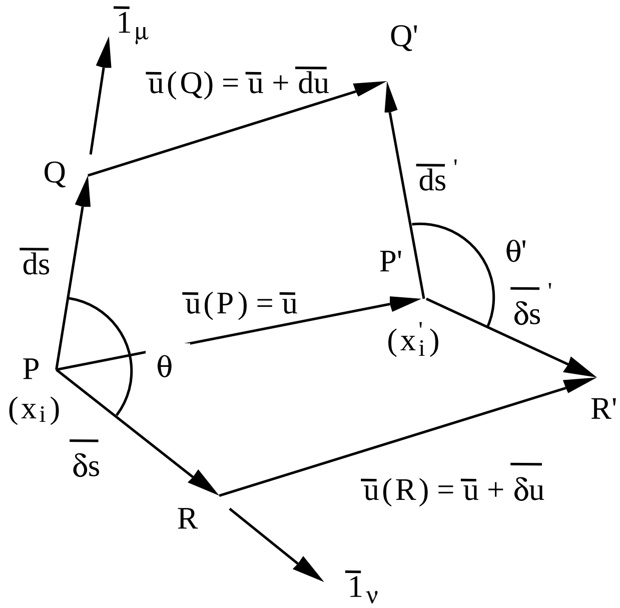
Tenseur des déformations de Green ...

$$\boxed{\overline{ds}' \cdot \overline{\delta s}' - \overline{ds} \cdot \overline{\delta s} = ds' \cdot \delta s' \cos\theta' - ds \cdot \delta s \cos\theta}$$

et $\overline{ds}' \cdot \overline{\delta s}' - \overline{ds} \cdot \overline{\delta s} = 2\, L_{jk}\, dx_j\, \delta x_k$

et donc, après division par (ds . δs)

$$\boxed{\frac{ds'}{ds} \cdot \frac{\delta s'}{\delta s} \cos\theta' - \cos\theta = 2\, L_{jk}\, \mu_j\, \nu_k}$$



Tenseur des déformations évanouissantes ...

supposons que :

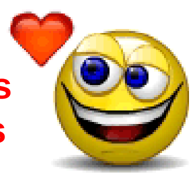
$$\boxed{L_{jk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \cancel{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}\right]}$$

- les dérivées des déplacements sont négligeables devant 1
- les positions avant déformation et après déformation peuvent être confondues

$u_{i,j} << 1$ $\qquad$ $x_i' = x_i + u_i = x_i\left[1 + \frac{u_i}{x_i}\right] \approx x_i$

L_{jk} devient $\boxed{a_{jk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right]}$

fonctions linéaires des déplacements



Tenseur des déformations évanouissantes ...

$$\boxed{a_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]}$$

$$\boxed{a_{ij} = u_{(i,j)}}$$

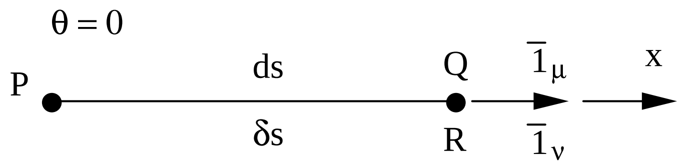
ou, parfois ε_{ij}

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

attention à $\frac{1}{2}$

Tenseur des déformations évanouissantes ...

signification physique
des composantes de a_{ij}



$$\boxed{\frac{ds'}{ds} \cdot \frac{\delta s'}{\delta s} \cos\theta' - \cos\theta = 2\, a_{ij}\, \mu_i\, \nu_j}$$

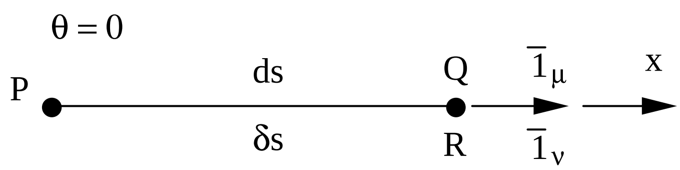
$$\mu_i = \frac{dx_i}{ds} \qquad \text{et} \qquad \nu_i = \frac{\delta x_i}{\delta s}$$

$$\mu_i = \nu_i = (1, 0, 0)$$

$$\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 - 1 = 2\, a_{xx}$$

Tenseur des déformations évanouissantes ...

signification physique
des composantes de a_{ij}



$$\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 - 1 = 2\, a_{xx}$$

$$1 + 2\, a_{xx} = \left(\frac{dx'}{dx}\right)^2$$

$$= \left(\frac{dx' - dx}{dx} + 1\right)^2$$

$$= \delta_x^{\,2} + 2\, \delta_x + 1$$

allongement relatif dans la direction x

$$\boxed{a_{xx} = \frac{dx' - dx}{dx} = \delta_x}$$

Tenseur des déformations évanouissantes ...

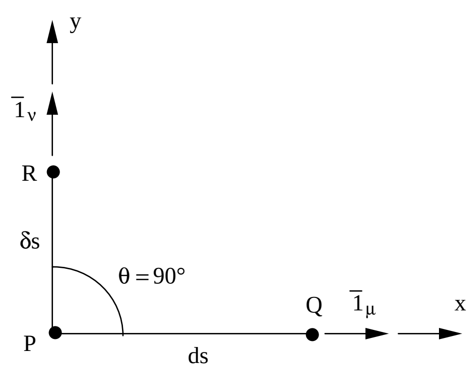
signification physique
des composantes de a_{ij}

$$\mu_i = (1, 0\ , 0)$$

$$\nu_i = (0, 1\ , 0)$$

$$\boxed{\frac{ds'}{ds} \cdot \frac{\delta s'}{\delta s} \cos\theta' - \cos\theta = 2\, a_{ij}\, \mu_i\, \nu_j}$$

$$\frac{dx'}{dx} \cdot \frac{\delta y'}{\delta y} \cos\theta' = 2\, a_{xy}$$



Tenseur des déformations évanouissantes ...

signification physique
des composantes de a_{ij}

$$\delta_x = \frac{dx' - dx}{dx} \qquad \delta_y = \frac{\delta y' - \delta y}{\delta y}$$

$$\theta' = \theta + \delta_\theta$$

$$\frac{dx'}{dx} \cdot \frac{\delta y'}{\delta y} \cos\theta' = 2\, a_{xy}$$

$$2\, a_{xy} = (1 + \delta_x)(1 + \delta_y)\cos(\theta + \delta_\theta)$$

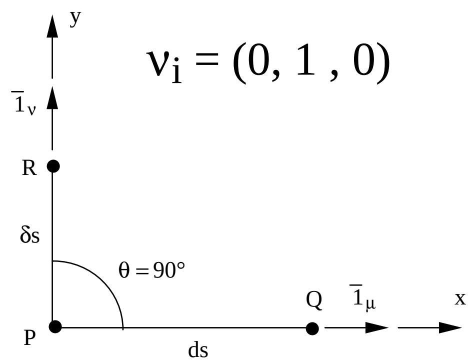
$$2\, a_{xy} = (1 + \delta_x)(1 + \delta_y)(\cos\theta \cos\delta_\theta - \sin\theta \sin\delta_\theta)$$

$$\boxed{2\, a_{xy} = -\delta_\theta}$$

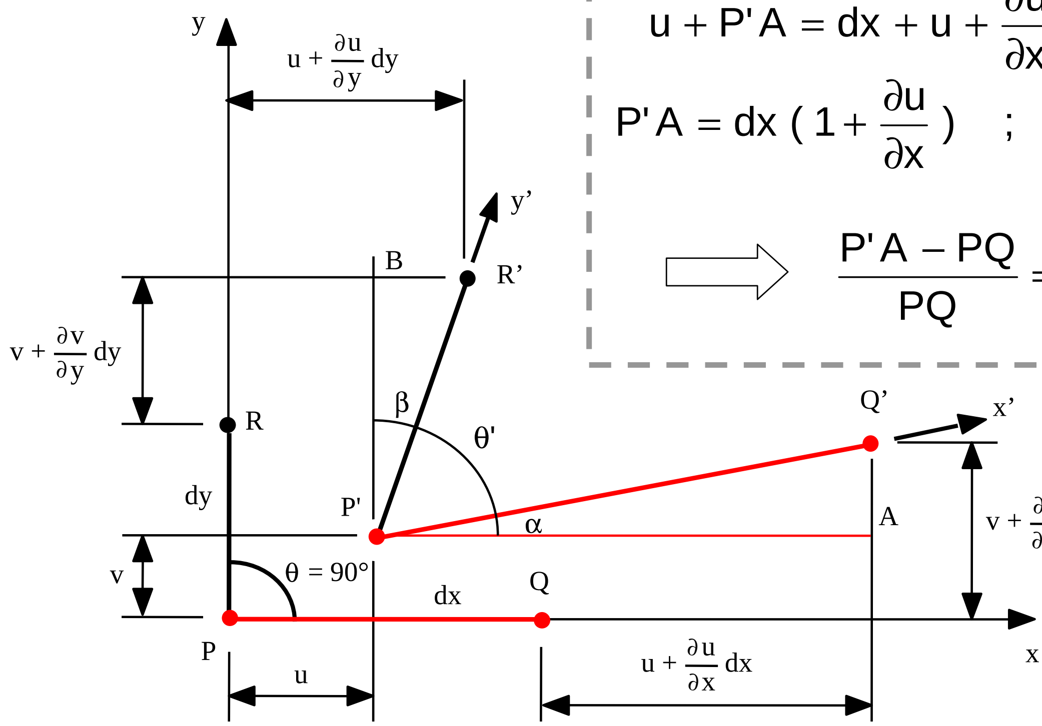
diminution de l'angle initialement droit entre x et y

$$\mu_i = (1, 0, 0)$$

$$\nu_i = (0, 1, 0)$$



Tenseur des déformations évanouissantes ...

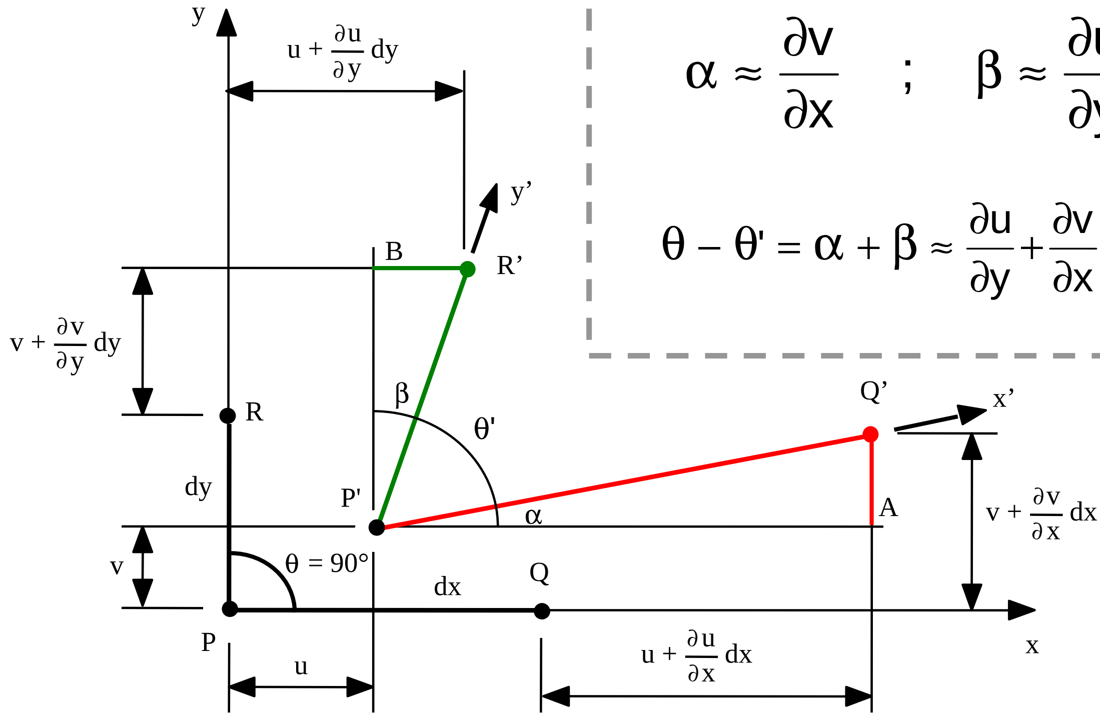


$$u + P'A = dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$P'A = dx\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad ; \quad PQ = dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P'A - PQ}{PQ} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x$$

Tenseur des déformations évanouissantes ...



$$\alpha \approx \frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad \beta \approx \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\theta - \theta' = \alpha + \beta \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}$$

Les unités du tenseur des déformations ...

$\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$; ..... **$\dfrac{\text{longueur}}{\text{longueur}}$** $\longrightarrow$ **sans dimensions**

en pratique, on peut exprimer les déformations axiales en %

ε_x = 0,002 ≡ ε_x = 0,2 %

comme les déformations sont très petites, on introduit une unité fictive : 1 µS = 10^{-6}

ε_x = 0,002 ≡ ε_x = 2.000 µS

$$1\,\mu S \equiv 10^{-6}$$

microstrain

strain ≡ déformation

Confusion de terminologie à éviter ...

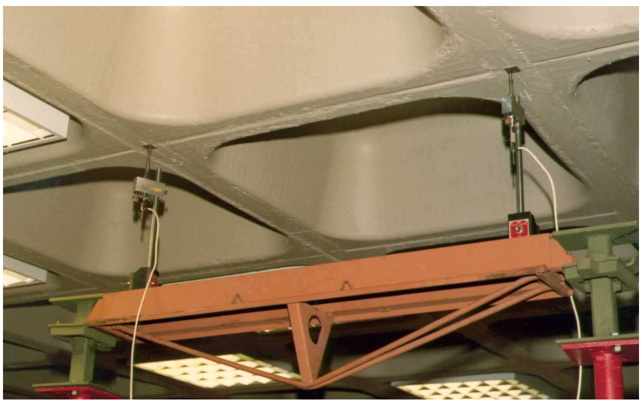
- les <u>déformations</u> sont caractérisées par un tenseur
- dans le langage courant, on parle de …

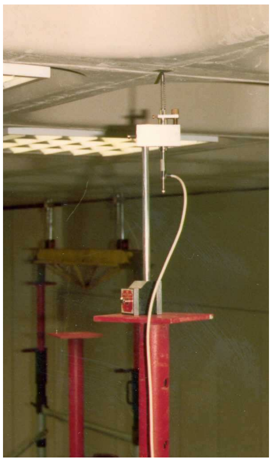
  "structure déformée" ou "la déformée de la structure"

  qui est la forme de la structure sous l'effet des <u>déplacements</u>
- les déplacements sont caractérisés par un <u>vecteur</u>

Mesures de déplacements

SNCB - Delta





Claude Pouillet

(1790 - 1868)

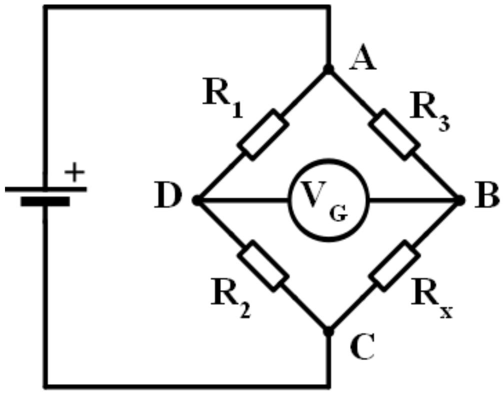
Mesures de déformations

pont de Wheatstone

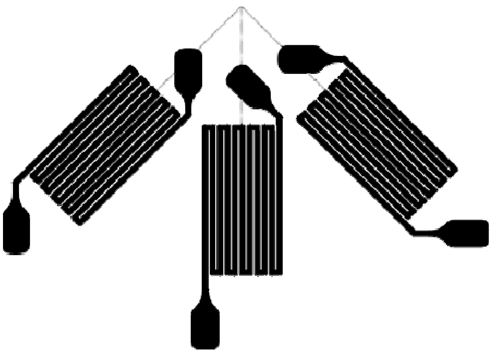
loi de Pouillet

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

$$R_x = \frac{R_2 \, R_3}{R_1}$$

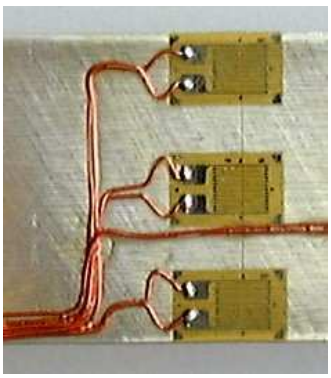


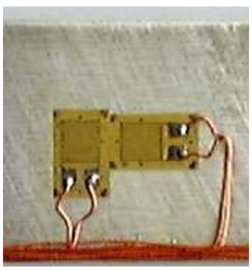
Mesures de déformations

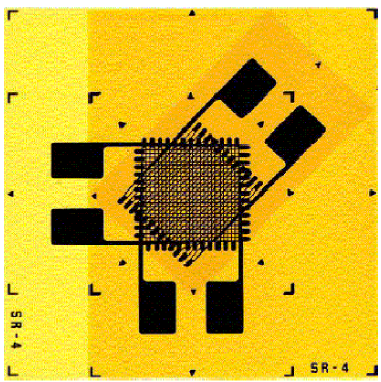


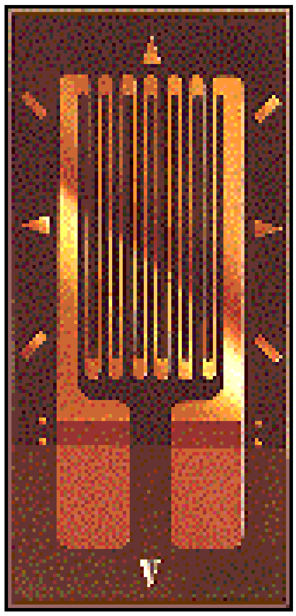
loi de Pouillet

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

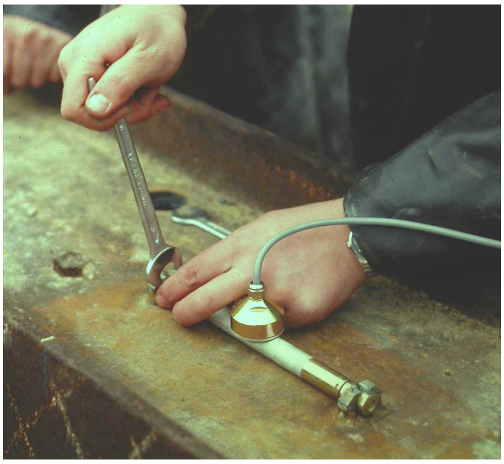








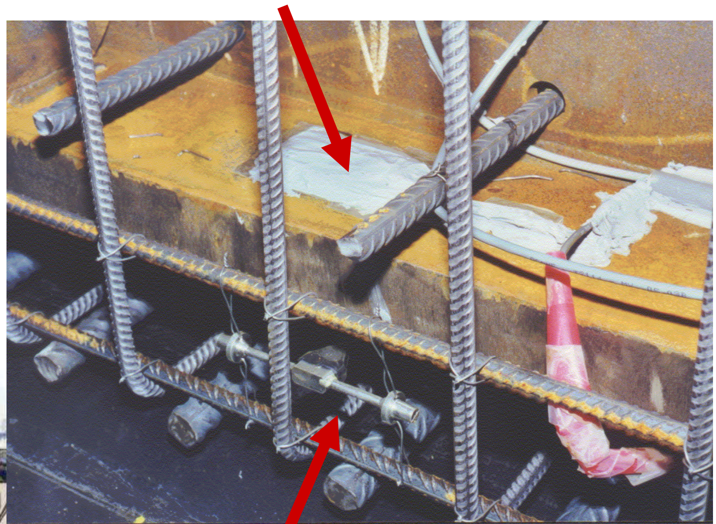
Mesures de déformations



chantier du métro à Saint-Gilles

Mesures de déformations

jauges de déformations



témoin sonore

viaduc TGV à Bruxelles-Midi

SERVICE CONSTRUCTION, ARCHITECTURE ET URBANISME
DEPARTMENT OF BUILDING, ARCHITECTURE AND TOWN PLANNING

Les lois universelles en mécanique des milieux continus

ULB

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

Les lois universelles sont ...

… des équations de bilan ou des équations de conservation

- conservation de la masse
  équation de continuité
- conservation de la quantité de mouvement
  équations du mouvement
- conservation du moment de la quantité de mouvement
  τ_{ij} est symétrique
- théorème de l'énergie cinétique et conservation de l'énergie

Conservation de la masse ...

forme intégrale de l'équation de continuité

à un instant t, un volume V contient une masse M

$$M = \int_V \rho \, dV$$

à tout instant ultérieur, ce volume contiendra toujours les mêmes particules massiques $\longrightarrow$ sa masse ne varie pas

$$M^\bullet = \int_V \left[\partial_0 \rho + \partial_i (\rho v_i) \right] dV = 0 \qquad \forall\, V$$

Conservation de la masse ...

$$M^\bullet = \int_V \left[\partial_0 \rho + \partial_i (\rho v_i) \right] dV = 0$$

forme locale de l'équation de continuité

on en déduit l'équation locale de conservation de la masse (équation de continuité)

$$\boxed{\partial_0 \rho + \partial_i (\rho v_i) = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \overline{v} = 0}$$

ou, en utilisant l'équation définissant la dérivée matérielle

$$\boxed{\rho^\bullet = \partial_0 \rho + v_k . \partial_k \rho}$$

$$\boxed{\rho^\bullet + \rho \, \partial_i v_i = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\rho^\bullet + \rho \operatorname{div} \overline{v} = 0}$$

181

Conservation de la masse ...

autre forme intégrale de l'équation de continuité

repartons de $$M^{\bullet} = \int_V \left[\, \partial_0 \rho + \partial_i (\rho v_i) \,\right] dV = 0$$

et appliquons le théorème de Gauss à la deuxième intégrale

$$\boxed{\int_V \left[\partial_0 \rho\right] dV + \oint_S \rho v_i n_i \, dS = 0}$$

vitesse d'accroissement de la masse dans le volume V due à la variation de ρ en fonction du temps

débit massique sortant au travers de la surface fermée S entourant le volume V

tout accroissement de masse ne peut provenir que d'un débit de masse entrant par S

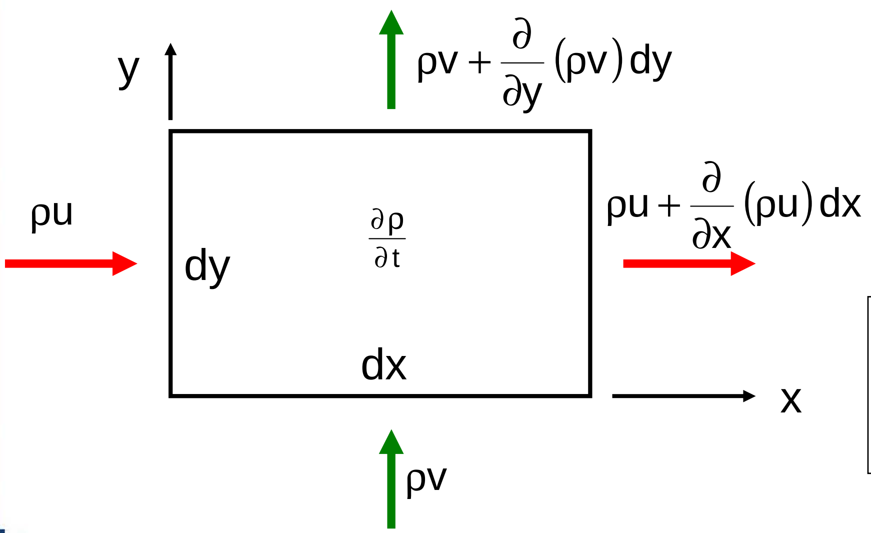
BATir

182

Conservation de la masse ...

qu'on retrouve facilement …. sur un rectangle élémentaire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy = \cancel{\rho u}\, dy + \cancel{\rho v}\, dx - \left(\cancel{\rho u} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u\, dx\right) dy - \left(\cancel{\rho v} + \frac{\partial}{\partial y} \rho v\, dy\right) dx$$



l'accroissement de masse provient du débit de masse entrant par S

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v = 0}$$

BATir

183

Conservation de la masse ...

cas particulier : fluide incompressible

le volume ne change pas au cours du temps
(il change de forme mais pas de "mesure")

comme il contient toujours la même masse, ρ reste constant en suivant les particules dans leur mouvement

donc $\dot{\rho} = 0$

$$\boxed{\cancel{\dot{\rho}} + \rho \, \mathrm{div} \, \overline{v} = 0} \qquad \boxed{\mathrm{div} \, \overline{v} = 0} \qquad v_{i,i} = 0$$

$$V_{ii} = 0$$

184

Conservation de la masse ...

cas particulier : écoulement permanent

un écoulement est permanent lorsque, en un point géométrique, les grandeurs ne varient pas en fonction du temps

donc $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\boxed{\cancel{\partial_0 \rho} + \partial_i (\rho v_i) = 0} \qquad \boxed{\partial_i (\rho v_i) = 0} \qquad \boxed{\mathrm{div} \, (\rho \overline{v}) = 0}$$

Conservation de la masse ...

cas particulier : écoulement permanent

$$\int_V \left[\partial_0 \rho\right] dV + \oint_S \rho\, v_i n_i \, dS = 0$$

$$\boxed{\oint_S \rho\, v_i n_i \, dS = 0}$$

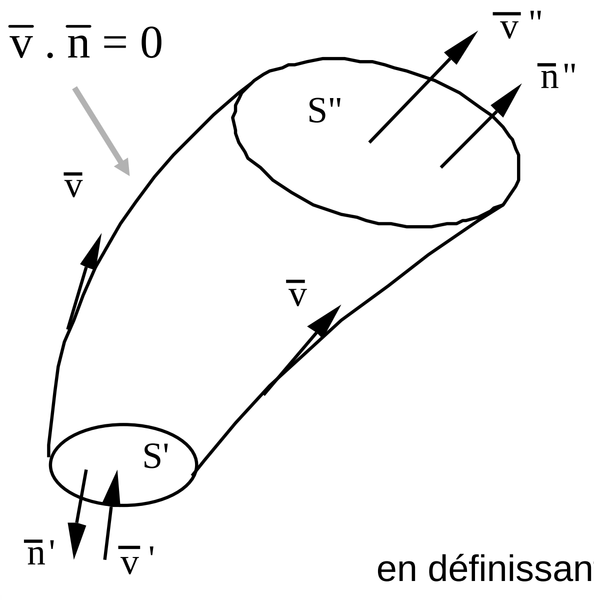
appliquons cette équation à un tube de courant

ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur une courbe fermée

en chaque point, la vitesse est tangente à la ligne de courant

Conservation de la masse ...

cas particulier : écoulement permanent dans un tube de courant



$$\boxed{\oint_S \rho\, v_i n_i \, dS = 0}$$

$$\int_{S'} \rho'\ \overline{v}'\, .\, \overline{n}'\, dS' + \int_{S''} \rho''\ \overline{v}''\, .\, \overline{n}''\, dS'' = 0$$

$$\boxed{\int_{S'} -\rho'\ v'_n\, dS' + \int_{S''} \rho''\ v''_n\, dS'' = 0}$$

en définissant $v'_n = -\,\overline{v}'\, .\, \overline{n}'$ et $v''_n = +\,\overline{v}''\, .\, \overline{n}''$

Conservation de la masse ...

la loi de la conservation de la masse n'est pas une loi universelle …

attention !

c'est la conservation de l'énergie qui est une loi universelle

$$E = mc^2$$

$$c \approx 3.10^8 \text{ m/s}$$

(300.000 km / s)

un ensemble de particules possède une énergie totale constituée :

- d'une énergie de masse
- d'une énergie cinétique
- d'une énergie potentielle
- d'une énergie de radiation

cf Prof. J.-M. Sparenberg - PHYS-H-200 Physique quantique et statistique

dans le cas de la mécanique rationnelle (et des milieux continus), les transferts masse ↔ énergie sont faibles

la valeur très élevée de c permet de dire que la masse est constante …

Loi de la résultante cinétique ...

$$\left[\int_V \rho\, v_i\, dV\right]^{\bullet} = \int_V f_i\, dV + \oint_S T_i^{(n)}\, dS$$

$$\int_V \left[\partial_0 (\rho\, v_i) + \partial_k (v_k\, \rho\, v_i)\right] dV = \int_V f_i\, dV + \oint_S \tau_{ij}\, n_j\, dS$$

Gauss

$$\boxed{\int_V \partial_0 (\rho\, v_i)\, dV = \int_V f_i\, dV + \oint_S (\tau_{ij} - \rho\, v_i\, v_j)\, n_j\, dS}$$

Loi de la résultante cinétique ...

application : calcul de l'action exercée par un fluide sur un obstacle

- sans devoir connaître la forme de l'obstacle
- sans devoir connaître la répartition du tenseur des contraintes sur l'obstacle

$$\boxed{A_i = \int_{\substack{\text{Surface}\\ \text{de contact}}} T_i^{(n)}\, dS}$$

$\bar{n}$ = normale intérieure au volume de fluide

$$\boxed{\int_V \partial_0 (\rho\, v_i)\, dV = \int_V f_i\, dV + \oint_S (\tau_{ij} - \rho\, v_i\, v_j)\, n_j\, dS}$$

il faut que la surface de contact fasse partie de la surface fermée entourant le volume de fluide .....

normale extérieure au volume de fluide !

Action exercée sur une portion de conduite ...

(5) $\int_{S''} \tau_{ij}\, n_j\, dS'' = \int_{S''} T_i^{(n)}\, dS''$ action traduite par le vecteur contrainte sur la section de sortie

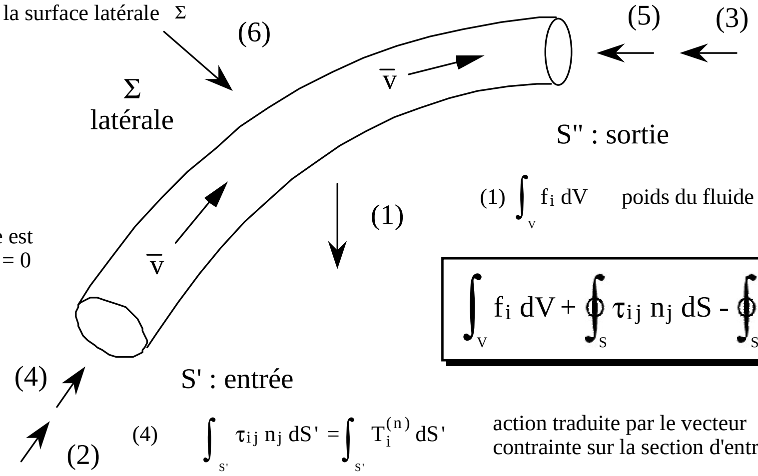
(3) $\int_{S''} [-\rho\, v_i\, v_j\, n_j]\, dS''$ contribution pour la surface de sortie vecteur "entrant" car $v_j\, n_j > 0$

$\int_\Sigma \tau_{ij}\, n_j\, d\Sigma = \int_\Sigma T_i^{(n)}\, d\Sigma$ action du conduit sur le fluide traduite par le vecteur contrainte sur la surface latérale Σ

(6)

$\int_\Sigma [-\rho\, v_i\, v_j\, n_j]\, d\Sigma = 0$

pas de contribution car la vitesse est tangente à la paroi et donc $v_j\, n_j = 0$



(1) $\int_V f_i\, dV$ poids du fluide contenu dans V

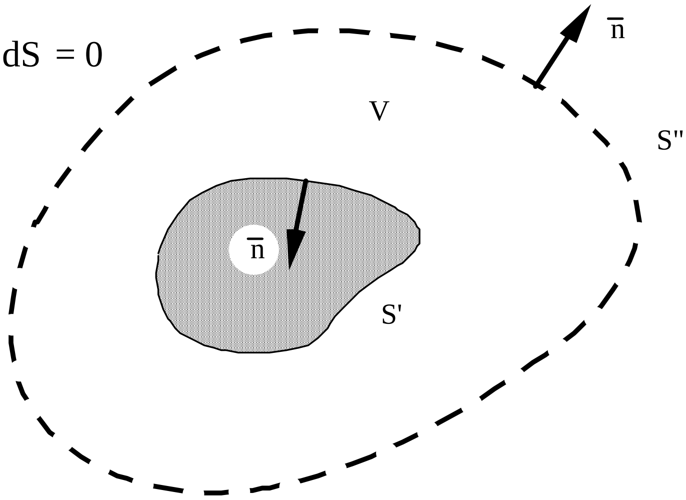
$$\boxed{\int_V f_i\, dV + \oint_S \tau_{ij}\, n_j\, dS - \oint_S \rho\, v_i\, v_j\, n_j\, dS = 0}$$

(4) $\int_{S'} \tau_{ij}\, n_j\, dS' = \int_{S'} T_i^{(n)}\, dS'$ action traduite par le vecteur contrainte sur la section d'entrée

(2) $\int_{S'} [-\rho\, v_i\, v_j\, n_j]\, dS'$ contribution pour la surface d'entrée vecteur "entrant" car $v_j\, n_j < 0$

Action exercée sur un obstacle immergé ...

$$\int_V f_i \, dV + \int_{S'+S''} \tau_{ij} \, n_j \, dS - \int_{S''} \rho \, v_i \, v_j \, n_j \, dS = 0$$



$\bar{n}$ = normale extérieure au volume de fluide

$$\boxed{A_i = -\int_{S'} \tau_{ij} \, n_j \, dS'}$$

$v_j \, n_j = 0$ sur S' (surface matérielle "imperméable")

$$\boxed{A_i = \int_V f_i \, dV + \int_{S''} \tau_{ij} \, n_j \, dS'' - \int_{S''} \rho \, v_i \, v_j \, n_j \, dS}$$

Portance d'un profil ...

lac de Côme (Italie)

Portance d'un profil ...

mer Adriatique (Croatie)

Loi du moment cinétique ...

pour rappel ...

$$\underbrace{\int_V (\bar{r} \times \bar{v})^{\bullet} \rho\, dV}_{\text{dérivée du moment cinétique}} = \underbrace{\int_V (\bar{r} \times \bar{f})\, dV}_{\text{moment des forces de volume}} + \underbrace{\oint_S (\bar{r} \times \bar{T}^{(n)})\, dS}_{\text{moment des forces de surface}}$$

permet de démontrer que le tenseur des contraintes est symétrique

Théorème de l'énergie cinétique ...

la dérivée de l'énergie cinétique est égale à la somme des puissances de toutes les forces (externes et internes)

on part des équations du mouvement

$$\rho \dot{v}_i = f_i + \partial_j \tau_{ji}$$

on multiplie scalairement par V_i et on intègre au volume V

$$\rho \dot{v}_i \, v_i = v_i f_i + v_i \partial_j \tau_{ji}$$

$$\frac{1}{2}\int_V \rho (v_i v_i)^{\bullet} \, dV = \int_V v_i f_i \, dV + \int_V v_i \partial_j \tau_{ji} \, dV$$

Théorème de l'énergie cinétique ...

$$\frac{1}{2}\int_V \rho (v_i v_i)^{\bullet} \, dV = \int_V v_i f_i \, dV + \int_V v_i \partial_j \tau_{ji} \, dV$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(\int_V \rho \, v^2 \, dV\right)^{\bullet}}_{K^{\bullet}}$$

$$\int_V \left[\partial_j (v_i \tau_{ij}) - \tau_{ij} (\partial_j v_i) \right] dV$$

$$\oint_S \left[(v_i \tau_{ij}) \, n_j \right] dS - \int_V \tau_{ij} V_{ij} \, dV$$

Théorème de l'énergie cinétique ...

$$\dot{K} = \int_V f_i\, v_i\, dV + \int_V \left[\partial_j \left(v_i\, \tau_{ij} \right) - \tau_{ij} \left(\partial_j v_i \right) \right] dV$$

$$\dot{K} = \int_V f_i\, v_i\, dV + \oint_S \left[\left(v_i\, \tau_{ij} \right) n_j \right] dS - \int_V \tau_{ij}\, V_{ij}\, dV$$

$$\boxed{\underbrace{\dot{K}}_{\text{dérivée de l'énergie cinétique}} = \underbrace{\int_V f_i\, v_i\, dV + \oint_S v_i\, T_i^{(n)}\, dS}_{\text{puissance des forces extérieures}} \underbrace{- \int_V \tau_{ij}\, V_{ij}\, dV}_{\text{puissance des forces intérieures}}}$$

dérivée de l'énergie cinétique

puissance des forces extérieures

puissance des forces intérieures

BATir

BATir

Service Construction, Architecture et Urbanisme
Department of Building, Architecture and Town Planning

Lois de comportement

lois constitutives

ULB
Université Libre de Bruxelles, Université d'Europe

Pourquoi des lois de comportement ?

a) **Décompte des équations et des inconnues**

il y a trop d'inconnues (déplacements, contraintes …)
et pas assez d'équations (équilibre, …)

b) **Liaison statique ↔ cinématique**

il faut lier les forces (appliquées)
aux déplacements (et aux conditions d'appui)

c) **Nature du milieu continu**

le comportement du chewing-gum
n'est pas le même que celui de l'acier

!

lois expérimentales

Pourquoi des lois de comportement ?

après avoir établi les équations générales valables pour tous les milieux continus, faisons le décompte

- **des équations**
- **des inconnues**

équations	nombre d'équations	inconnues	nombre d'inconnues
continuité $\dot{\rho} + \rho\, \partial_i v_i = 0$	**1**	ρ, v_i	**4**
mouvement $\left.\begin{array}{l} \rho \dot{v}_i = f_i + \tau_{ij,j} \\ \tau_{ij} = \tau_{ji} \end{array}\right\}$	**3**	$\tau_{(ij)}$	**6**
	4 équations		**10 inconnues**

Pourquoi des lois de comportement ?

- **4 équations**
- **10 inconnues**

il manque donc 6 équations pour résoudre le problème

ces 6 équations doivent lier des variables "cinématiques" à des variables "statiques"

- **τ_{ij} (contraintes) = fonction de L_{ij} (déformations)** ou a_{ij} si évanouissant
- **τ_{ij} (contraintes) = fonction de V_{ij} (vitesses de déformations)**

en tenant compte du comportement et des propriétés physiques du matériau

NB : on suppose que les comportements thermiques et mécaniques sont découplés : la température est supposée connue

Pourquoi des lois de comportement ?

attention au décompte !

équations	nombre d'équations		
continuité $\rho^{\bullet} + \rho\,\partial_i v_i = 0$	1		
mouvement $\left.\begin{array}{l}\rho v_i^{\bullet} = f_i + \tau_{ij,j} \\ \tau_{ij} = \tau_{ji}\end{array}\right\}$	3	$\tau_{(ij)}$	6
	4 équations		10 inconnues

les forces de volume f_i ne sont pas toujours connues

dans le cas des gaz, un même volume peut contenir plusieurs quantités différentes de masse (et donc de poids) … les composantes f_i sont donc inconnues

mais $f_i = \rho F_i$
(F_i = force par unité de masse = accélération)

F_i est connu et ρ a déjà été compté dans les inconnues

le décompte est donc correct dans tous les cas

203

Pourquoi des lois de comportement ?

2 grandes catégories

les fluides

exemples :

- **fluide parfait**
- **fluide visqueux newtonien**

$$\tau_{ij} = f(V_{kl})$$

vitesses de déformations

les solides

exemple :

- **le solide élastique**

$$\tau_{ij} = f(a_{kl})$$

déformations évanouissantes

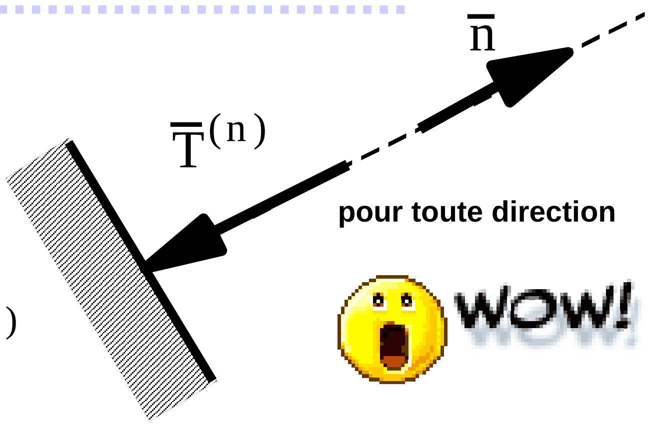
BATir

204

Le fluide parfait ...

la loi de comportement est : $\boxed{\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij}}$

$$T_i^{(n)} = \tau_{ij}\, n_j = -p\, n_i \qquad \text{ou} \qquad \overline{T}^{(n)} = -p\,\overline{n}$$

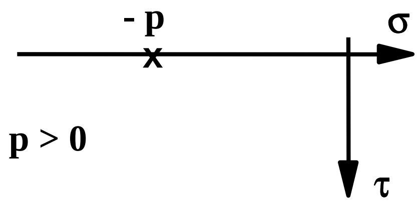


(dessin lorsque $p > 0$)

BATir

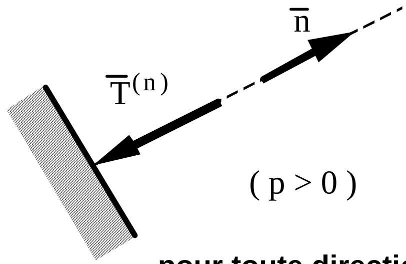
Le fluide parfait ...

$$\boxed{\tau_{ij} = -\,p\,\delta_{ij}}$$



$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix}$$

et le cercle de Mohr se réduit à un point



pour toute direction

le fluide ne transmet que des contraintes normales, jamais de contraintes tangentielles

Isaac Newton

(1643 - 1727)

Le fluide visqueux newtonien ...

on cherche à établir une loi de comportement de la forme

$$\tau_{ij} = f(V_{kl})$$

et on choisit d'établir une loi de dépendance de degré 1   ("linéaire")

$$\boxed{\tau_{ij} = C_{ij} + D_{ijkl} V_{kl}}$$

Le fluide visqueux newtonien ...

$$\tau_{ij} = C_{ij} + D_{ijkl} V_{kl}$$

et on suppose que le fluide est isotrope (propriétés indépendantes des axes), donc ...

$C_{ij} = \alpha\,\delta_{ij}$ **et** $D_{ijkl} = \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \beta\,\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \beta'\,\delta_{il}\,\delta_{jk}$

$$\tau_{ij} = \alpha\,\delta_{ij} + \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{kl}\,V_{kl} + \beta\,\delta_{ik}\,\delta_{jl}\,V_{kl} + \beta'\,\delta_{il}\,\delta_{jk}\,V_{kl}$$

$$\tau_{ij} = \alpha\,\delta_{ij} + \lambda\,\delta_{ij} V_{kk} + \underbrace{\beta V_{ij} + \beta' V_{ij}}_{V_{ij} = V_{ji}}$$

$$\boxed{\tau_{ij} = -\,p\,\delta_{ij} + \lambda\,\delta_{ij} V_{kk} + 2\,\mu\,V_{ij}}$$

avec $\alpha = -\,p$ et $2\,\mu = \beta + \beta'$

Le fluide visqueux newtonien ...

$$\boxed{\tau_{ij} = -\,p\,\delta_{ij} + \lambda\,\delta_{ij} V_{kk} + 2\,\mu\,V_{ij}}$$

la pression

coefficients de viscosité

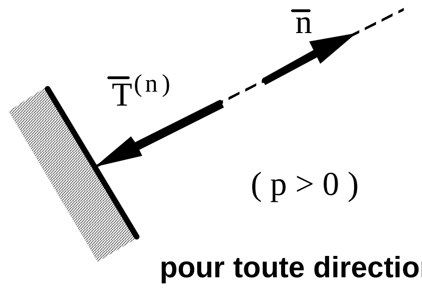
avec $$V_{ij} = v_{(i,j)} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)$$

Le fluide visqueux newtonien ...

$$\boxed{\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \lambda\,\delta_{ij} V_{kk} + 2\,\mu\,V_{ij}}$$

pour un fluide visqueux au repos ou en mouvement de corps rigide $V_{ij} = 0$

et donc $\boxed{\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij}}$

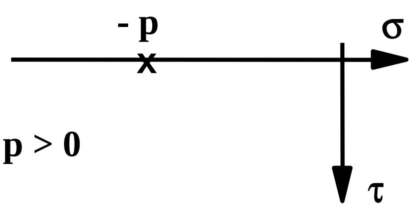


pour toute direction

$$T_i^{(n)} = \tau_{ij}\,n_j = -p\,n_i \qquad \text{ou} \qquad \overline{T}^{(n)} = -p\,\overline{n}$$

Le fluide visqueux newtonien ...

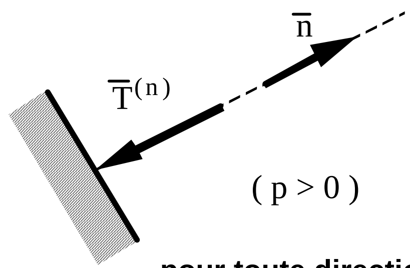
$$\boxed{\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij}}$$



$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix}$$

et le cercle de Mohr se réduit à un point

au repos ou en mouvement de corps rigide, le fluide ne transmet que des contraintes normales, pas de contraintes tangentielles



pour toute direction

George Stokes

(1819 - 1903)

Le fluide visqueux newtonien ...

les équations de <u>Stokes</u>

on part de

$$\boxed{\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \lambda\,\delta_{ij} V_{kk} + 2\,\mu\, V_{ij}}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}\tau_{kk} = -p + \frac{1}{3}\left(3\lambda + 2\mu\right) V_{kk}}$$

considérons un fluide incompressible :
sa masse volumique ne varie pas
au cours du temps, donc $\dot{\rho} = 0$

l'équation de continuité $\dot{\rho} + \rho\,\partial_i v_i = 0$ donne $V_{kk} = 0$

Le fluide visqueux newtonien ...

$V_{kk} = 0$ donc $\frac{1}{3}\tau_{kk} = -p + \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\cancel{V_{kk}}$

et $\frac{1}{3}\tau_{kk} = -p$

l'hypothèse de Stokes consiste à supposer que, même pour un fluide compressible

$\frac{1}{3}\tau_{kk} = -p \;\longrightarrow\; 3\lambda + 2\mu = 0$ soit $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{2}{3}$

et la loi de comportement devient (équation de Stokes)

$$\boxed{\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\,\mu\left(V_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} V_{kk}\right)}$$

L'équation d'état ...

dans $$\boxed{\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\,\mu\left(V_{ij} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,V_{kk}\right)}$$

la pression est une inconnue supplémentaire (ce n'est pas une caractéristique matérielle du fluide)

on a donc besoin d'une équation supplémentaire : l'équation d'état

température absolue

$$\boxed{F\left(\rho\,,\,p\,,\,\theta\right) = 0}$$

pour un gaz parfait : $$\boxed{\frac{p}{\rho} = R\,\theta}$$

la température est inconnue, on a donc besoin d'une équation supplémentaire : l'équation d'évolution

L'équation d'évolution ...

- **évolution isotherme :**

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = C^{ste}$$

- **évolution adiabatique**

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = C^{ste} \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Robert HOOKE

(1635 - 1703)

Le solide élastique linéaire ...

loi de Hooke

on souhaite que le problème soit linéaire … car …

- cela garantit l'<u>existence</u> de la solution
- cela garantit l'<u>unicité</u> de la solution
  (qui est donc indépendante de l'histoire d'application des forces)
- cela permet d'utiliser le "principe" de <u>superposition</u>
  (et de calculer séparément les solutions des différents cas de chargement)

pour assurer cette linéarité du problème,
<u>toutes</u> les relations doivent être linéaires

Le solide élastique linéaire ...

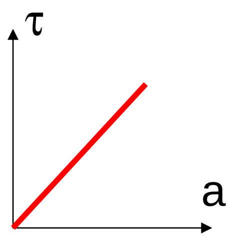
loi de Hooke

hypothèses (assurant la linéarité du problème)

- les déplacements sont petits
  le volume déformé est assimilable au volume initial
  (pour qu'il soit le même quelles que soient les forces appliquées)
- les relations déformations – déplacements sont linéaires
  les déformations doivent être évanouissantes

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

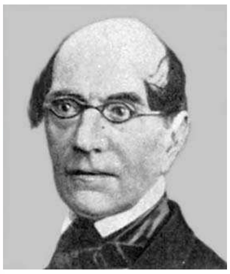
- les relations contraintes – déformations sont linéaires
  (de degré 1 homogène → existence d'un <u>état neutre</u>)



$\boxed{\text{forces nulles} \leftrightarrow \text{contraintes nulles} \leftrightarrow \text{déplacements nuls} \leftrightarrow \text{déformations nulles}}$

217

Gabriel Lamé



(1795 - 1870)

Le solide élastique linéaire ...

loi de Hooke (1[ère] méthode)

$$\tau_{ij} = B_{ijkl}\, a_{kl}$$

si le solide est isotrope $B_{ijkl} = \alpha\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \beta\, \delta_{ik}\, \delta_{jl} + \gamma\, \delta_{il}\, \delta_{jk}$

et donc $\tau_{ij} = \alpha\, \delta_{ij}\, a_{kk} + \beta\, a_{ij} + \gamma\, a_{ji}$

ou, autrement $\boxed{\tau_{ij} = 2\mu\, a_{ij} + \lambda\, \delta_{ij}\, a_{kk}}$

λ et μ : constantes de **Lamé**

la loi de comportement ne dépend donc que de 2 constantes

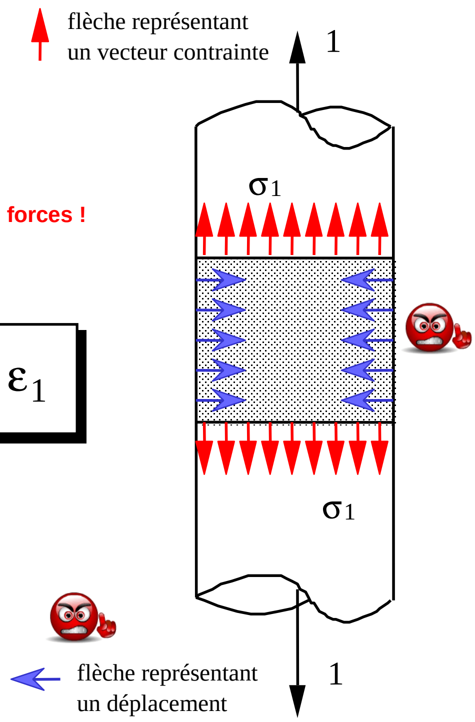
218

Thomas Young

(1773 - 1829)

Le solide élastique linéaire ...

loi de Hooke (2[ème] méthode)



considérons une éprouvette cylindrique sollicitée par une force de traction selon son axe (1)

NB : 2 forces !

Il apparaît selon l'axe 1 des contraintes σ_1 et des déformations ε_1 liées par

$$\boxed{\sigma_1 = E\, \varepsilon_1}$$

E >0 module de Young

les autres τ_{ij} sont nuls $\Rightarrow$ 1 est une direction principale du tenseur des contraintes

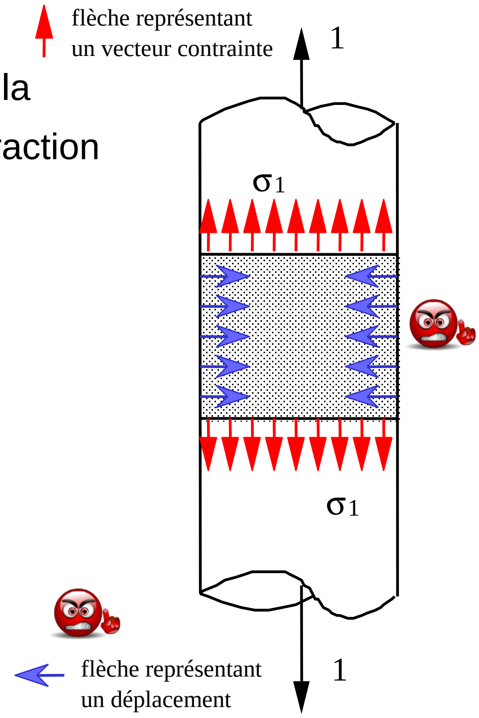
par raison de symétrie, 1 est aussi une direction principale du tenseur des déformations

Denis Poisson

(1781 - 1840)

Le solide élastique linéaire ...

l'expérience montre que, en plus de la déformation ε_1, il apparaît une contraction latérale proportionnelle à σ_1



$$\boxed{\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 = -\nu\,\varepsilon_1}$$

ou

$$\boxed{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\nu \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = -\nu}$$

ν = coefficient de Poisson $\quad 0 \leq \nu \leq 0{,}5$

BATir

Le solide élastique linéaire ...

la contrainte principale σ_1 provoque les déformations

$$\varepsilon'_1 = \frac{1}{E}\sigma_1 \quad ; \quad \varepsilon'_2 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 \quad ; \quad \varepsilon'_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1$$

la contrainte principale σ_2 provoque les déformations

$$\varepsilon''_1 = -\frac{\nu}{E}\sigma_2 \quad ; \quad \varepsilon''_2 = \frac{1}{E}\sigma_2 \quad ; \quad \varepsilon''_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_2$$

la contrainte principale σ_3 provoque les déformations

$$\varepsilon'''_1 = -\frac{\nu}{E}\sigma_3 \quad ; \quad \varepsilon'''_2 = -\frac{\nu}{E}\sigma_3 \quad ; \quad \varepsilon'''_3 = \frac{1}{E}\sigma_3$$

BATir

Le solide élastique linéaire ...

si on procède par permutation des axes (principaux) 1, 2, 3 et si on somme les effets, on trouve

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\,(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu\,(\sigma_3 + \sigma_1) \right] \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu\,(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \end{cases}$$

ou, en notations tensorielles (et valable dans des axes quelconques)

$$\boxed{a_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\,\tau_{ij} - \nu\,\delta_{ij}\,\tau_{kk} \right]}$$

Le solide élastique linéaire ...

il y a donc 2 constantes élastiques caractérisant le matériau : E et ν

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\,(\sigma_y + \sigma_z) \right] \quad ; \quad \ldots$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{E}\,(1+\nu)\,\tau_{xy} \quad ; \quad \ldots$$

ou $\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\,\tau_{xy}$ avec $G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$ module de glissement

Le solide élastique linéaire ...

comment inverser cette relation ?

$$a_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\tau_{ij} - \nu\,\delta_{ij}\,\tau_{kk} \right]$$

calculons a_{ss} pour en tirer τ_{ss}

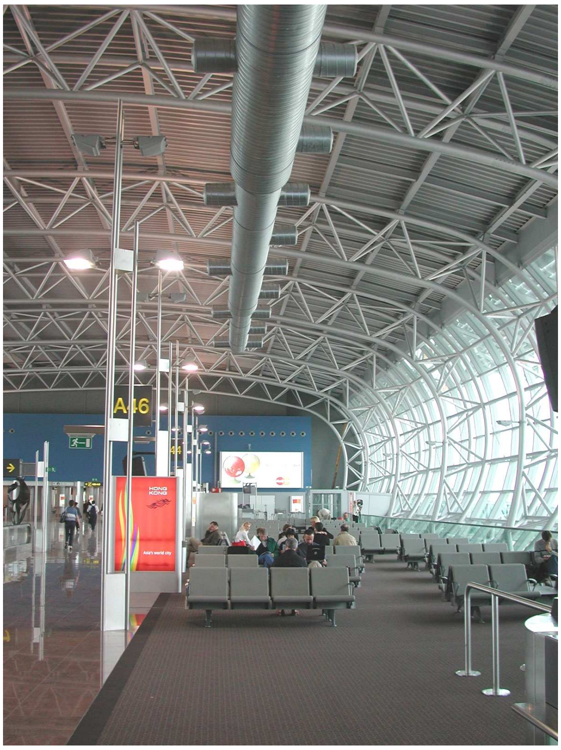
$$a_{ss} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\tau_{ss} - \nu\,\delta_{ss}\,\tau_{kk} \right]$$

ou $a_{ss} = \dfrac{1-2\nu}{E}\,\tau_{ss}$ et donc $\tau_{kk} = \dfrac{E}{1-2\nu}\,a_{kk}$

$$\boxed{\tau_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left[a_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\delta_{ij}\,a_{kk} \right]}$$

Aéroport de Zaventem

nouvelle jetée A



Station de métro à Erasme ...

SAMYN and PARTNERS
architects and engineers

BATir

BATir

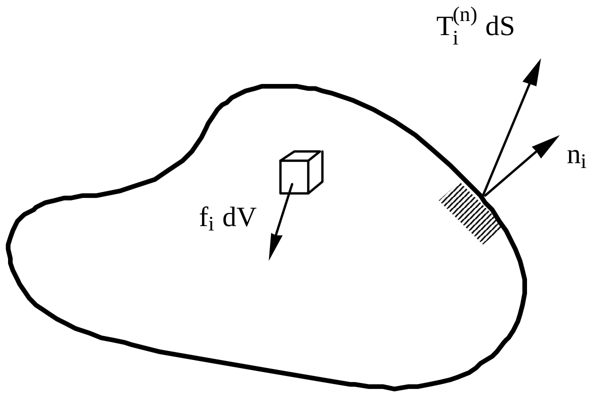
Service Construction, Architecture et Urbanisme
Department of Building, Architecture and Town Planning

Théorèmes des travaux virtuels

ULB

Université Libre de Bruxelles, Université d'Europe

Problème à résoudre ...



f_i **forces de volume**

$T_i^{(n)}$ **forces de surfaces associées à** $\bar{n}$

u_i **déplacements résultant de ces forces**

τ_{ij} **contraintes résultant de ces forces**

$T_i^{(n)}$ dS

f_i dV

Equations à résoudre ...

- **équations d'équilibre en volume**
  - **translation** $\boxed{\tau_{ij,j} + f_i = 0}$
  - **rotation** $\boxed{\tau_{[ij]} = 0 \quad \text{ou} \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}}$
- **équations d'équilibre en surface** $\boxed{T_i^{(n)} = \tau_{ij}\, n_j}$
- **loi de comportement**
  - lie les déformations aux contraintes
- **équations de compatibilité**
  - expriment que les composantes des tenseurs de déformations sont obtenues à partir des dérivées des composantes du vecteur déplacement
  - sont satisfaites d'office lorsque les fonctions de base sont les déplacements (on en déduit alors les déformations)
  - doivent être prises en compte lorsque les inconnues de base sont les déformations (on en déduit alors les déplacements)

Pourquoi les théorèmes des travaux virtuels ?

ou " théorèmes énergétiques "

- impossibilité de trouver des solutions analytiques ⟶ méthodes approchées particulières pour chaque type d'application
- application plus facile qu'une méthode particulière (déplacements de quelques points, …)
- formulation générale indépendante du domaine d'application (élasticité linéaire, poutres, plaques, coques, …)
- la base du développement de méthodes numériques de calcul par ordinateur (méthode des éléments finis, …)

L'histoire en bref ...

- 287 – 212 BC Archimède : 1ère notion de "travail"
- 15ème siècle Léonard de Vinci utilise la notion de "travail"
- 1594 Galilée
- 1717 Jean Bernoulli formule le 1er théorème de travaux virtuels
- 18ème siècle Euler formule l'énergie de déformation
- 1852 Lamé formule le théorème de … Clapeyron
- 1923 article de Courant (~ éléments finis) resté sans suite, faute de moyen de calculs
- 1956 méthode des éléments finis développée grâce à l'apparition des ordinateurs

Grandeurs réelles, grandeurs virtuelles …

- **GRANDEURS REELLES :**

  les grandeurs (forces, déplacements, contraintes, ...) réellement appliquées au milieu ou subies par le milieu continu étudié

- **GRANDEURS VIRTUELLES :**

  des grandeurs arbitraires choisies judicieusement en fonction de ce que l'on veut calculer (éventuellement soumises à des conditions)

Travail virtuel des forces extérieures …

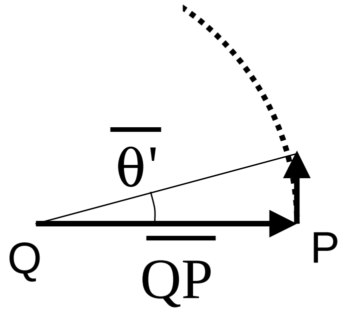
- **on considère deux ensembles :**
  - **virtuel : déplacements** .... u'_i
  - **réel : forces de volume et de surface** .... $f_i \, dV$ .... $T_i^{(n)} \, dS$
- **on définit le travail virtuel des forces extérieures**

$$\boxed{T'_{ext} \equiv \int_V f_i \, u'_i \, dV + \oint_S T_i^{(n)} \, u'_i \, dS}$$

Calculs préliminaires ...

On restreint les déplacements virtuels à des déplacements infinitésimaux de corps indéformable

$$\overline{u'}_P = \overline{u'}_Q + \overline{\theta'} \times \overline{QP}$$



la rotation DOIT être infinitésimale pour pouvoir être exprimée sous la forme d'un produit vectoriel !

$$T'_{ext} \equiv \int_V \overline{f}.\overline{u'}_P \, dV + \oint_S \overline{T}^{(n)}.\overline{u'}_P \, dS$$

$$T'_{ext} \equiv \int_V \overline{f}.\left(\overline{u'}_Q + \overline{\theta'} \times \overline{QP}\right) dV + \oint_S \overline{T}^{(n)}.\left(\overline{u'}_Q + \overline{\theta'} \times \overline{QP}\right) dS$$

Calculs préliminaires ...

$$T'_{ext} \equiv \int_V \overline{f}.\left(\overline{u'}_Q + \overline{\theta'} \times \overline{QP}\right) dV + \oint_S \overline{T}^{(n)}.\left(\overline{u'}_Q + \overline{\theta'} \times \overline{QP}\right) dS$$

$$T'_{ext} \equiv \overline{u'}_Q.\left[\int_V \overline{f} \, dV + \oint_S \overline{T}^{(n)} dS\right] + \overline{\theta'}.\left[\int_V \left(\overline{QP} \times \overline{f}\right) dV + \oint_S \left(\overline{QP} \times \overline{T}^{(n)}\right) dS\right]$$

$$\overline{R} = \left[\int_V \overline{f} \, dV + \oint_S \overline{T}^{(n)} dS\right]$$ = résultante des forces

$$\overline{C}_Q = \left[\int_V \left(\overline{QP} \times \overline{f}\right) dV + \oint_S \left(\overline{QP} \times \overline{T}^{(n)}\right) dS\right]$$

= moment résultant des forces par rapport au point Q

$$\boxed{T'_{ext} \equiv \overline{u'}_Q . \overline{R} + \overline{\theta'}. \overline{C}_Q}$$

Le théorème ...

Le théorème des travaux virtuels pour des
déplacements infinitésimaux de corps indéformable

$$T'_{ext} \equiv \overline{u'_Q}\,.\overline{R} + \overline{\theta'}.\,\overline{C}_Q$$

1. A l'équilibre,
2. le travail virtuel des forces extérieures
3. est nul
4. pour tout déplacement virtuel <u>infinitésimal</u> de corps indéformable

et réciproquement …

Le théorème direct ...

Le théorème des travaux virtuels pour des
déplacements infinitésimaux de corps indéformable

$$T'_{ext} \equiv \overline{u'_Q}\,.\overline{R} + \overline{\theta'}.\,\overline{C}_Q$$

Si … on est à l'équilibre

Alors … le travail virtuel des forces extérieures est nul
pour tout déplacement virtuel <u>infinitésimal</u>
de corps indéformable

équilibre $\Rightarrow$ $\overline{R} = 0$ et $\overline{C}_Q = 0$ $\Rightarrow$ $T'_{ext} = 0$

quel que soit le déplacement virtuel infinitésimal de corps indéformable

Le théorème réciproque ...

Le théorème des travaux virtuels pour des
déplacements infinitésimaux de corps indéformable

Si … le travail virtuel des forces extérieures est nul pour tout déplacement virtuel <u>infinitésimal</u> de corps indéformable

Alors … on est à l'équilibre

$$T'_{ext} = 0 \implies \boxed{\overline{u'}_Q . \overline{R} + \overline{\theta'} . \overline{C}_Q = 0} \quad \text{pour tout } \overline{u'}_Q \quad \overline{\theta'}$$

Le théorème réciproque ...

Le théorème des travaux virtuels pour des
déplacements infinitésimaux de corps indéformable

$$T'_{ext} = 0 \implies \boxed{\overline{u'}_Q . \overline{R} + \overline{\theta'} . \overline{C}_Q = 0} \quad \text{pour tout } \overline{u'}_Q \quad \overline{\theta'}$$

- choisissons une translation virtuelle quelconque

$$\overline{u'}_Q . \overline{R} + \overline{\theta'} . \overline{C}_Q = 0 \qquad \overline{\theta'} = 0 \implies \overline{R} = 0$$

- choisissons une rotation virtuelle quelconque

$$\overline{u'}_Q . \overline{R} + \overline{\theta'} . \overline{C}_Q = 0 \qquad \overline{u'}_Q = 0 \implies \overline{C}_Q = 0$$

nb : on PEUT choisir car le théorème dit "pour tout déplacement …"

239

Travail virtuel des forces intérieures ?

- on considère deux ensembles :
  - virtuel : déplacements .... u'_i
  - réel : forces de volume et de surface .... $f_i\, dV$ .... $T_i^{(n)}\, dS$

- on suppose que l'équilibre est satisfait en surface

$$T_i^{(n)} = \tau_{ij}\, n_j$$

BATir

240

Calculs préliminaires ...

calculons le travail virtuel des forces extérieures

par définition $\quad T'_{ext} \equiv \int_V f_i\, u'_i\, dV + \oint_S T_i^{(n)}\, u'_i\, dS$

développons l'intégrale de surface et utilisons le théorème de Gauss

$$\oint_S T_i^{(n)}\, u'_i\, dS = \oint_S \tau_{ij}\, n_j\, u'_i\, dS = \int_V \partial_j\left(\tau_{ij}\, u'_i\right) dV$$

$$\partial_j\left(\tau_{ij}\, u'_i\right) = \tau_{ij,j}\, u'_i + \tau_{ij}\, u'_{i,j} = \tau_{ij,j}\, u'_i + \tau_{ij}\, u'_{(i,j)} + \tau_{ij}\, u'_{[i,j]}$$

et notons .... $\mathbf{a'_{ij} \equiv u'_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}\left(u'_{i,j} + u'_{j,i}\right)}$

$$\mathbf{T'_{ext} \equiv \int_V f_i\, u'_i\, dV + \int_V [\ \tau_{ij,j}\, u'_i + \tau_{ij} a'_{ij} + \tau_{ij} u'_{[i,j]}\ ]\, dV}$$

BATir

Calculs préliminaires ...

$$T'_{ext} = \int_V f_i\ u'_i\ dV + \int_V [\ \tau_{ij,j}\ u'_i + \tau_{ij} a'_{ij} + \tau_{ij} u'_{[i,j]}\ ]\ dV$$

et, en ordonnant les termes

$$T'_{ext} = \int_V \left(\tau_{ij,j} + f_i\right) u'_i\ dV + \int_V \tau_{ij}\ u'_{[i,j]}\ dV + \int_V \tau_{ij}\ a'_{ij}\ dV$$

et, s'il y a équilibre

$$T'_{ext} = \int_V \cancel{\left(\tau_{ij,j} + f_i\right)} u'_i\ dV + \int_V \cancel{\tau_{ij}\ u'_{[i,j]}}\ dV + \int_V \tau_{ij}\ a'_{ij}\ dV$$

éq. translation
en volume

éq. rotation
en volume

Calculs préliminaires ...

s'il y a équilibre, il reste pour des déplacements virtuels quelconques

$$\boxed{T'_{ext} = \int_V \tau_{ij}\ a'_{ij}\ dV}$$

conduisant naturellement à définir
le travail virtuel des forces intérieures

$$\boxed{T'_{int} \equiv - \int_V \tau_{ij}\ a'_{ij}\ dV}$$

et le travail virtuel total

car, à l'équilibre T'_{tot} sera nul

$$\boxed{T'_{tot} \equiv T'_{ext} + T'_{int}}$$

Terminologie ...

NEW!

travail virtuel interne

- nous avons défini le travail virtuel interne par $T'_{int} \equiv - \int_V \tau_{ij}\, a'_{ij}\, dV$

  conduisant au travail virtuel total et au théorème général

$$T'_{tot} \equiv T'_{ext} + T'_{int}$$

$$\boxed{T'_{tot} = 0}$$

- on définit parfois aussi le travail virtuel interne par $T'_{int} \equiv + \int_V \tau_{ij}\, a'_{ij}\, dV$

  conduisant au théorème général

$$\boxed{T'_{ext} = T'_{int}}$$

Travail virtuel total ...

- on considère deux ensembles :
  - virtuel : déplacements .... u'_i
  - réel : forces de volume et de surface .... $f_i\, dV$ .... $T_i^{(n)}\, dS$
- on reprend la définition du travail virtuel total

$$\boxed{T'_{tot} \equiv T'_{ext} + T'_{int}}$$

$$T'_{tot} \equiv \overbrace{\int_V f_i\, u'_i\, dV + \oint_S T_i^{(n)}\, u'_i\, dS}\; \overbrace{- \int_V \tau_{ij}\, a'_{ij}\, dV}$$

Calculs préliminaires ...

$$T'_{tot} \equiv \int_V f_i\, u'_i\, dV + \oint_S T_i^{(n)}\, u'_i\, dS - \int_V \tau_{ij}\, a'_{ij}\, dV$$

transformons la dernière intégrale

$$\begin{aligned}\tau_{ij}\, a'_{ij} &= \tau_{ij}\, u'_{(i,j)} \\ &= \tau_{ij}\, u'_{i,j} - \tau_{ij}\, u'_{[i,j]} \\ &= \partial_j(\tau_{ij}\, u'_i) - \tau_{ij,j}\, u'_i - \tau_{ij}\, u'_{[i,j]}\end{aligned}$$

et donc, en appliquant le théorème de Gauss et en groupant les termes

$$\boxed{T'_{tot} \equiv \int_V \left(\tau_{ij,j} + f_i\right) u'_i\, dV + \oint_S \left(T_i^{(n)} - \tau_{ij}\, n_j\right) u'_i\, dS + \int_V \tau_{ij}\, u'_{[i,j]}\, dV}$$

Le théorème ...

Le théorème des travaux virtuels pour des
déplacements quelconques

1. **A l'équilibre,**
2. **le travail virtuel total**
3. **est nul**
4. **pour tout déplacement virtuel**

et réciproquement ...

Le théorème direct ...

Le théorème des travaux virtuels pour des
déplacements quelconques

Si … on est à l'équilibre

Alors … le travail virtuel total est nul pour tout déplacement virtuel

$$T'_{tot} \equiv \int_V \left(\tau_{ij,j} + f_i\right) u'_i \, dV + \oint_S \left(T_i^{(n)} - \tau_{ij}\, n_j\right) u'_i \, dS + \int_V \tau_{ij}\, u'_{[i,j]} \, dV$$

équilibre de
translation en volume

équilibre de
translation en surface

équilibre de
rotation en volume

$\Longrightarrow$ $T'_{tot} = 0$ quel que soit le déplacement virtuel

Le théorème réciproque ...

Le théorème des travaux virtuels pour des
déplacements quelconques

Si … le travail virtuel total est nul pour tout déplacement virtuel

Alors … on est à l'équilibre

$T'_{tot} = 0$

$$\int_V \left(\tau_{ij,j} + f_i\right) u'_i \, dV + \oint_S \left(T_i^{(n)} - \tau_{ij}\, n_j\right) u'_i \, dS + \int_V \tau_{ij}\, u'_{[i,j]} \, dV = 0$$

pour tout u'_i

Le théorème réciproque ...

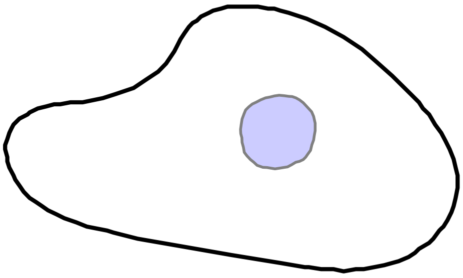
Le théorème des travaux virtuels pour des déplacements quelconques

$$\int_V \left(\tau_{ij,j} + f_i\right) u'_i \, dV + \cancel{\oint_S \left(T_i^{(n)} - \tau_{ij}\, n_j\right) u'_i \, dS} + \cancel{\int_V \tau_{ij}\, u'_{[i,j]} \, dV} = 0$$

pour tout u'_i

A. **choisissons une translation virtuelle nulle partout en volume et en surface, sauf sur une petite portion de volume où on choisit une constante.**

faisons varier cette constante
faisons "balader" cette portion de volume



$$\left(\tau_{ij,j} + f_i\right) = 0$$

nb : on PEUT choisir car le théorème dit "pour tout déplacement …"

Le théorème réciproque ...

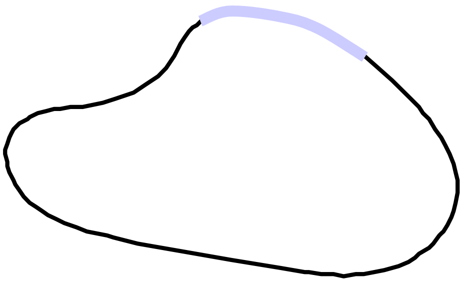
Le théorème des travaux virtuels pour des déplacements quelconques

$$\overset{\text{A}}{\cancel{\int_V \left(\tau_{ij,j} + f_i\right) u'_i \, dV}} + \oint_S \left(T_i^{(n)} - \tau_{ij}\, n_j\right) u'_i \, dS + \cancel{\int_V \tau_{ij}\, u'_{[i,j]} \, dV} = 0$$

pour tout u'_i

B. **choisissons une translation virtuelle nulle partout en volume et en surface, sauf sur une petite portion de surface où on choisit une constante.**

faisons varier cette constante
faisons "balader" cette portion de surface



$$\left(T_i^{(n)} - \tau_{ij}\, n_j\right) = 0$$

nb : on PEUT choisir car le théorème dit "pour tout déplacement …"

Le théorème réciproque ...

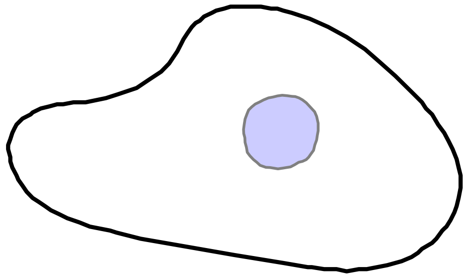
Le théorème des travaux virtuels pour des
déplacements quelconques

$$\int_V \overbrace{\cancel{\left(\tau_{ij,j} + f_i\right)}}^{A} u'_i \, dV + \oint_S \overbrace{\cancel{\left(T_i^{(n)} - \tau_{ij} n_j\right)}}^{B} u'_i \, dS + \int_V \tau_{ij} \, u'_{[i,j]} \, dV = 0$$

pour tout u'_i

C. **choisissons un déplacement nul partout en volume et en surface, sauf sur une petite portion de volume où on le choisit quelconque.**

faisons "balader" cette portion de volume



$$\tau_{ij} \, u'_{[i,j]} = 0$$

τ_{ij} est symétrique

nb : on PEUT choisir car le théorème dit "pour tout déplacement …"

Les deux théorèmes ...

1. **A l'équilibre,**
2. **le travail virtuel des forces extérieures**
3. **est nul**
4. **pour tout déplacement virtuel <u>infinitésimal</u> de corps indéformable**

et réciproquement ...

1. **A l'équilibre,**
2. **le travail virtuel total**
3. **est nul**
4. **pour tout déplacement virtuel**

et réciproquement ...

Domaines de validité des théorèmes ...

les déplacements virtuels

- **déplacements de corps indéformable :**
  doivent être infinitésimaux → les rotations s'expriment à l'aide d'un produit vectoriel → fera apparaître le moment des forces → exprimer l'équilibre de rotation

$$\overline{u'}_P = \overline{u'}_Q + \overline{\theta'} \text{ x } \overline{QP} \longrightarrow \overline{C}_Q = \left[\int_V \left(\overline{QP} \text{ x } \overline{f} \right) dV + \oint_S \left(\overline{QP} \text{ x } \overline{T}^{(n)} \right) dS \right]$$

- **déplacements de corps indéformable ≡ de corps rigide**
  toujours infinitésimaux

Domaines de validité des théorèmes ...

les déplacements virtuels

- **déplacements quelconques :**
  ne doivent PAS être infinitésimaux

  mais dans tous les cas, on a $T'_{int} \equiv - \int_V \tau_{ij}\, a'_{ij}\, dV$

  avec $a'_{ij} \equiv u'_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}\left(u'_{i,j} + u'_{j,i} \right)$ **même si les déplacements sont grands**

Domaines de validité des théorèmes ...

les déplacements virtuels

- sont choisis en fonction de ce qu'on veut calculer à l'aide du théorème …
- ne doivent pas respecter les liaisons …
  … sauf si on veut calculer une réaction de liaison
  (il faut alors la faire travailler)

Domaines de validité des théorèmes ...

la loi de comportement

- la loi de comportement n'intervient PAS dans les théorèmes

  ils ne sont donc pas limités au cas du solide linéaire élastique !

Domaines de validité des théorèmes ...

les domaines d'intégration

- les domaines d'intégration (V et S) sont ceux occupés effectivement par le milieu continu auquel on applique les théorèmes

  en général, ces domaines sont inconnus !

- si les déplacements sont petits,
  on peut assimiler V et S à V_0 et S_0 (non déformés $\rightarrow$ connus)

- utilisation du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff pour intégrer sur les domaines non déformés (V_0 et S_0) ....

BATir

SERVICE CONSTRUCTION, ARCHITECTURE ET URBANISME
DEPARTMENT OF BUILDING, ARCHITECTURE AND TOWN PLANNING

Statique des fluides

ULB
UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

Equations générales ...

- **équation de continuité** $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i (\rho \, v_i) = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ v_i = 0 \end{array} \right.$

  identiquement satisfaite

- **équations d'équilibre** $\tau_{ij,j} + f_i = 0$ **avec τ_{ij} symétrique**

- **loi de comportement** $\tau_{ij} = - p \, \delta_{ij}$ **pas d'influence de la viscosité !**

- **équation d'état** $F (\rho , p , \theta) = 0$ **forme générale**

  θ = température absolue

Equations générales ...

- **Sans faire plus d'hypothèses, on trouve :**

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{ij,j} + f_i = 0 \\ \tau_{ij} = - p \, \delta_{ij} \end{array} \right\} \quad - \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + f_i = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i$$

pour pouvoir atteindre un équilibre, les forces de volume ne peuvent pas être quelconques !

$$\boxed{\bar{f} = \overline{\text{grad}}\, p} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\text{rot}}\, \bar{f} = 0$$

Equations générales ...

- **Avec la définition des forces par unité de masse**

$$\bar{f}\, dV = \bar{F}\, dm = \bar{F}\, \rho\, dV \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{f_i = \rho\, F_i}$$

la condition $\overline{rot}\, \bar{f} = 0$ **s'écrit**

$$\overline{rot}\, (\rho\, \bar{F}) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \delta_{ijk}\, \partial_j\, (\rho\, F_k) = 0$$

$$\delta_{ijk} F_k\, \partial_j \rho + \delta_{ijk}\, \rho\, \partial_j F_k = 0$$

$$\overline{grad}\, \rho \times \bar{F} + \rho\, \overline{rot}\, \bar{F} = 0$$

Equations générales ...

Considérons le cas le plus fréquent
où les forces massiques dérivent d'un potentiel $\bar{F} = -\overline{grad}\, U$

exemple : le cas de la pesanteur

$$\bar{f} = -\rho\, g\, \bar{1}_z \qquad \text{(axe z vertical, positif vers le haut)}$$

$$\bar{F} = -g\, \bar{1}_z$$

$$\boxed{U = g\, z} \qquad \text{car} \qquad -g\, \bar{1}_z = -\overline{grad}\, U$$

263

Equations générales ...

- **Dans le cas où les forces massiques dérivent d'un potentiel**

$$\overline{F} = -\,\overline{\text{grad}}\,U \longrightarrow \overline{\text{rot}}\,\overline{F} = 0$$

$$\overline{\text{grad}}\,\rho \times \overline{F} + \rho\,\overline{\text{rot}}\,\overline{F} = 0$$

$$\overline{F} \times \overline{\text{grad}}\,\rho = 0$$

$\overline{F}$ est donc parallèle à $\overline{\text{grad}}\,\rho$

les surfaces $\rho = C^{ste}$ sont des surfaces $U = C^{ste}$

BATir

264

Equations générales ...

les équations d'équilibre $\quad \overline{f} = \overline{\text{grad}}\,p \qquad \overline{F} = -\,\overline{\text{grad}}\,U$

donnent $\quad \boxed{\rho\,\overline{F} = \overline{\text{grad}}\,p} \Rightarrow \boxed{-\rho\,\overline{\text{grad}}\,U = \overline{\text{grad}}\,p}$

les surfaces $U = C^{ste}$ sont des surfaces $p = C^{ste}$

et comme les surfaces $\rho = C^{ste}$ sont des surfaces $U = C^{ste}$

p = fonction (U)
ρ = fonction (U)

et, avec l'équation d'état $F(\rho, p, \theta) = 0$

$\boxed{p = p(U)}$ et $\boxed{\rho = \rho(U)}$ et $\boxed{\theta = \theta(U)}$

BATir

Equations générales ...

$\boxed{p = p(U)}$ **donne** $\boxed{\partial_i\, p = \frac{dp}{dU}\, \partial_i\, U}$ ou $\boxed{\overline{\text{grad}}\; p = \frac{dp}{dU}\, \overline{\text{grad}}\; U}$

$\boxed{-\rho\, \overline{\text{grad}}\; U = \overline{\text{grad}}\; p}$

$\boxed{\rho = -\frac{dp}{dU}}$ définissant $\rho(U)$

<u>exemple</u> : dans le cas de la pesanteur

les surfaces sont des plans horizontaux $U = C^{ste}$ $p = C^{ste}$ $\theta = C^{ste}$ $\rho = C^{ste}$

z

Définition de la fonction P ...

reprenons les équations d'équilibre $\overline{\text{grad}}\; U + \frac{1}{\rho}\,\overline{\text{grad}}\; p = 0$

supposons pouvoir définir une fonction P telle que

$\boxed{\overline{\text{grad}}\; P = \frac{1}{\rho}\,\overline{\text{grad}}\; p}$ ou $\boxed{\partial_i\, P = \frac{1}{\rho}\,\partial_i\, p}$

les équations d'équilibre s'écrivent alors $\boxed{\overline{\text{grad}}\; P + \overline{\text{grad}}\; U = 0}$

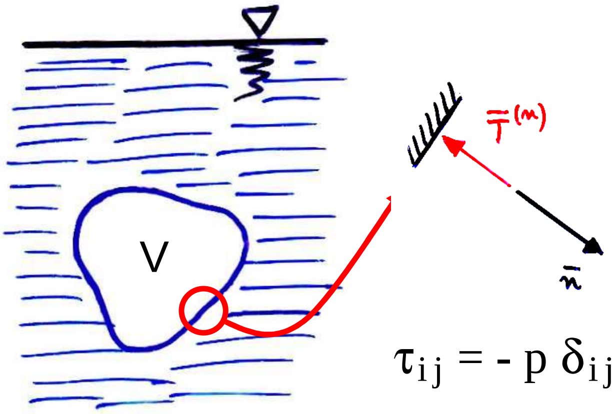
ou $P + U = C^{ste}$

Archimède

(287BC - 212BC)

Le principe d'Archimède ...

problème : calculer la résultante des forces de pression exercées par un fluide sur un corps immergé en équilibre



$$\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij}$$

$$\boxed{\bar{A} = \oint \bar{T}^{(n)}\,dS}$$

$$\boxed{\bar{A} = \oint -p\ \bar{n}\,dS}$$

difficulté : même si on connaît la distribution de la pression, la forme géométrique compliquée de S rend impossible le calcul de l'intégrale (la direction de la normale est aussi difficile à calculer)

Archimède

(287BC - 212BC)

Le principe d'Archimède ...

postulat : l'équilibre du fluide n'est pas changé si on remplace le corps immergé par du fluide

écrivons alors l'équilibre du volume V de fluide

z

$$\int_V (-\rho\, g)\,\bar{1}_z\, dV + \oint_S (-p)\,\bar{n}\, dS = 0$$

poids du fluide remplaçant le corps immergé

postulat : on a gardé la distribution de pression inchangée

Le principe d'Archimède ...

rappel

$$\overline{A} = \oint -p \; \overline{n} \, dS$$

$$\overline{A} = \int_V (\rho g) \, \overline{1}_z \, dV$$

$$\underbrace{\int_V (-\rho g) \, \overline{1}_z \, dV}_{\text{poids du fluide remplaçant le corps immergé}} + \underbrace{\oint_S (-p) \, \overline{n} \, dS}_{\text{action exercée par le fluide sur le corps immergé}} = 0$$

z

l'action du fluide sur le corps immergé (poussée d'Archimède) est une force

- dirigée vers le haut
- de module égal au poids de fluide déplacé
- (appliquée au centre de masse de ce fluide : le centre de poussée)

Le principe d'Archimède ...

$$\int_V (-\rho g) \, \overline{1}_z \, dV + \oint_S (-p) \, \overline{n} \, dS = 0$$

Attention !

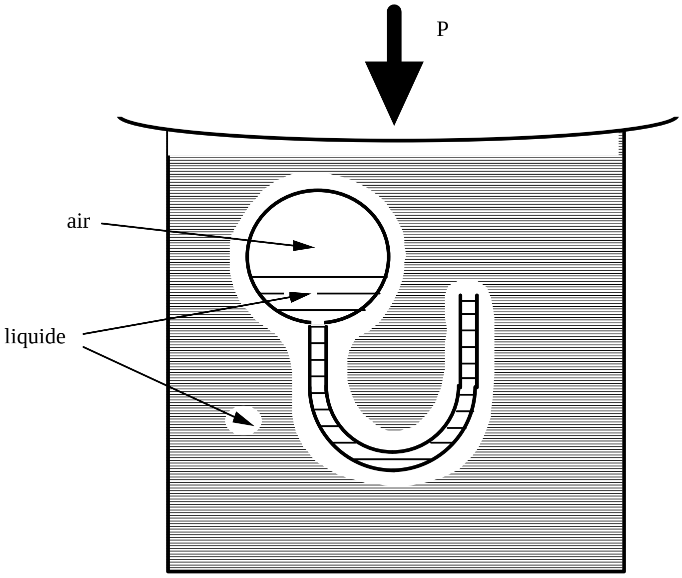
- la poussée d'Archimède traduit $\oint_S (-p) \, \overline{n} \, dS$

  donc, ne pas appliquer la poussée d'Archimède ET la résultante des pressions !

- le principe d'Archimède ne s'applique PAS si l'équilibre est modifié !

Le principe d'Archimède : le ludion ...

le poids du ludion (air compris, liquide exclu) est constant

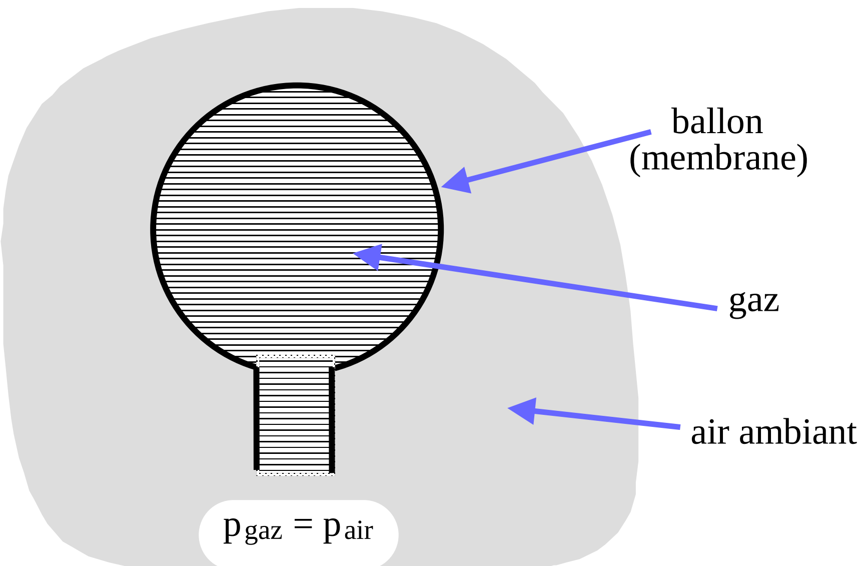


si on augmente la force F :
- **la pression augmente**
- **le volume d'air diminue**
- **de l'eau entre dans le ludion**
- **la poussée diminue**
- **le ludion descend ...**

si on diminue la force F :
- **la pression diminue**
- **le volume d'air augmente**
- **de l'eau sort du le ludion**
- **la poussée augmente**
- **le ludion monte ...**

le mouvement du ludion est contrôlé par une force à distance !

Le principe d'Archimède : le ballon ...



hypothèses :

• équilibre isotherme

$$\theta_{gaz} = \theta_{air}$$

• le ballon est ouvert

$$p_{gaz} = p_{air}$$

Le principe d'Archimède : le ballon ...

volume du ballon	$V(z)$
poids de l'enveloppe du ballon	P
poids du gaz contenu dans le ballon	$\rho_{gaz}(z)\, g\, V(z)$
poussée d'Archimède	$\rho_{air}(z)\, g\, V(z)$

force ascensionnelle
$$= \rho_{air}(z)\, g\, V(z) - \rho_{gaz}(z)\, g\, V(z) - P$$
$$= \rho_{air}(z)\, g\, V(z) \left(1 - \frac{\rho_{gaz}(z)}{\rho_{air}(z)} \right) - P$$

Le principe d'Archimède : le ballon ...

force ascensionnelle
$$= \rho_{air}(z)\, g\, V(z) - \rho_{gaz}(z)\, g\, V(z) - P$$
$$= \rho_{air}(z)\, g\, V(z) \left(1 - \frac{\rho_{gaz}(z)}{\rho_{air}(z)} \right) - P$$

appliquons la loi des gaz parfaits : $\dfrac{p_{gaz}}{\rho_{gaz}} = R_{gaz}\, \theta$ et $\dfrac{p_{air}}{\rho_{air}} = R_{air}\, \theta$

$$d = \frac{\rho_{gaz}}{\rho_{air}} = \frac{R_{air}}{R_{gaz}} = C^{ste}$$

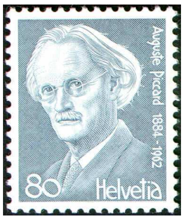
quelle que soit l'altitude

pour l'hydrogène : $1 - d = 1 - 0.0695 = 0.9305$
pour l'hélium : $1 - d = 1 - 0.14 = 0.86$

- **le ballon peut décoller si $V(0)$ est tel que la force ascensionnelle est positive !**
- **l'altitude maximum correspond à une force ascensionnelle nulle si …
$V(z) < V_{max}$ de l'enveloppe !**

275

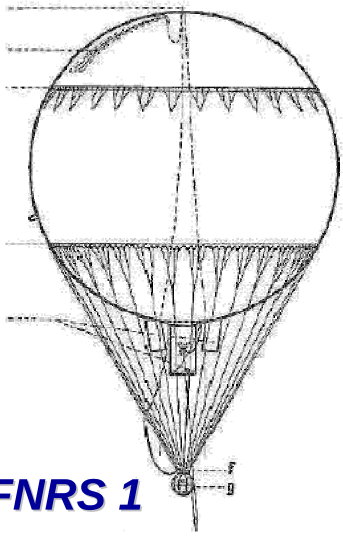
Auguste Piccard

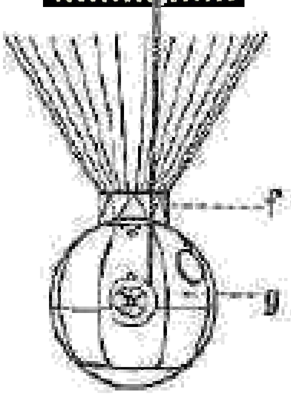


(1884 - 1962)

Le Professeur Auguste PICCARD

27 mai 1931 : première exploration de la stratosphère, dépassant l'altitude de 18.000 mètres





Auguste PICCARD et son assistant Paul KIPFER

FNRS 1

276

Le Professeur Auguste PICCARD

18 août 1932 : deuxième vol … atteignant 16.201 mètres

LICENCE 1

LICENCE

Signature du Titulaire

La licence de pilote de ballons libres portant le N° 33 en date du 10 Septembre 1924 a été délivrée à M. Auguste Piccard qui est autorisé par la présente licence à piloter tous les types de ballons libres.

La présente licence est valable a une validité permanente

Bruxelles, le 10 Septembre 1924

Le Directeur de l'Aéronautique :

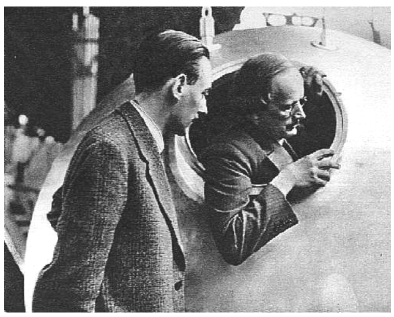
Commandant Crabbe,

MINISTÈRE DE LA DÉFENSE NATIONALE AÉRONAUTIQUE

LICENCE 2

LICENCE

ÉTAT CIVIL	SIGNALEMENT
Nom : Piccard,	
Prénoms : Auguste	
Nationalité : Suisse	
Lieu de naissance : Bâle	
Date de naissance : 28 janvier 1884	
Domicile : Bruxelles, avenue Ernestine, 14.	



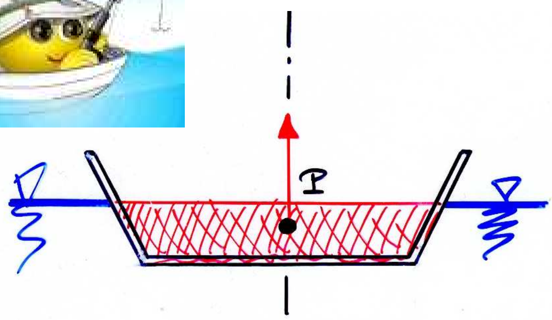
FNRS 1

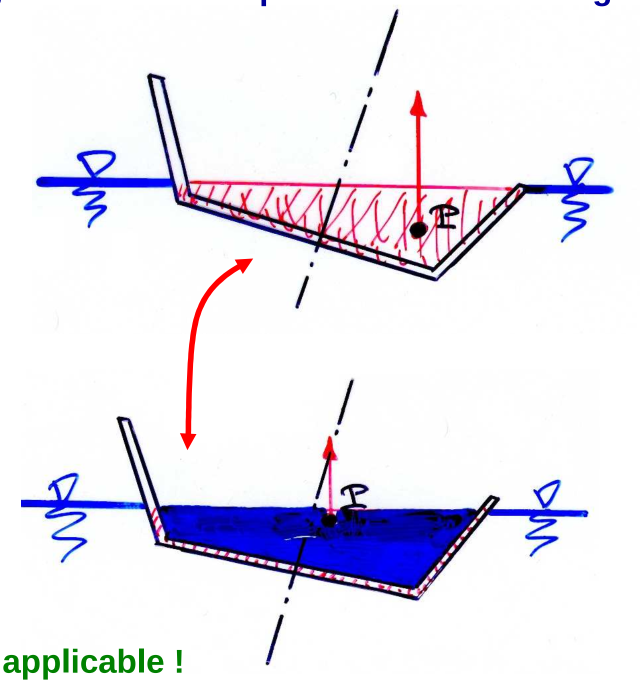
Auguste PICCARD et son assistant Max COSYNS

Le Professeur Auguste PICCARD

Le principe d'Archimède : le bateau ...

dans le cas des bateaux, il faut tenir compte du volume immergé



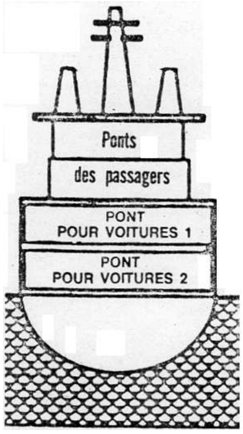


le volume immergé est différent selon la présence ou non d'eau dans le bateau

volume pour le calcul de la poussée d'Archimède

vérifier qu'Archimède est applicable !

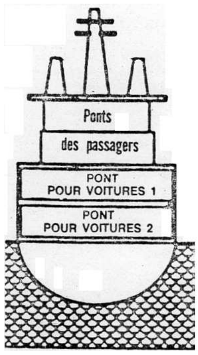
Principe d'Archimède ?



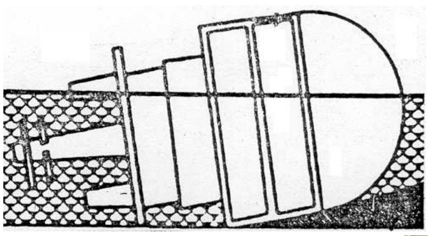
1987

1. bateau non affecté en général à une liaison à partir de Zeebruges : les quais de Zeebruges sont plus bas qu'à Calais ou Douvres → ballasts pleins pour "enfoncer le bateau" et permettre l'embarquement des véhicules
2. mal équilibré, le bateau avait une assiette négative (piquait du nez)
3. traversée hors horaire et départ en retard : le capitaine ordonne la vitesse maximum sans vider les ballasts
4. les portes avant et arrière ne sont pas fermées
   (parfois laissées ouvertes aussi pour évacuer les gaz d'échappement)
5. les voitures ne sont pas arrimées

Principe d'Archimède ?



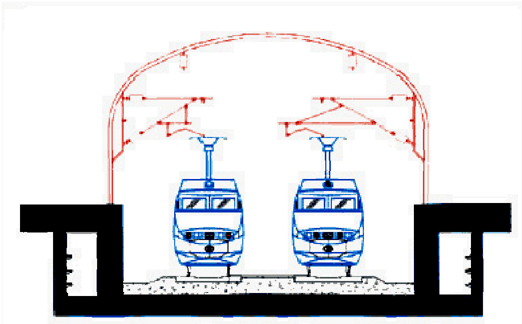
1987

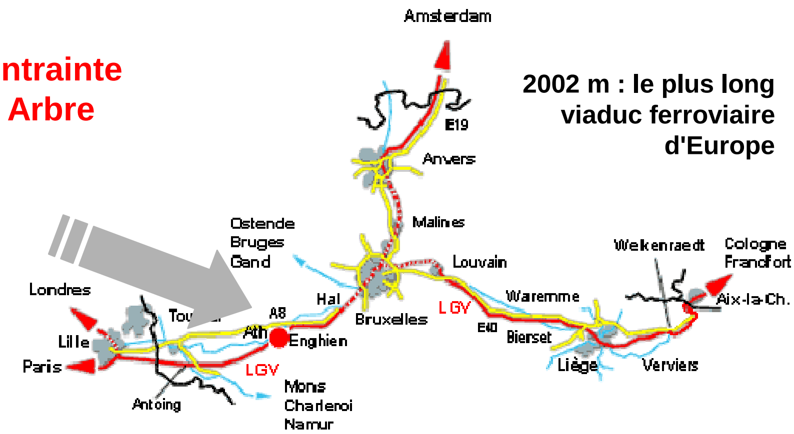


Archimède et un viaduc précontraint ...

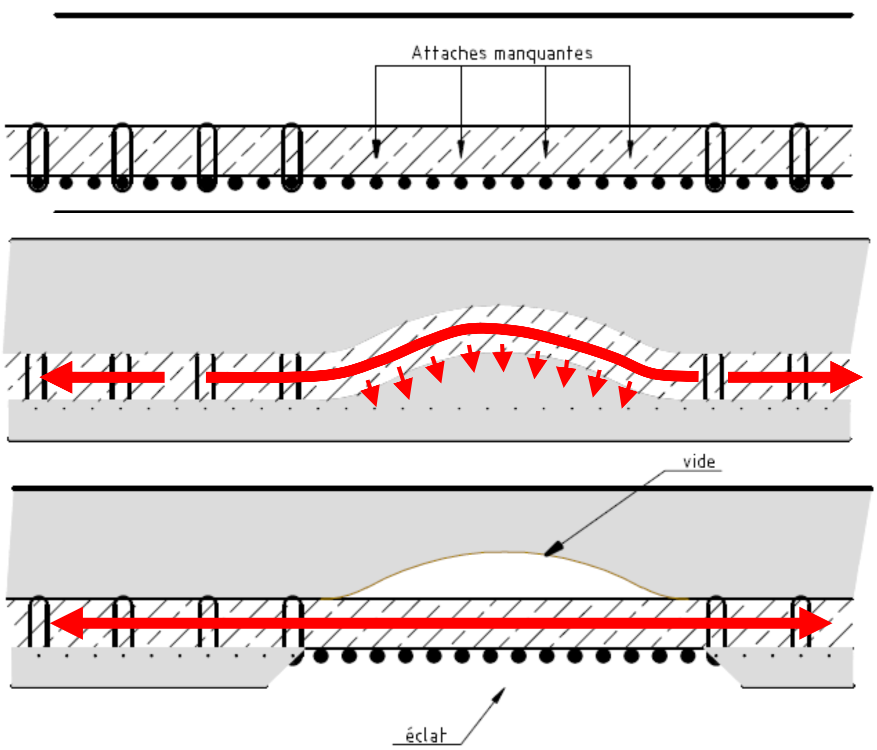
dégâts lors de la mise en précontrainte (post-tension) du viaduc TGV à Arbre

2002 m : le plus long viaduc ferroviaire d'Europe





Archimède et un viaduc précontraint ...



arrimage insuffisant de la gaine non lestée

lors du bétonnage, la gaine se soulève par poussée d'Archimède

lors de la post-tension, la gaine fait éclater le béton inférieur

Equilibre des fluides incompressibles ...

Un fluide est incompressible si le volume qu'il occupe
ne change pas de mesure au cours du temps.

Comme sa masse est constante, la dérivée matérielle de ρ est nulle

$$\dot{\rho} = 0 \qquad \text{avec en général} \quad \rho = \rho\,(x,y,z)$$

Si le fluide est homogène : $\rho = \rho_0$

et la définition de **P** devient : $\overline{\mathrm{grad}}\, P = \dfrac{1}{\rho_0}\, \overline{\mathrm{grad}}\, p$ ou $\boxed{P = \dfrac{p}{\rho_0}}$

et les équations d'équilibre deviennent

$$\boxed{\overline{\mathrm{grad}}\,(U + P) = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{U + \frac{p}{\rho_0} = C^{ste}}$$

Equilibre des fluides incompressibles ...

homogènes

Dans le cas de la pesanteur :

$$\boxed{U = g\,z}$$

et les équations d'équilibre deviennent

$$\boxed{gz + \frac{p}{\rho_0} = C^{ste}} \quad \text{ou} \quad \boxed{p + \rho_0\, gz = C^{ste}}$$

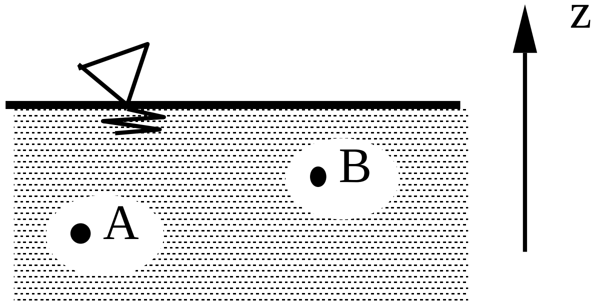
Equilibre des fluides incompressibles ...

homogènes

Si on considère deux points A et B :

$$p_A + \rho_0 \, g \, z_A = p_B + \rho_0 \, g \, z_B$$

- un point où la pression est connue fournit la valeur de la constante
- la surface libre d'un liquide (p = C^{ste}) pesant est horizontale



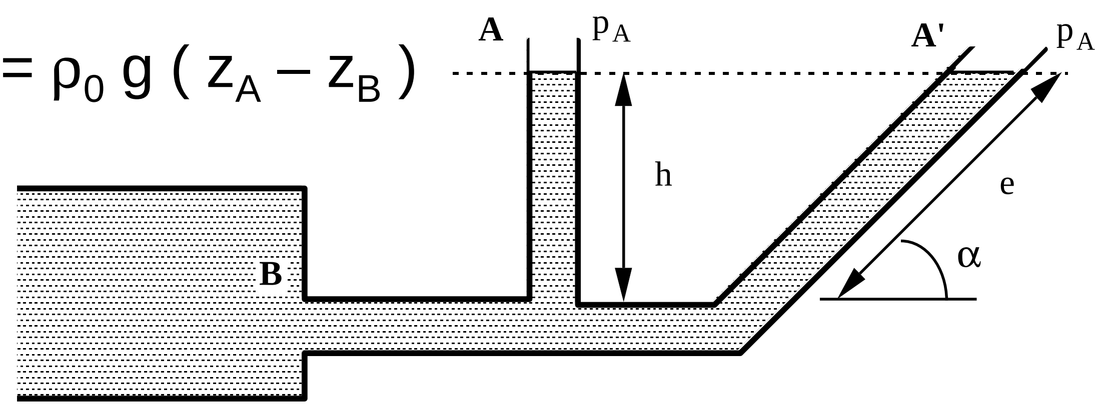
Equilibre des fluides incompressibles ...

homogènes

exemple n°1 : les vases communicants

on mesure une différence de pression en mesurant une différence de hauteur de liquide

$$p_B - p_A = \rho_0 \, g \, (z_A - z_B)$$



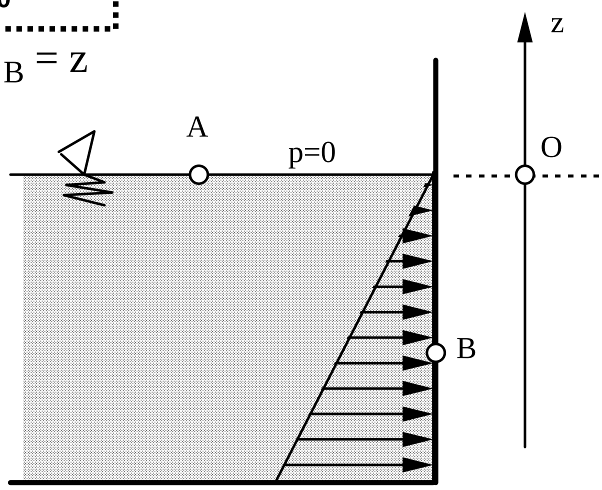
Equilibre des fluides incompressibles ...

homogènes

exemple n°2 : répartition des pressions sur une paroi

$$\begin{array}{ccccccccc} p_A & + & \rho_0 g z_A & = & p_B & + & \rho_0 g z_B \\ = 0 & & z_A = 0 & & ? & & z_B = z \end{array}$$

$$\boxed{p = -\rho_0 g z}$$



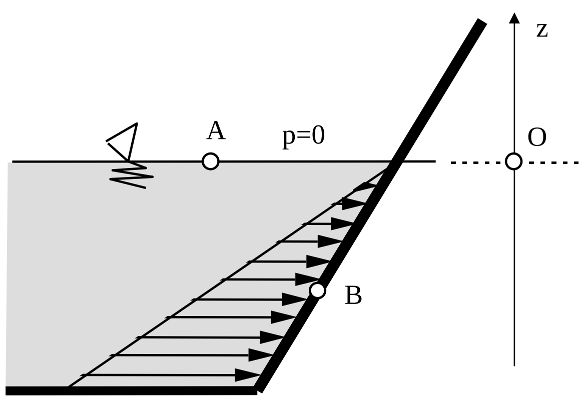
Equilibre des fluides incompressibles ...

homogènes

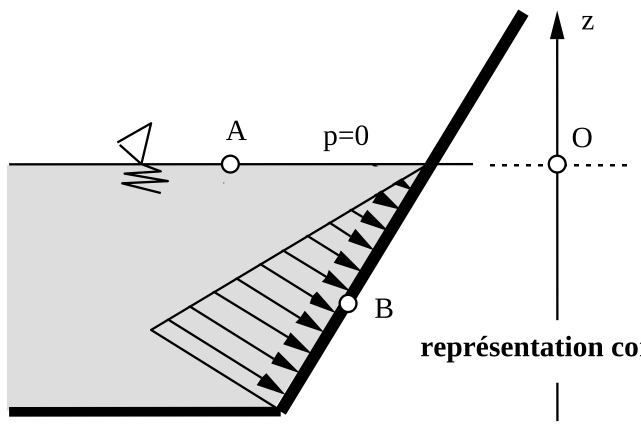
exemple n°2 : répartition des pressions sur une paroi

attention à la représentation !

les pressions agissent perpendiculairement aux parois !



représentation ERRONEE !



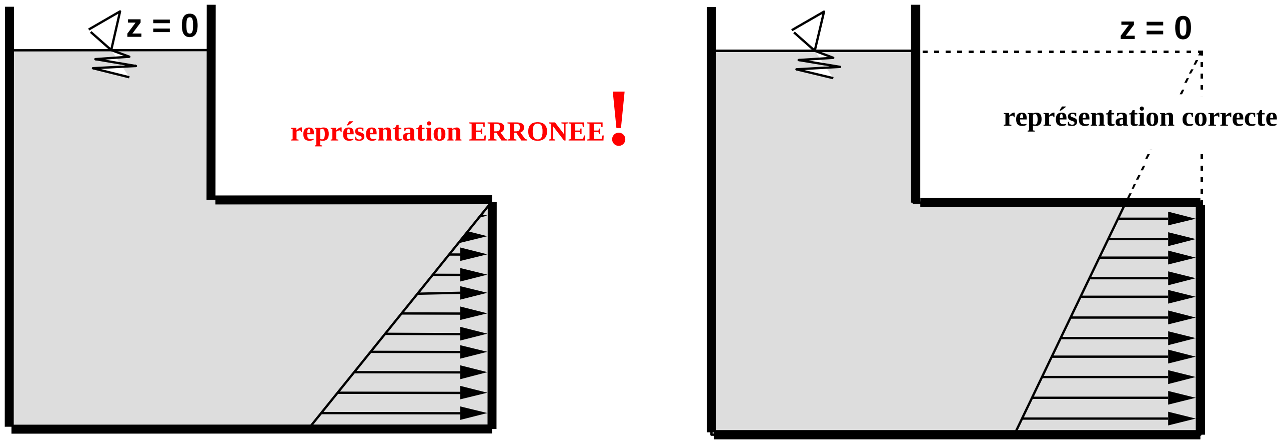
représentation correcte

Equilibre des fluides incompressibles ...

homogènes

exemple n°3 : répartition des pressions sur une par oi

$$p = -\rho_0 g z$$



Blaise Pascal

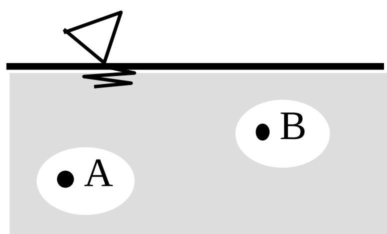
(1623 - 1662)

Le principe de Pascal ...

Si en un point A d'un fluide incompressible homogène,
la pression est accrue de Δp,
tous les points du fluide subissent le même accroissement de pression Δp

$$p_A + \rho_0 g z_A = p_B + \rho_0 g z_B$$

$$p'_A + \rho_0 g z_A = p'_B + \rho_0 g z_B$$



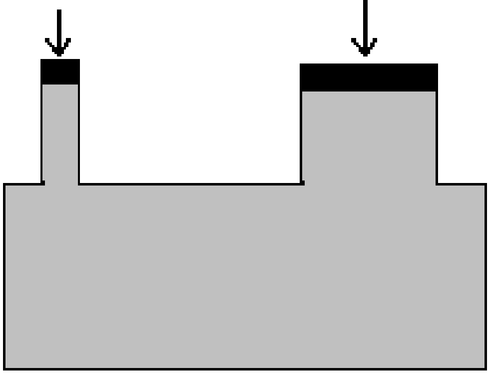
$$p'_A = p_A + \Delta p \quad \Rightarrow \quad p'_B = p_B + \Delta p$$

Application du principe de Pascal ...

$$\boxed{F = f\,\frac{S}{s}}$$

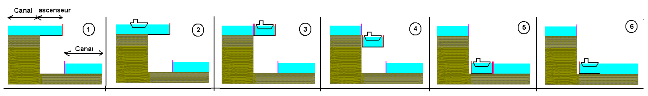
$$\Delta p = \frac{f}{s}$$

$$F = \Delta p\; S$$



presse hydraulique

Application du principe de Pascal ...



ascenseurs hydrauliques de Houdeng-Goegnies

Le principe de Pascal ...

Expérience du "Crève-tonneau"
Rouen, place du Marché 1647 ?

pour de l'eau : ρ_0 = 1 000 kg/m^3

pour un tube de 10m de hauteur et

(g ≈ 10 m/s^2)

$$p_{tonneau} = p_{sommet} + 10^5\ N/m^2$$

des douves de 1 m x 0,1 m supportent chacune 10 000 N (1 tonne force !), ce qui fait éclater le tonneau

BATir

Service Construction, Architecture et Urbanisme
Department of Building, Architecture and Town Planning

Equations générales de cinématique des fluides

ULB
Université Libre de Bruxelles, Université d'Europe

Le tourbillon ...

- **le champ de tourbillon est défini par**

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}\ \overline{\mathrm{rot}}\ \overline{\mathrm{v}} \qquad \text{ou} \qquad \omega_i = \frac{1}{2}\ \delta_{ijk}\ \partial_j \mathrm{v}_k$$

- **il en résulte directement que**

$$\boxed{\mathrm{div}\ \overline{\omega} = 0} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\omega_{i,i} = 0}$$

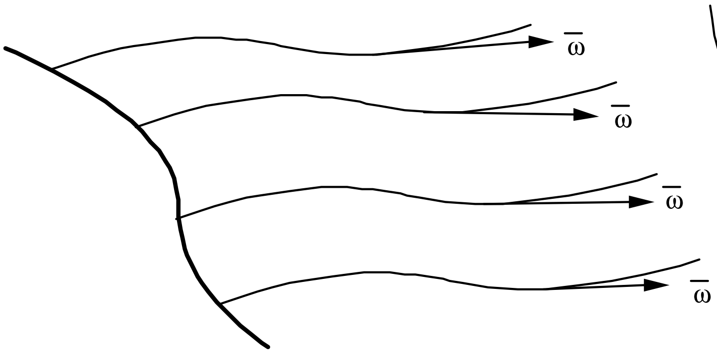
et le tourbillon est dit " conservatif "

$$\int_V \omega_{i,i}\ dV = 0 \quad \xrightarrow{\text{Gauss}} \quad \boxed{\oint_S \omega_i\ n_i\ dS = 0}$$

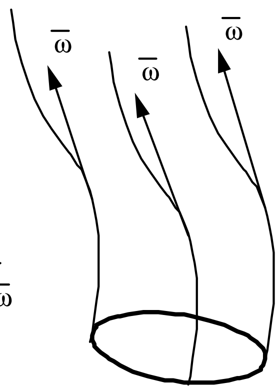
- **cela montre que le flux de tourbillon au travers d'une surface fermée est nul (" ce qui rentre est égal à ce qui sort ")**

Tube de tourbillon ...

- **ligne de tourbillon :** **courbe enveloppe du vecteur tourbillon**
- **surface de tourbillon :** **surface engendrée par les lignes de tourbillon s'appuyant sur une courbe quelconque**
- **tube de tourbillon :** **surface engendrée par une courbe fermée (filament de tourbillon si la courbe est "élémentaire")**



surface de tourbillon

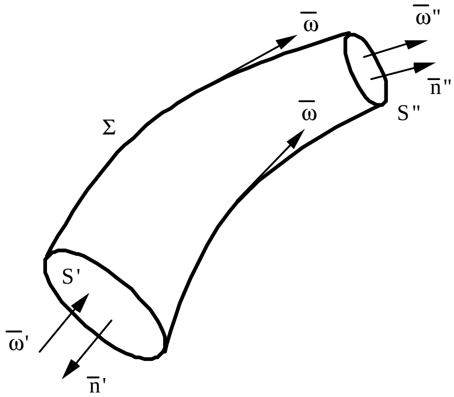


tube de tourbillon

Tube de tourbillon ...

- filament de tourbillon :

$$\boxed{\omega' S' = \omega'' S''}$$



car le vecteur tourbillon est tangent à la surface latérale Σ

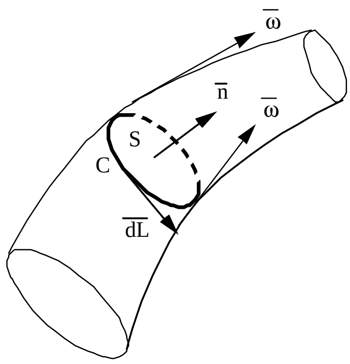
- tube de tourbillon :

$$\boxed{\int_S \overline{\omega} \,.\, \overline{n} \, dS = C^{ste}}$$

pour toute section S du tube de tourbillon

Circulation de la vitesse ...

- faisons une section dans un tube de tourbillon : on obtient une surface S limitée par une courbe fermée C



- calculons la circulation Γ de la vitesse le long de cette courbe C

$$\boxed{\Gamma = \oint_C \overline{v} \,.\, \overline{dL}}$$

- et appliquons le théorème de Stokes

$$\Gamma = \oint_C \overline{v} \,.\, \overline{dL} = \int_S \overline{\mathrm{rot}}\, \overline{v} \,.\, \overline{n} \; dS$$ et donc $$\boxed{\Gamma = \int_S 2\, \overline{\omega} \,.\, \overline{n} \; dS = C^{ste}}$$

montrant que la circulation Γ est constante quelle que soit la section

Service Construction, Architecture et Urbanisme
Department of Building, Architecture and Town Planning

BATir

Dynamique des fluides parfaits

(1)

ULB

Université Libre de Bruxelles, Université d'Europe

Introduction ...

un fluide parfait est un milieu isotrope dont la loi de comportement est :

$$\tau_{ij} = -\, p\, \delta_{ij}$$

pression

pas de viscosité !

$$\boxed{\tau_{ij} = -\, p\, \delta_{ij} + 2\,\cancel{\mu}\left(V_{ij} - \frac{1}{3}\, \delta_{ij}\, V_{kk} \right)}$$

la pression est obtenue par l'équation d'état

$$F\,(\,\rho\,,\,p\,,\,\theta\,) = 0$$ forme générale

θ = température absolue

gaz parfait

$$\frac{p}{\rho} = R\theta$$

BATir

Introduction ...

attention : ne pas confondre ..... **fluide parfait**
gaz parfait

fluide parfait : **défini par sa loi de comportement**
fluide de viscosité nulle

$$\boxed{\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \cancel{2\mu}\left(V_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}V_{kk}\right)}$$

gaz parfait : **défini par son équation d'état**
peut avoir de la viscosité

$$\frac{p}{\rho} = R\theta$$

Introduction ...

attention :

un gaz parfait n'est donc pas nécessairement un fluide parfait

cette remarque n'a pas été faite en statique des fluide car

$$\boxed{\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\mu\left(\cancel{V}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\cancel{V}_{kk}\right)}$$ **devient** $$\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij}$$

même en présence de viscosité car, <u>en statique</u>, $V_{ij} = 0$

dans ce chapitre, on considère un FLUIDE PARFAIT, <u>sans viscosité</u>, quelle que soit son équation d'état

Leonhard Euler

(1707 - 1783)

Equations du mouvement ...

équations d'Euler

- on part des équations générales du mouvement

$$\rho v_i^{\bullet} = f_i + \partial_j \tau_{ji}$$

- on développe la dérivée matérielle

$$\rho \left[\partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i\right] = f_i + \partial_j \tau_{ji}$$

- on développe le tenseur des contraintes $\tau_{ij} = - p\, \delta_{ij}$

équations d'Euler 1ère forme

$$\boxed{\rho \left[\partial_0 v_i + v_k\, \partial_k v_i \right] = f_i - \partial_i p}$$

Equations du mouvement ...

équations d'Euler

- en développant à 2 dimensions ...

$$\rho \left[\partial_0 v_i + v_k\, \partial_k v_i \right] = f_i - \partial_i p$$

équations d'Euler 1ère forme

$$\boxed{\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] &= f_x - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] &= f_y - \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}}$$

Equations du mouvement ...

équations d'Euler

- les dérivées ne portent pas sur l'entièreté des termes …

$$\rho\left[\partial_0 v_i + v_k\,\partial_k v_i\right] = f_i - \partial_i p$$

- on transforme …

$$\rho\, v_k\,\partial_k v_i = \partial_k(\rho\, v_i v_k) - v_i\,\partial_k(\rho\, v_k)$$

$$\rho\,\partial_0 v_i = \partial_0(\rho\, v_i) - v_i\,\partial_0\rho$$

$$\partial_0(\rho\, v_i) - \underline{v_i\,\partial_0\rho} + \partial_k(\rho\, v_i v_k) - \underline{v_i\,\partial_k(\rho\, v_k)} = f_i - \partial_i p$$

- on utilise l'équation de continuité

$$\partial_0\rho + \partial_k(\rho\, v_k) = 0$$

BATir

Equations du mouvement ...

équations d'Euler

- et donc … $\partial_0(\rho v_i) - \underline{v_i\,\partial_0\rho} + \partial_k(\rho v_i v_k) - \underline{v_i\,\partial_k(\rho v_k)} = f_i - \partial_i p$

$$\boxed{\partial_0(\rho v_i) + \partial_k(\rho v_i v_k) + \partial_i p = f_i}$$

- développé à 2 dimensions

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = f_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p) = f_y$$

équations d'Euler
2ème forme

BATir

Supercalculateur scientifique ...

Barcelona Supercomputing Center

Peak Performance:
94,21 Teraflops

10240 IBM
Power PC 970MP
processors at 2.3 GHz

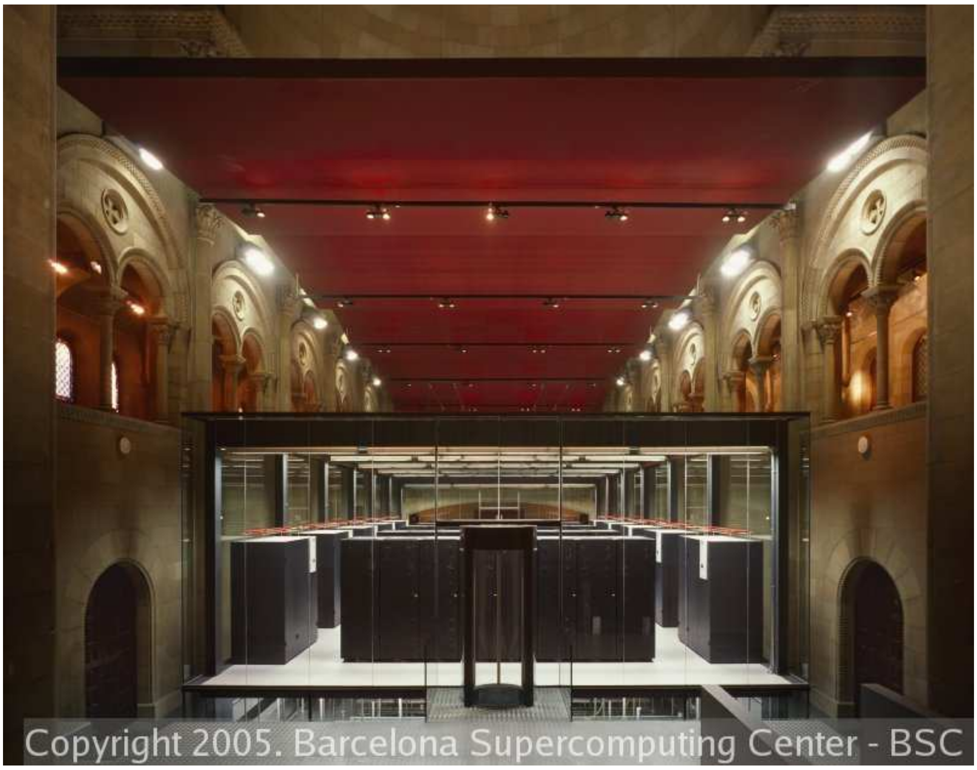
20 TB of main memory
370 TB of disk storage

Interconnection networks :
Myrinet and
Gigabit Ethernet

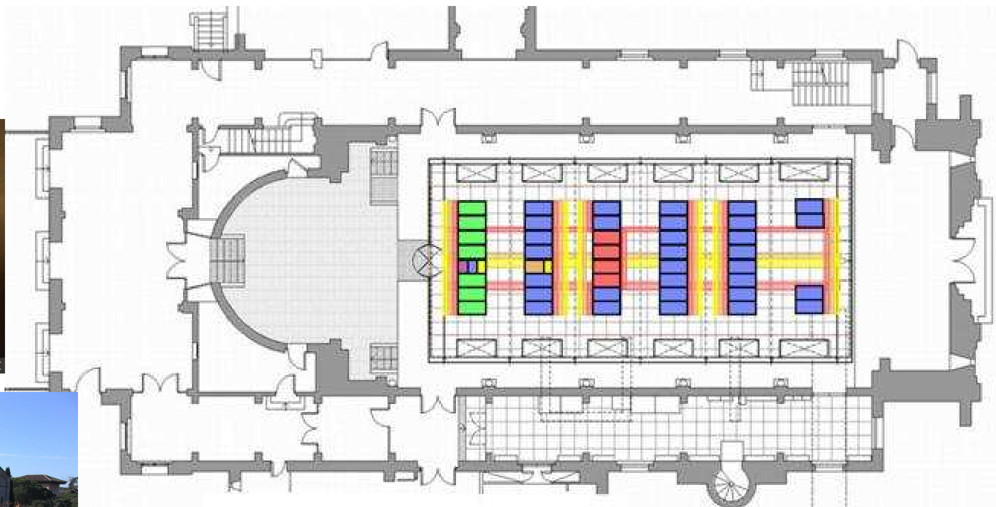
5ème des TOP 500 en 2007
max mondial (2007) :
131.072 processeurs

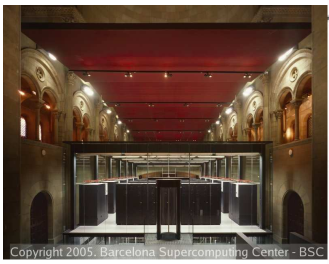
60ème des TOP 500 en 2009

téra = 10^{12}



Supercalculateur scientifique ...





Barcelona Supercomputing Center

La pression motrice ...

fluide incompressible homogène

- dans le cas le plus courant où la force de volume est la force de pesanteur, on a (z = axe vertical, positif vers le haut)

$$\rho_0 \overline{F} = - \rho_0\, g\, \overline{1z} \quad \text{avec} \quad \overline{F} = - \overline{\mathrm{grad}}\, U \quad \text{et} \quad U = gz$$

z

- l'équation du mouvement s'écrit

$$\rho_0 \dot{v}_i = \rho_0 F_i - \partial_i p$$

- ou

$$\rho_0 \dot{\overline{v}} = - \overline{\mathrm{grad}}\, \hat{p}$$

- en définissant la pression motrice $\hat{p} = p + \rho_0 g z$

Exemple : écoulement unidimensionnel ...

fluide incompressible homogène

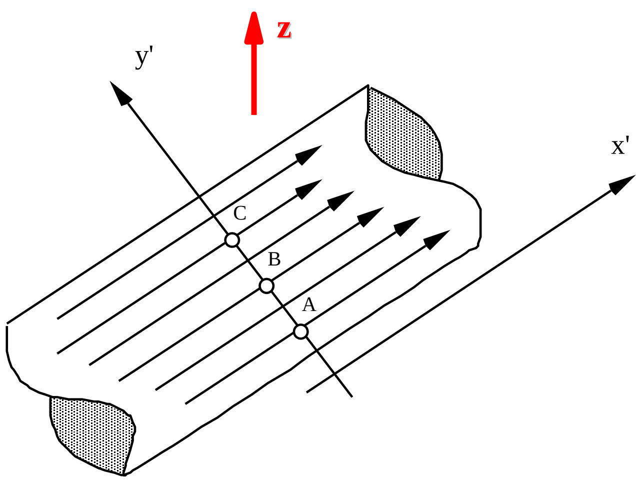
- dans le cas où la force de volume est la force de pesanteur, on a (z = axe vertical, positif vers le haut), l'équation du mouvement s'écrit

$$\rho_0 \left[\partial_0 v_i + v_k\, \partial_k v_i \right] = - \partial_i \hat{p} \qquad \hat{p} = p + \rho_0 g z$$

- considérons un écoulement permanent unidimensionnel incompressible

$$\overline{v} = u\, \overline{1}_{x'} + 0\, \overline{1}_{y'} + 0\, \overline{1}_{z'}$$

$$\partial_0 v_i = 0$$



- travaillons en axes x', y'

Exemple : écoulement unidimensionnel ...

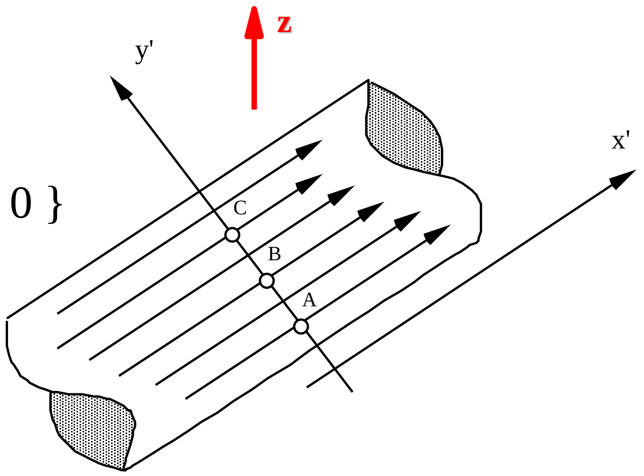
fluide incompressible homogène

- on travaille dans les axes x', y'
- incompressible : $\dot{\rho} = 0$ $\qquad \dot{\rho} + \rho \, \mathrm{div} \, \overline{v} = 0 \longrightarrow \mathrm{div} \, \overline{v} = 0$

$$\mathrm{div} \, \overline{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{\partial w}{\partial z'} = 0$$

- unidimensionnel : $\overline{v} = \{ u, 0, 0 \}$

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = 0 \rightarrow u = u(y')$$



Exemple : écoulement unidimensionnel ...

fluide incompressible homogène

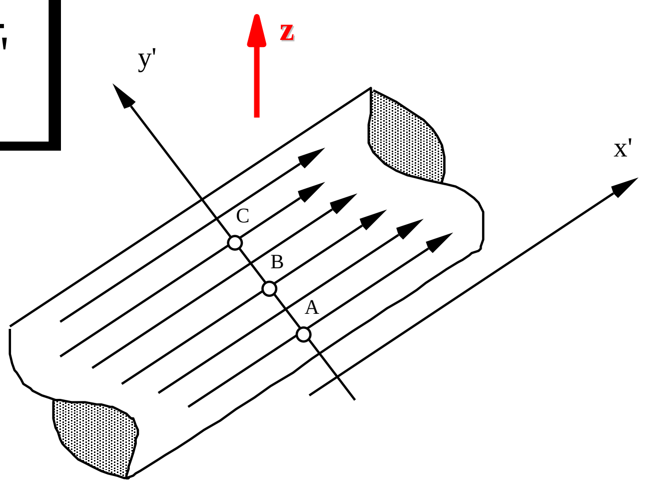
$$\boxed{\begin{array}{l} \rho_0 \left[\cancel{\dfrac{\partial u}{\partial t}} + u \cancel{\dfrac{\partial u}{\partial x'}} + \cancel{v} \dfrac{\partial u}{\partial y'} \right] = - \dfrac{\partial \hat{p}}{\partial x'} \\ \rho_0 \left[\cancel{\dfrac{\partial v}{\partial t}} + u \cancel{\dfrac{\partial v}{\partial x'}} + \cancel{v} \dfrac{\partial v}{\partial y'} \right] = - \dfrac{\partial \hat{p}}{\partial y'} \end{array}}$$

- travaillons en axes x', y'

= 0 car stationnaire

= 0 car unidimensionnel

$$\overline{v} = \{ u, 0, 0 \}$$



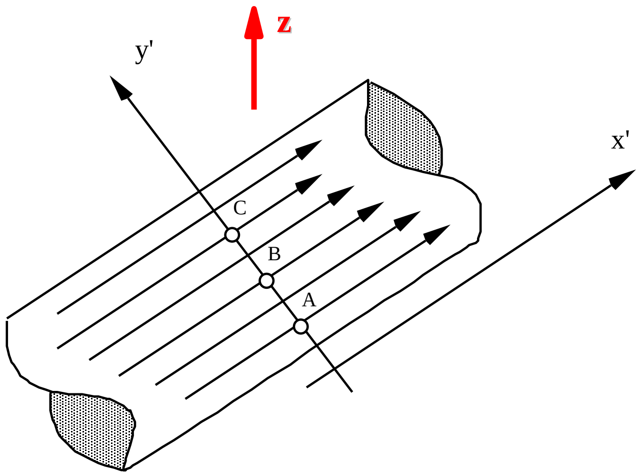
Exemple : écoulement unidimensionnel ...

fluide incompressible homogène

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x'} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial y'} = 0$$

- on travaille dans les axes x', y'



- en particulier, $\hat{p}$ = constante

  dans toute section
  perpendiculaire à l'écoulement

Horace Lamb

(1849 - 1934)

Equation de Lamb ...

- repartons de l'équation du mouvement ...

$$\rho v_i^{\bullet} = f_i + \partial_j \tau_{ji}$$

- développons autrement la dérivée matérielle...

$$v_i^{\bullet} = \partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i$$

$$= \partial_0 v_i + v_k (\partial_k v_i - \partial_i v_k) + v_k \partial_i v_k$$

$$= \partial_0 v_i + v_k \, 2 \, v_{[i,k]} + v_k \partial_i v_k$$

- mais ... $\overline{\omega} = \frac{1}{2} \overline{\mathrm{rot}} \, \overline{v} \quad \rightarrow \quad v_{[i,k]} = \delta_{ipk} \, \omega_p$

315

Equation de Lamb ...

$$\rho v_i^{\bullet} = f_i + \partial_j \tau_{ji}$$

$$v_i^{\bullet} = \partial_0 v_i + v_k \, 2 \, v_{[i,k]} + v_k \, \partial_i v_k \qquad v_{[i,k]} = \delta_{ipk} \, \omega_p$$

$$v_i^{\bullet} = \partial_0 v_i + 2 \, \delta_{ipk} \, \omega_p \, v_k + \frac{1}{2} \partial_i \left(v_k \, v_k \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + 2 \left(\overline{\omega} \times \overline{v} \right) + \overline{\mathrm{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \overline{F} - \frac{1}{\rho} \overline{\mathrm{grad}} \; p} \qquad \text{avec} \qquad \overline{f} = \rho \, \overline{F}$$

équation de Lamb

BATir

316

Equation de Lamb ...

$$\rho v_i^{\bullet} =$$

$$v_i^{\bullet} = \partial_0 \qquad \delta_{ipk} \, \omega_p$$

$$v_k \, v_k \neq v_k^2 \quad !$$

$$v_i^{\bullet} = \partial_0 v_i + 2 \, \delta_{ipk} \, \omega_p \, v_k + \frac{1}{2} \partial_i \left(v_k \, v_k \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + 2 \left(\overline{\omega} \times \overline{v} \right) + \overline{\mathrm{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \overline{F} - \frac{1}{\rho} \overline{\mathrm{grad}} \; p} \qquad \text{avec} \qquad \overline{f} = \rho \, \overline{F}$$

équation de Lamb

BATir

Energie spécifique totale - Charge

- considérons les cas particuliers (les plus fréquents) où :
  - la force par unité de masse dérive d'un potentiel

$$\overline{F} = - \overline{\text{grad}}\, U$$

  - le fluide est barotrope : ρ = ρ(p)

$$\overline{\text{grad}}\ P = \frac{1}{\rho}\ \overline{\text{grad}}\ p \qquad \text{ou} \qquad P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}$$

  - si le fluide est homogène et incompressible, on a $\rho = \rho_0 = C^{ste}$

$$\boxed{P = \frac{p}{\rho_0}} \qquad \text{(en homogène et incompressible)}$$

Energie spécifique totale - Charge

- et l'équation de Lamb

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + 2\left(\overline{\omega} \times \overline{v}\right) + \overline{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \overline{F} - \frac{1}{\rho}\,\overline{\text{grad}}\ p$$

- devient

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + 2\left(\overline{\omega} \times \overline{v}\right) = - \overline{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \overline{\text{grad}}\ U - \overline{\text{grad}}\ P$$

- ou

$$\boxed{\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + 2\left(\overline{\omega} \times \overline{v}\right) = - \overline{\text{grad}}\left[U + P + \frac{v^2}{2}\right]}$$

L'énergie spécifique totale

- .....

$$\boxed{\varepsilon = U + P + \frac{v^2}{2}}$$

énergie spécifique totale
(par unité de masse)

- avec, pour chacun des termes

$$\left\{\begin{array}{ll} \bullet\ \frac{v^2}{2} & \text{énergie cinétique par unité de masse} \\ \bullet\ U & \text{énergie potentielle par unité de masse} \\ \bullet\ P & \text{énergie de pression par unité de masse} \end{array}\right.$$

Energie spécifique totale - Charge

- .....

$$\boxed{\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + 2\left(\overline{\omega} \times \overline{v}\right) = - \overline{\text{grad}} \left[U + P + \frac{v^2}{2} \right]}$$

- et on définit

$$\boxed{\varepsilon = U + P + \frac{v^2}{2}}$$

énergie spécifique totale
(par unité de masse)

- et la charge

$$\varepsilon = g\left[z + \frac{P}{g} + \frac{v^2}{2g} \right] = g H \quad \text{et donc} \quad \boxed{H = \left[z + \frac{P}{g} + \frac{v^2}{2g} \right]}$$

(énergie par unité de poids)

La charge …

- …..

$$\boxed{H = z + \frac{p}{g} + \frac{v^2}{2g}}$$

- avec, pour chacun des termes
  - $\dfrac{v^2}{2g}$ hauteur de vitesse
  - **z** hauteur géométrique
  - $\dfrac{p}{g}$ hauteur de pression

unité : m

La charge …

- …..

$$\boxed{H = z + \frac{p}{\rho_0 g} + \frac{v^2}{2g}}$$

fluide incompressible homogène

- avec, pour chacun des termes
  - $\dfrac{v^2}{2g}$ hauteur de vitesse
  - **z** hauteur géométrique
  - $\dfrac{p}{\rho_0 g}$ hauteur de pression

unité : m

323

Daniel Bernoulli

(1700 - 1782)

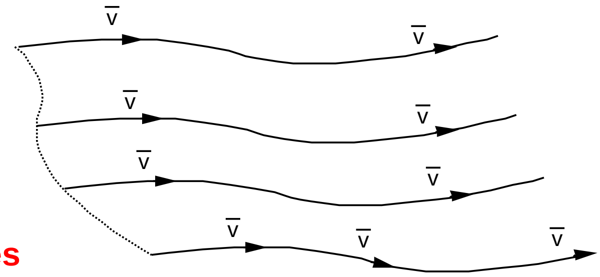
Théorème de Bernoulli n°1 ...

- dans un écoulement permanent
- d'un fluide parfait
- soumis à des forces massiques dérivant d'un potentiel

$$\boxed{\varepsilon = U + P + \frac{v^2}{2}}$$

ε est constant le long d'une ligne de courant

ligne de courant = courbe dont les tangentes sont les vitesses



BATir

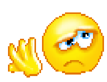
324

Théorème de Bernoulli n°1 ...

- on part de l'équation de Lamb

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + 2\left(\overline{\omega} \times \overline{v}\right) = -\,\overline{\text{grad}}\ \varepsilon$$

- écoulement permanent $\partial/\partial t = 0$
- soumis à des forces massiques dérivant d'un potentiel $\longrightarrow$ U
  - multiplions scalairement par $\overline{v}$ $\longrightarrow$ $\overline{v}\,.\,\overline{\text{grad}}\ \varepsilon = 0$
  - $\overline{\text{grad}}\ \varepsilon$ est $\perp$ aux surfaces $\varepsilon = C^{ste}$



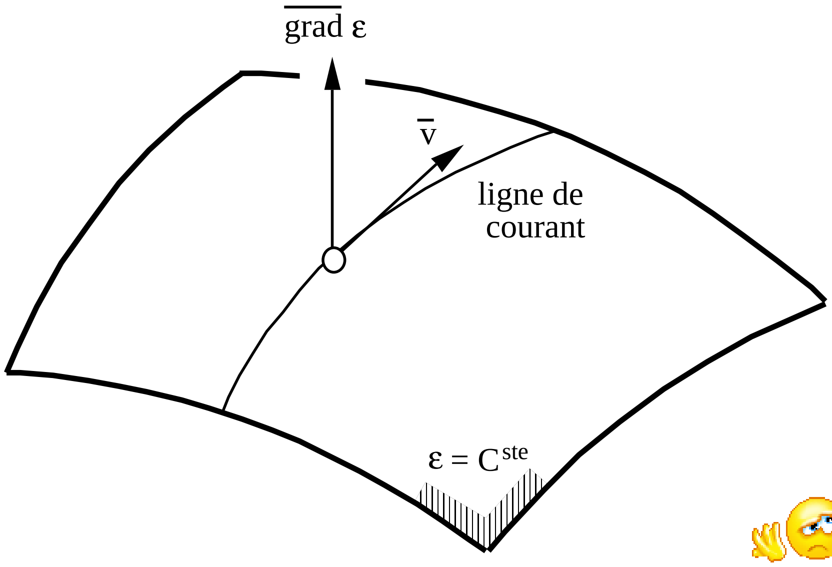
BATir

Théorème de Bernoulli n°1 ...

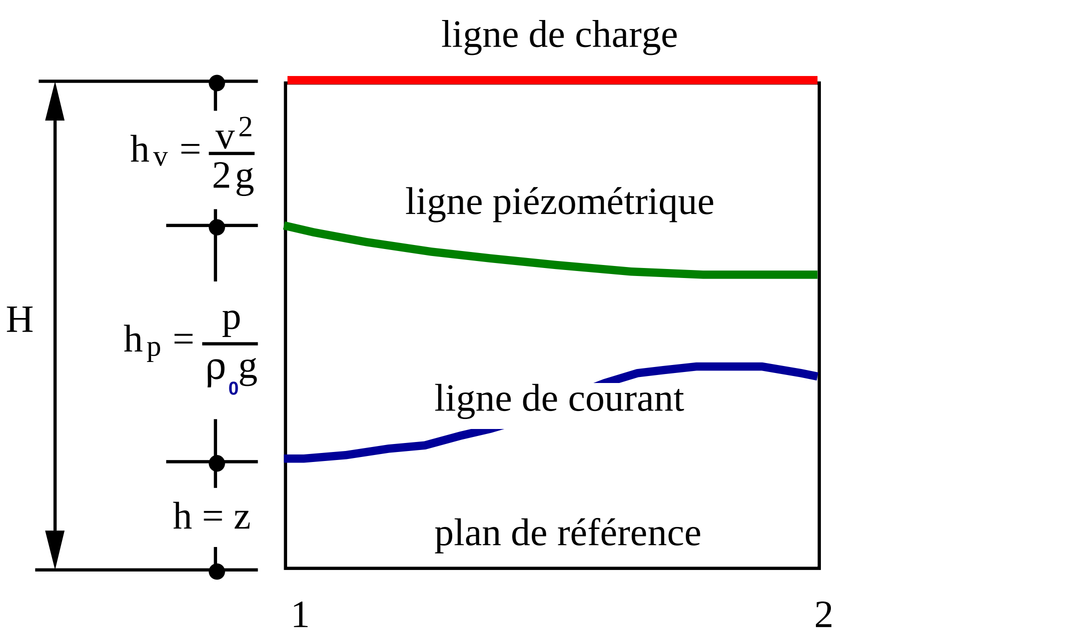
$\overline{\text{grad}}\ \varepsilon$ **est** $\perp$ **aux surfaces** $\varepsilon = C^{ste}$

$$\overline{v} \cdot \overline{\text{grad}}\ \varepsilon = 0$$

$\varepsilon = C^{ste}$ le long d'une ligne de courant



Théorème de Bernoulli n°1 ...



fluide incompressible homogène

Bernoulli : mais on a également ...

- **on part de l'équation de Lamb**

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + 2\,(\overline{\omega} \times \overline{v}) = -\,\overline{\mathrm{grad}}\;\varepsilon$$

- **écoulement permanent** $\partial / \partial t = 0$

- **soumis à des forces massiques dérivant d'un potentiel** $\longrightarrow$ **U**

  - **multiplions scalairement par** $\overline{\omega}$ $\longrightarrow$ $\overline{\omega}.\,\overline{\mathrm{grad}}\;\varepsilon = 0$

  - $\overline{\mathrm{grad}}\;\varepsilon$ **est** $\perp$ **aux surfaces** ε **= C^ste^**

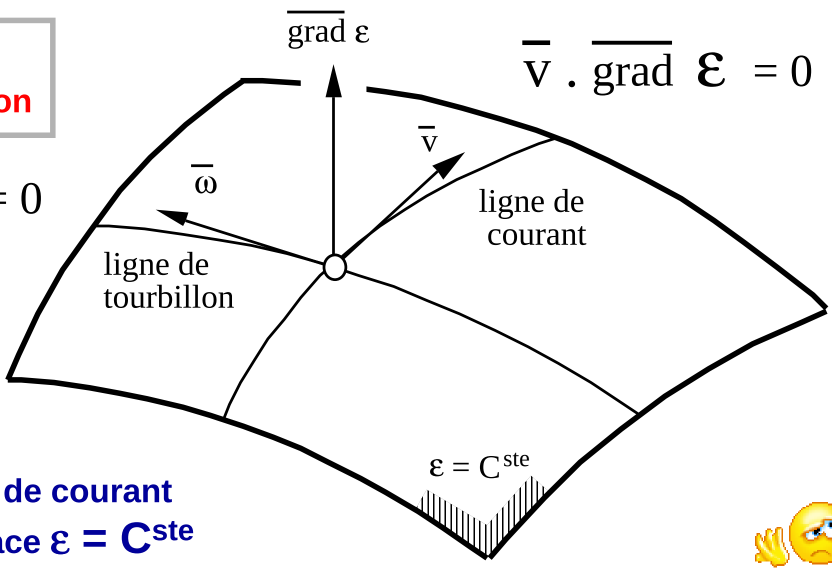
Bernoulli : mais on a également ...

ε = C^{ste} le long d'une ligne de courant

$\overline{v}\,.\,\overline{\mathrm{grad}}\;\varepsilon = 0$

ε= C^{ste} le long d'une ligne de tourbillon

$\overline{\omega}.\,\overline{\mathrm{grad}}\;\varepsilon = 0$



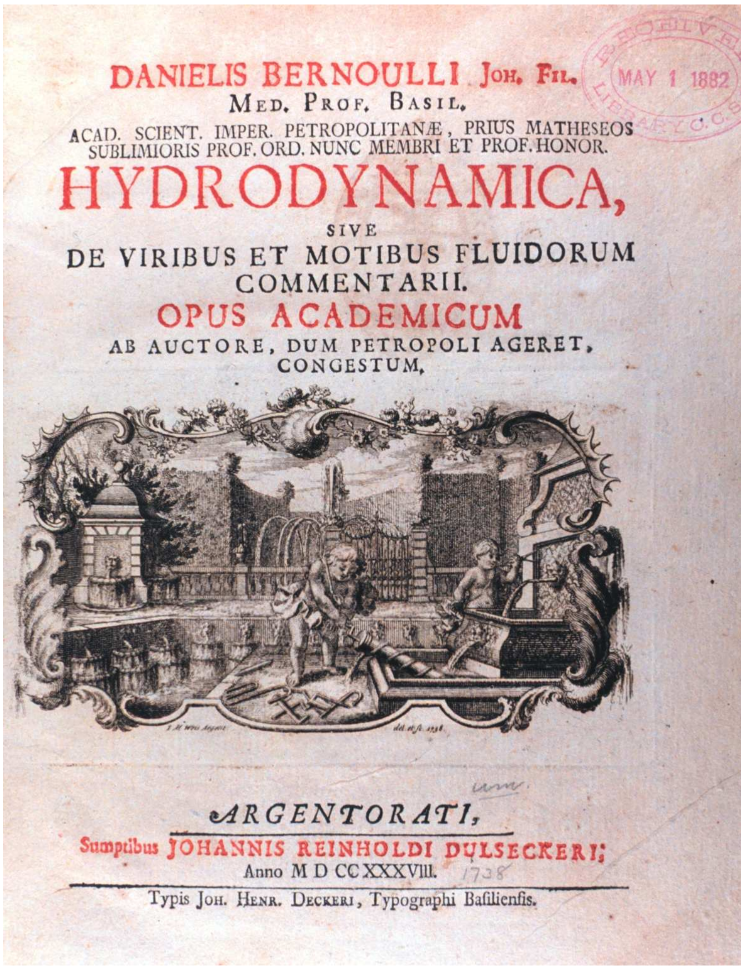
- **et donc la constante est la même pour toutes les lignes de tourbillon s'appuyant sur une ligne de courant**
  $\longrightarrow$ **engendre une surface ε = C^{ste}**

Daniel Bernoulli

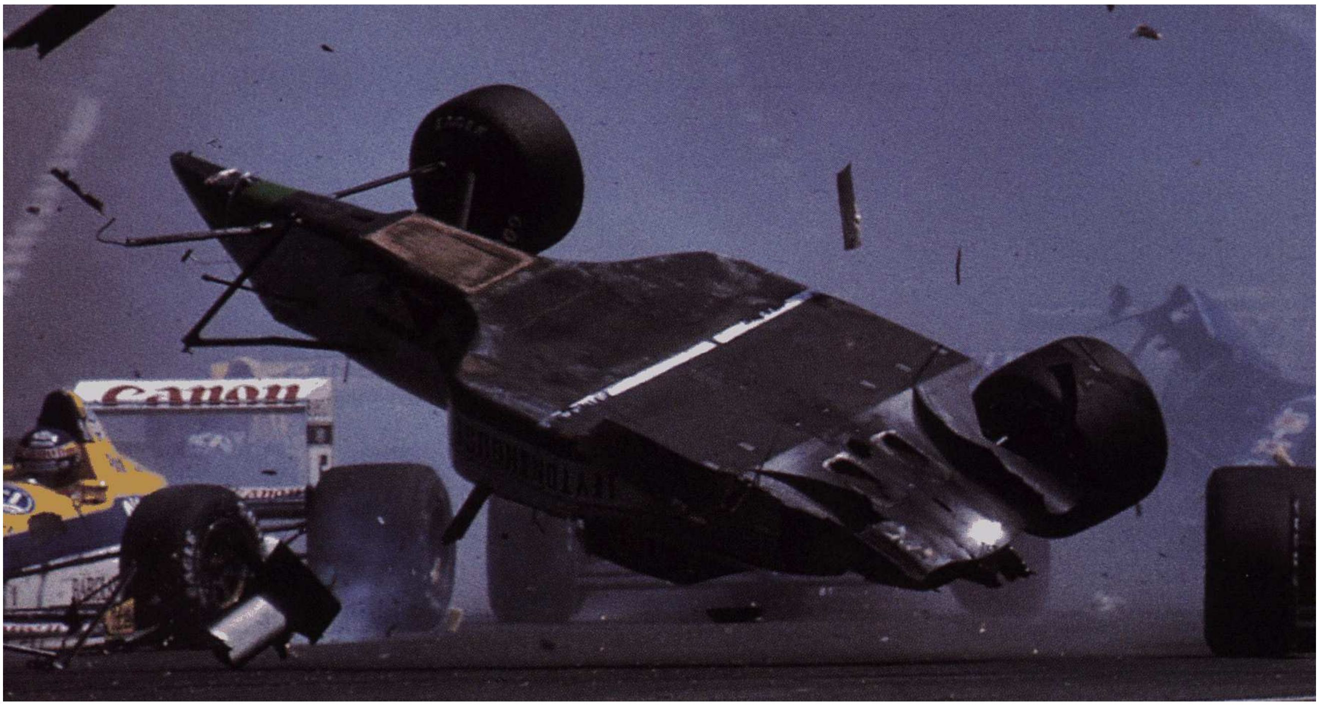
Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii

Hydrodynamique – Mémoire sur les forces et les mouvements des fluides

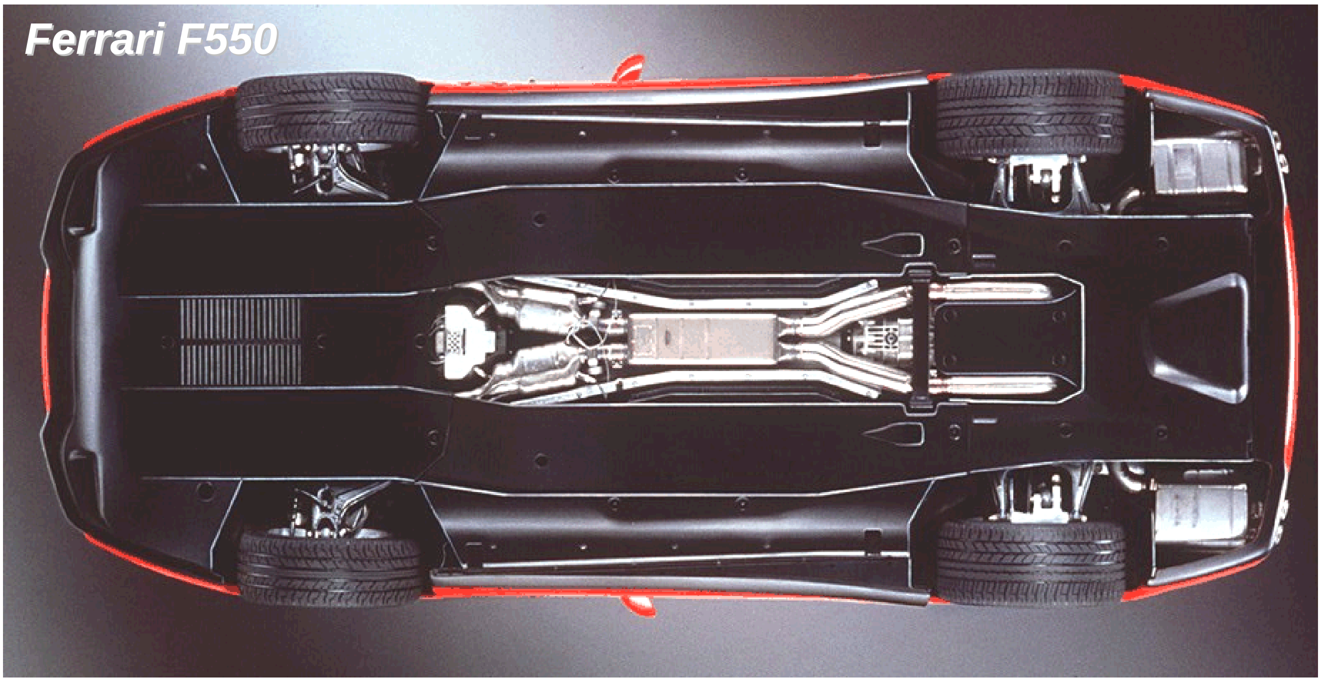
l'équation n'y comportait que 2 termes, le 3ème étant ajouté ultérieurement par Euler


DANIELIS BERNOULLI JOH. FIL.
MED. PROF. BASIL.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.
HYDRODYNAMICA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.
OPUS ACADEMICUM
AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM.
ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI;
Anno M D CC XXXVIII.
Typis JOH. HENR. DECKERI, Typographi Basiliensis.

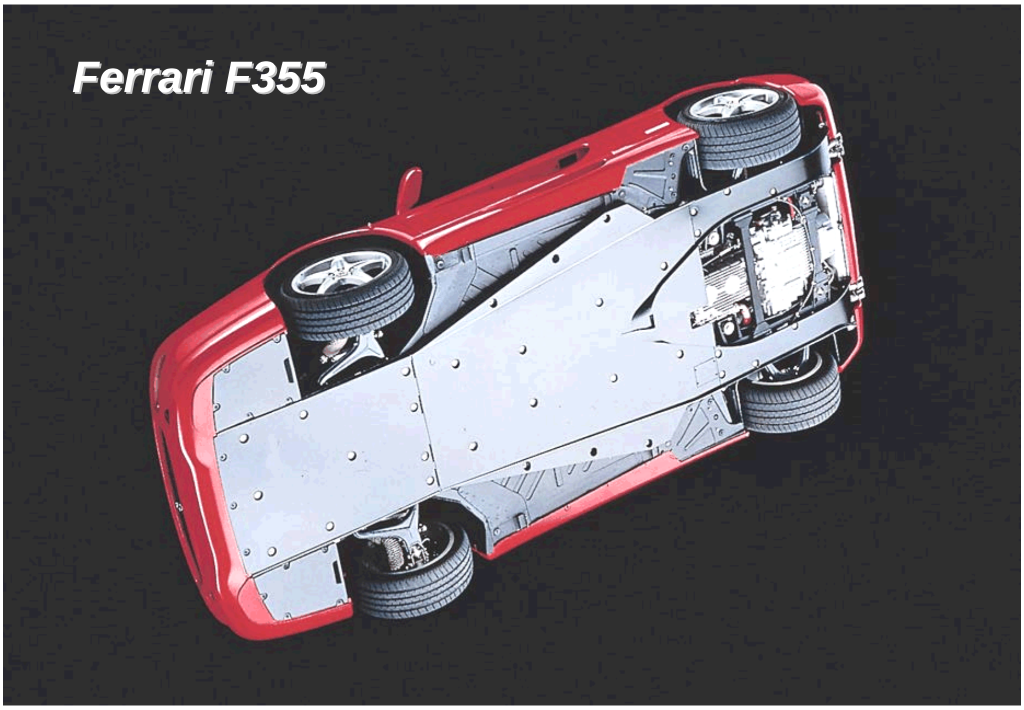
Soubassement à effet de sol ...



Soubassement à effet de sol ...

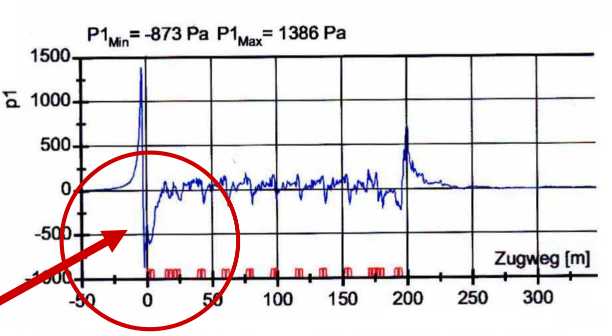


Soubassement à effet de sol ...



Bernoulli et … les trains à grande vitesse …

pression au niveau du ballast lors du passage du train

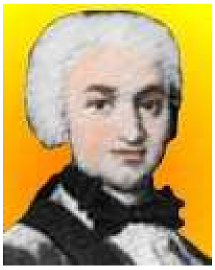


!

des cailloux du ballast sont déplacés !

THALYS

Henri Pitot

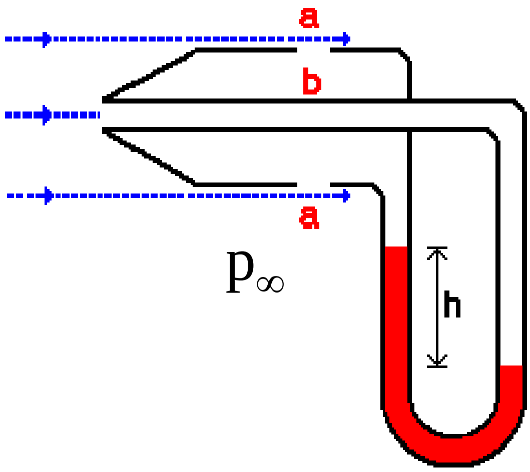


(1695 - 1771)

Application : le tube de Pitot …

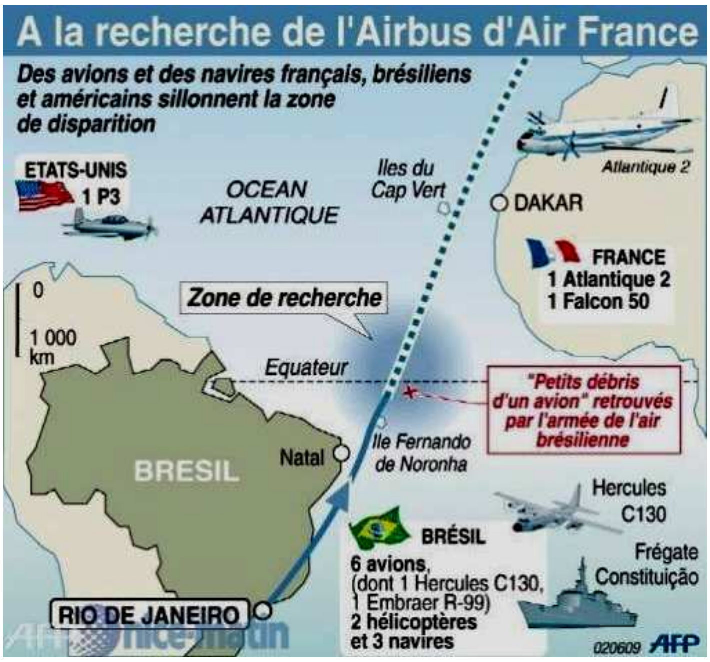
- **mesure la vitesse par une différence de pression**
- **(utilisé en 1730 pour mesurer la vitesse du courant de la Seine)**

$$p_b = p_\infty + \frac{\rho_0 v^2}{2}$$



$$\boxed{z + \frac{p}{\rho_0 g} + \frac{v^2}{2g} = C^{ste}}$$

Air France AF447 : Rio – Paris ...



... l'enquête montre l'incohérence des différentes vitesses mesurées par l'A330 ...

1er juin 2009

... Airbus avait décelé des dysfonctionnements sur les détecteurs de vitesse de ses avions A330 avant la catastrophe du vol AF 447 le 1er juin et avait invité ses clients à les changer ...

Théorème de Bernoulli n°2 ...

- dans un écoulement permanent
- irrotationnel
- d'un fluide parfait
- soumis à des forces massiques dérivant d'un potentiel

$$\boxed{\varepsilon = U + P + \frac{v^2}{2}}$$

- est constant dans tout l'écoulement

Théorème de Bernoulli n°2 ...

- on part de l'équation de Lamb

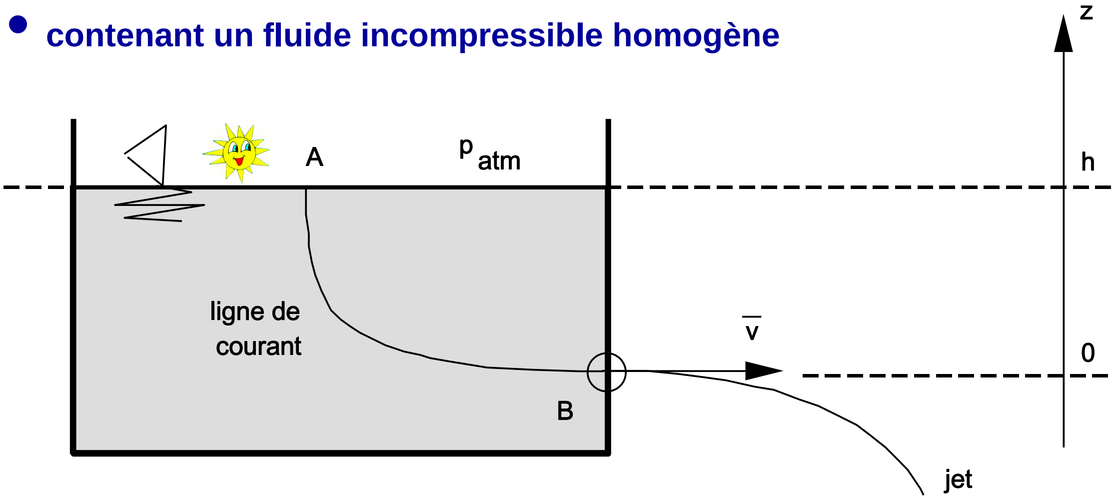
$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + 2\left(\overline{\omega} \times \overline{v}\right) = - \overline{\mathrm{grad}}\ \varepsilon$$

- écoulement permanent $\partial / \partial t = 0$
- soumis à des forces massiques dérivant d'un potentiel $\longrightarrow$ **U**
- écoulement irrotationnel $\longrightarrow$ $\overline{\omega} = 0$
- donc $\overline{\mathrm{grad}}\ \varepsilon = 0$ $\longrightarrow$ $\boxed{\varepsilon = C^{ste} \text{ dans tout l'écoulement}}$

Application : vidange d'un réservoir ...

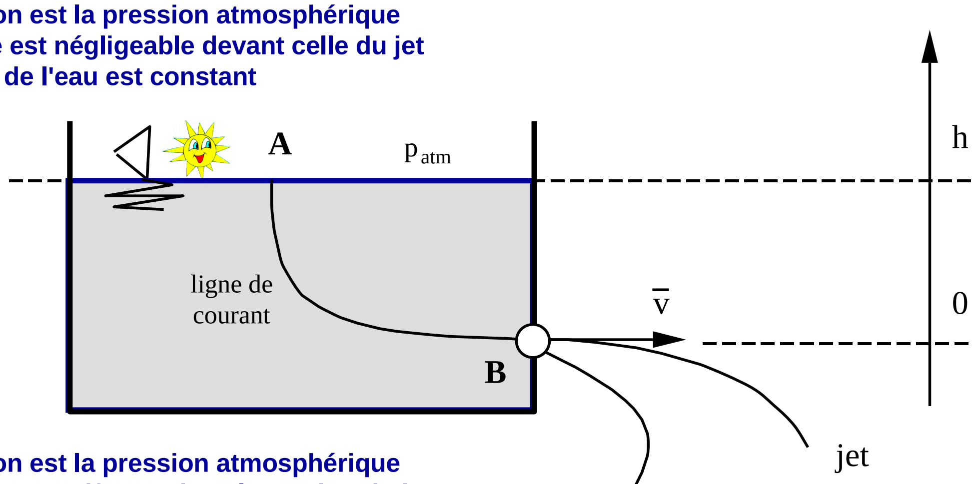
considérons

- un grand réservoir (dont le niveau reste constant)
- percé d'un petit orifice (la vitesse est uniforme dans le jet)
- contenant un fluide incompressible homogène

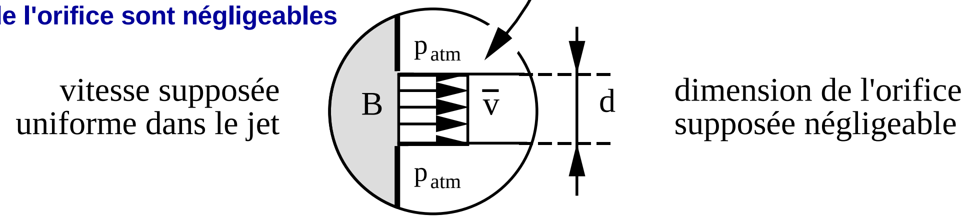


Application : vidange d'un réservoir ...

en A : la pression est la pression atmosphérique
la vitesse est négligeable devant celle du jet
le niveau de l'eau est constant



en B : la pression est la pression atmosphérique
la vitesse est uniforme dans la section du jet
les dimensions de l'orifice sont négligeables



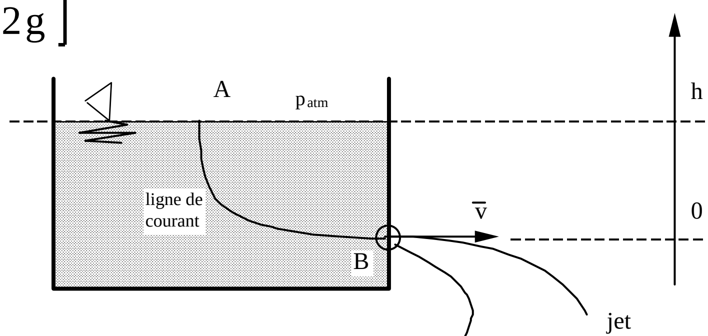
Application : vidange d'un réservoir ...

$$\left[z + \frac{p}{\rho_0 g} + \frac{v^2}{2g} \right]_A = \left[z + \frac{p}{\rho_0 g} + \frac{v^2}{2g} \right]_B \quad \text{car } P = \frac{p}{\rho_0}$$

(Bernoulli 1)

$$\left[h + \cancel{\frac{p_{atm}}{\rho_0 g}} + \cancel{\frac{v_A^2}{2g}} \right] = \left[0 + \cancel{\frac{p_{atm}}{\rho_0 g}} + \frac{v^2}{2g} \right]$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

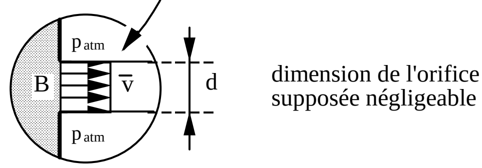


dans l'orifice :

$\varepsilon = C^{ste}$; $v = C^{ste}$; $z = \sim C^{ste}$ ⟶ $p = C^{ste} = p_{atm}$

(Bernoulli 2)

vitesse supposée
uniforme dans le jet



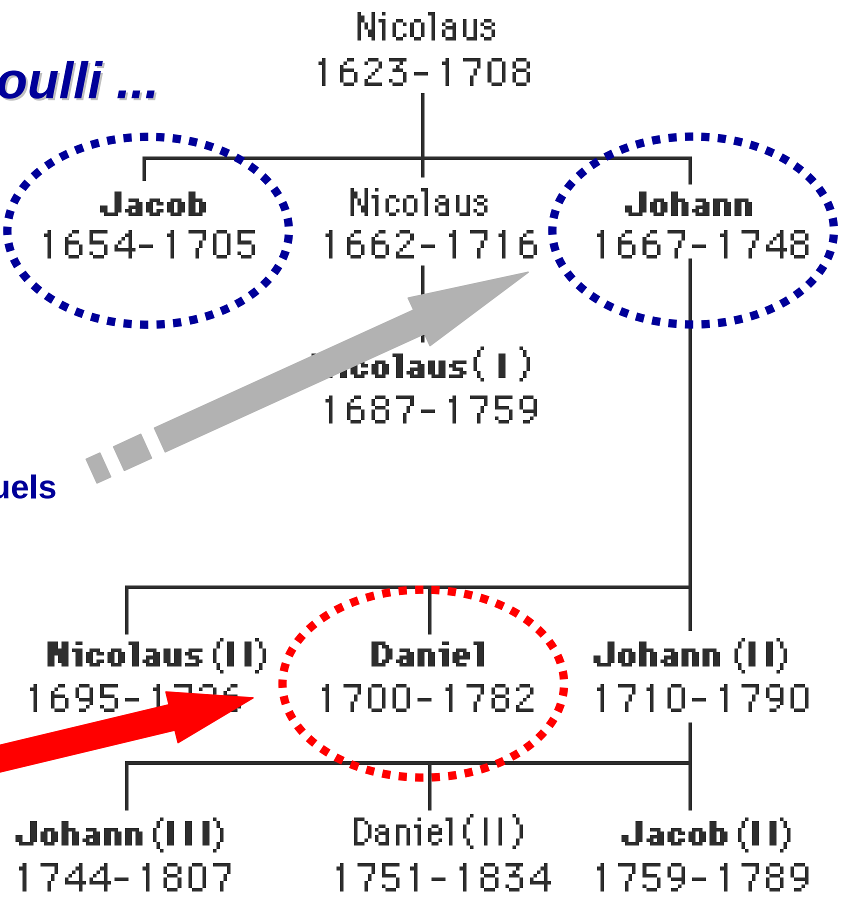
rappel : $\hat{p} = C^{ste}$ … pour un écoulement unidimensionnel

La famille Bernoulli ...

théorie des poutres

théorèmes des travaux virtuels

théorèmes de Bernoulli
en mécanique des fluides



BATir

SERVICE CONSTRUCTION, ARCHITECTURE ET URBANISME
DEPARTMENT OF BUILDING, ARCHITECTURE AND TOWN PLANNING

Dynamique des fluides visqueux

ULB

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

Introduction ...

Loi de comportement

Dans le chapitre " lois de comportement ", le fluide visqueux newtonien est défini par :

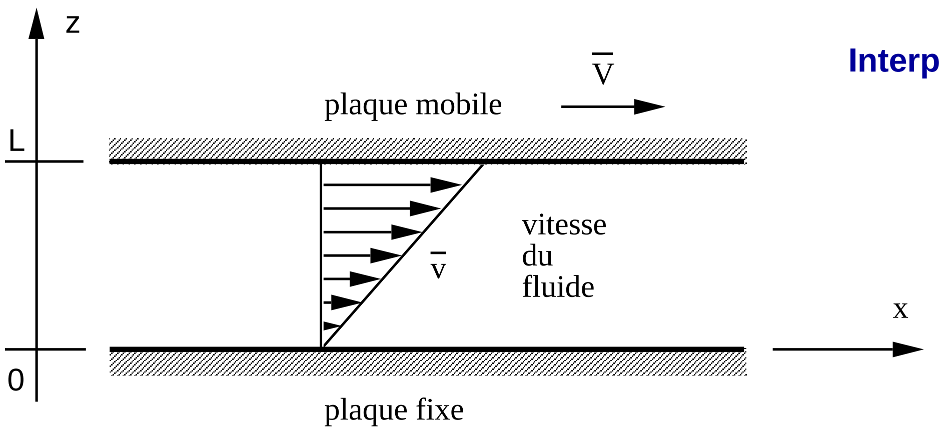
$$\boxed{\tau_{ij} = -\,p\,\delta_{ij} + \lambda\,\delta_{ij} V_{kk} + 2\,\mu\,V_{ij}}$$

ou pression coefficients de viscosité

$$\boxed{\tau_{ij} = -\,p\,\delta_{ij} + 2\,\mu\left(V_{ij} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,V_{kk}\right)}$$

avec l'hypothèse de Stokes

Introduction ...



Interprétation physique

- **le long de la plaque mobile :** $\bar{v} = \bar{V}$
- **le long de la plaque fixe :** $\bar{v} = 0$
- **on verra plus loin que, <u>sous certaines conditions</u>, la répartition de la vitesse est** $\bar{v} = V\,\dfrac{z}{L}\,\bar{1}_x$

Introduction ...

Interprétation physique

- reprenons la loi de comportement :

$$\tau_{ij} = - p\, \delta_{ij} + 2\, \mu \,(V_{ij} - \frac{1}{3}\, \delta_{ij}\, V_{kk})$$

- avec la vitesse donnée par :

$$\overline{v} = V \frac{z}{L}\, \overline{1}_x$$

- la seule composante du tenseur des contraintes est

$$\tau_{xz} = 2\mu\, V_{xz} \qquad \tau_{xz} = 2\mu\, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}\right)$$

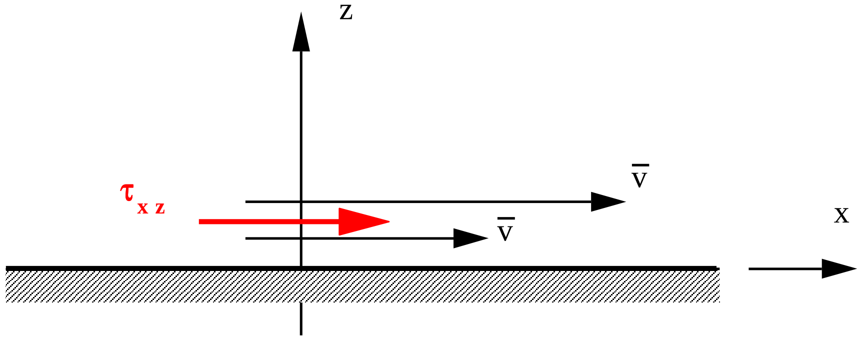
w = 0

$$\boxed{\tau_{xz} = \mu\, \frac{\partial u}{\partial z}}$$

Introduction ...

Interprétation physique

τ_{xz} est la contrainte tangentielle de frottement entre les filets fluides voisins, due à la différence de vitesse de ces filets fluides



$$\boxed{\tau_{xz} = \mu\, \frac{\partial u}{\partial z}}$$

Introduction ...

Unités des coefficients de viscosité

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

		dimensions	MKS	CGS
viscosité dynamique	μ	$\dfrac{\text{force} \times \text{temps}}{(\text{longueur})^2}$	$1 \text{ poiseuille} = 1 \dfrac{\text{kg}}{\text{m s}}$	$1 \text{ poise} = 1 \dfrac{\text{g}}{\text{cm s}}$
viscosité cinématique	ν	$\dfrac{(\text{longueur})^2}{\text{temps}}$	$1 \text{ myriastokes} = 1 \dfrac{\text{m}^2}{\text{s}}$	$1 \text{ stokes} = 1 \dfrac{\text{cm}^2}{\text{s}}$

Equations du mouvement ...

- **équations générales du mouvement** $\qquad \rho \dot{v}_i = f_i + \partial_j \tau_{ij}$
- **loi de comportement** $\qquad \tau_{ij} = - p\, \delta_{ij} + 2\, \mu \left(V_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} V_{kk} \right)$
- **vitesses de déformation** $\qquad V_{ij} = \frac{1}{2} \left(v_{i,j} + v_{j,i} \right)$
- **fluide incompressible** $\qquad \underbrace{\cancel{\dot{\rho}}}_{=0} + \rho\, \partial_i v_i = 0 \longrightarrow V_{ii} = 0$

Equations du mouvement ...

- **introduisons la définition de τ_{ij} dans les équations du mouvement**

$$\rho \dot{v}_i = f_i + \partial_j [- p\, \delta_{ij} + 2\, \mu\, V_{ij}]$$

- **tenons compte de la définition des vitesses de déformation**

$$\rho \dot{v}_i = f_i - \partial_i p + \mu\, \partial_j \left(\partial_i v_j + \partial_j v_i \right)$$

$$\rho \dot{v}_i = f_i - \partial_i p + \mu\, \partial_i \cancel{\partial_j v_j} + \mu\, \partial_j \partial_j v_i$$

$$\boxed{\rho \dot{v}_i = f_i - \partial_i p + \mu\, \partial_j \partial_j v_i}$$

équations de Navier-Stokes

Louis Navier

(1785 - 1836)

George Stokes

(1819 - 1903)

Equations du mouvement ...

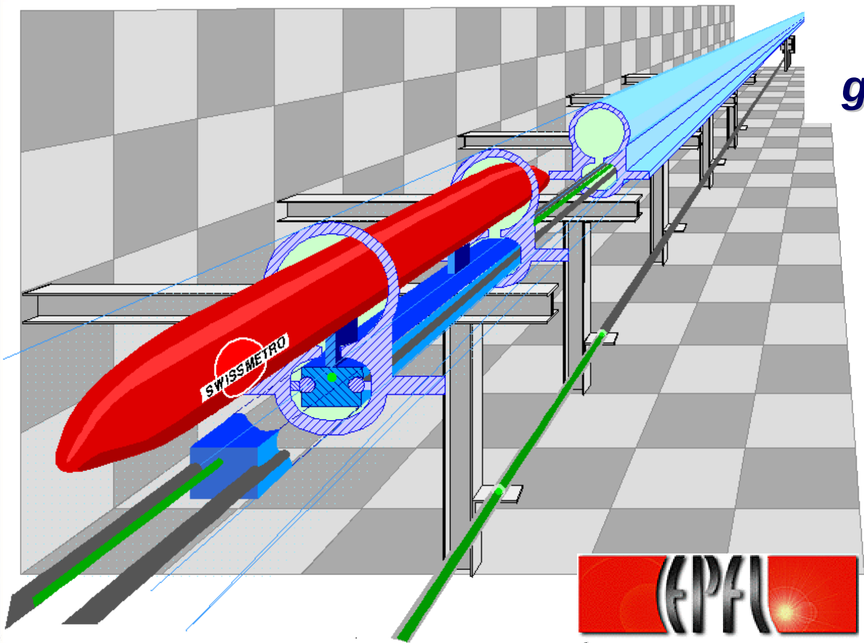
Equations de Navier-Stokes

$$\rho \dot{v}_i = f_i - \partial_i p + \mu\, \partial_j \partial_j v_i$$

$$\rho \left(\partial_0 v_i + v_k\, \partial_k v_i \right) = f_i - \partial_i p + \mu\, \partial_j \partial_j v_i$$

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] &= f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\, \Delta u \\ \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] &= f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\, \Delta v \\ \rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\, \Delta w \end{aligned} \right.$$

Le projet Swissmétro ...



projet de métro souterrain reliant les grandes villes suisses

tunnels à une profondeur de 40 à 150 mètres

vitesse max : ~ 430 km/h

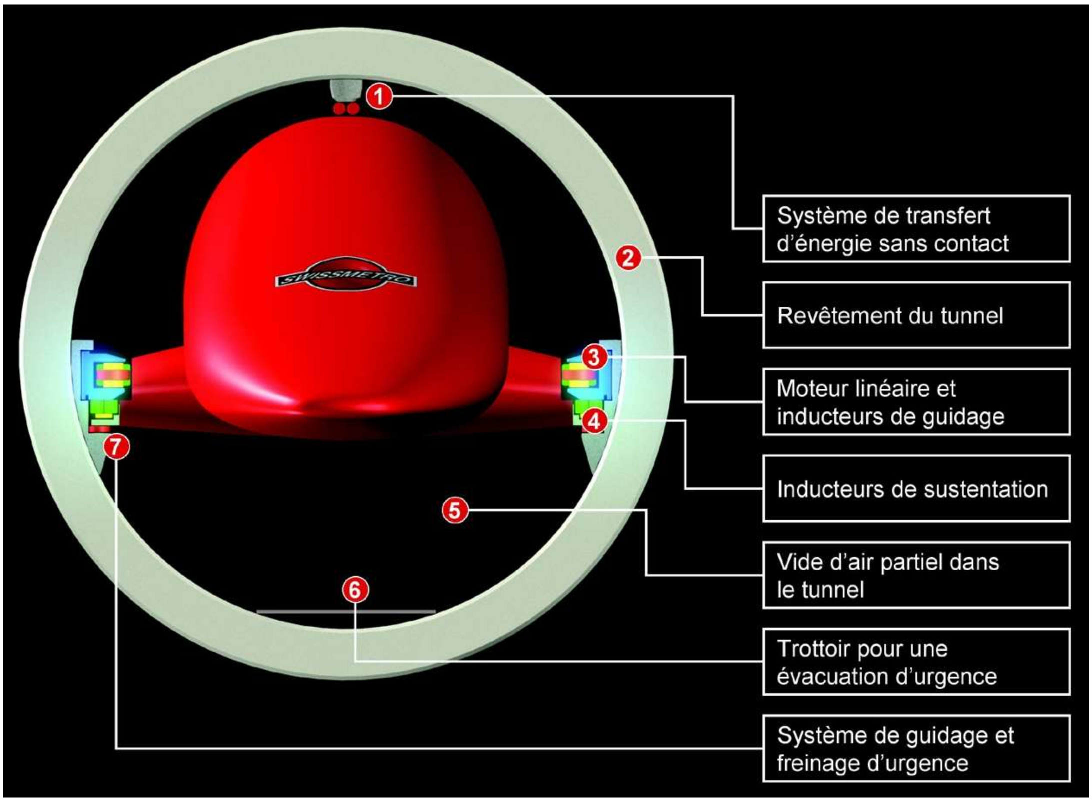
tunnels sous vide partiel pour diminuer la résistance de l'air

sustentation et guidage électromagnétiques

propulsion par moteur électrique linéaire

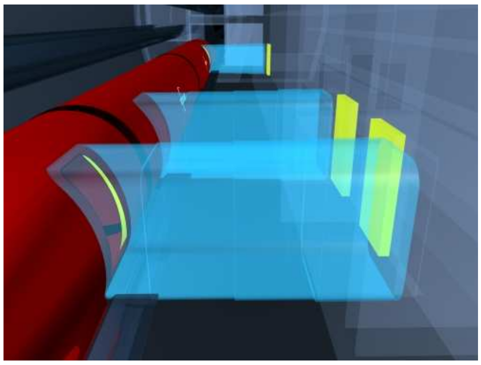
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

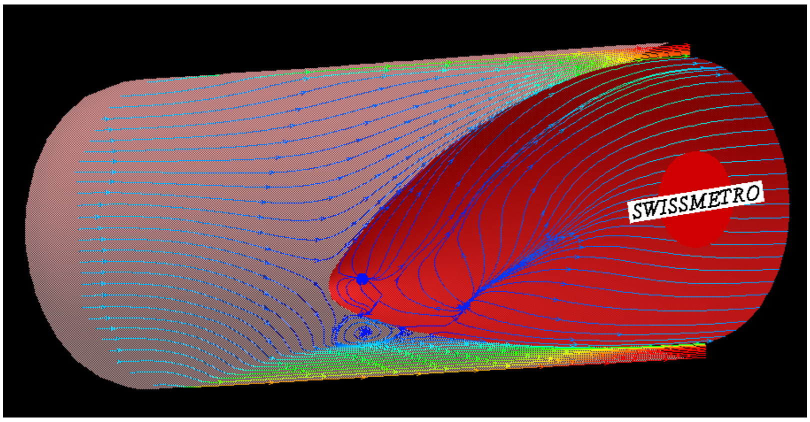
Le projet Swissmétro ...

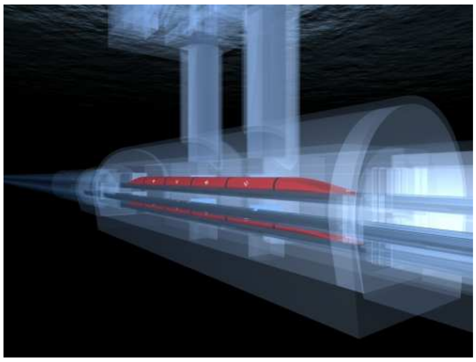


Le projet Swissmétro ...

vitesse max :
~ 430 km/h

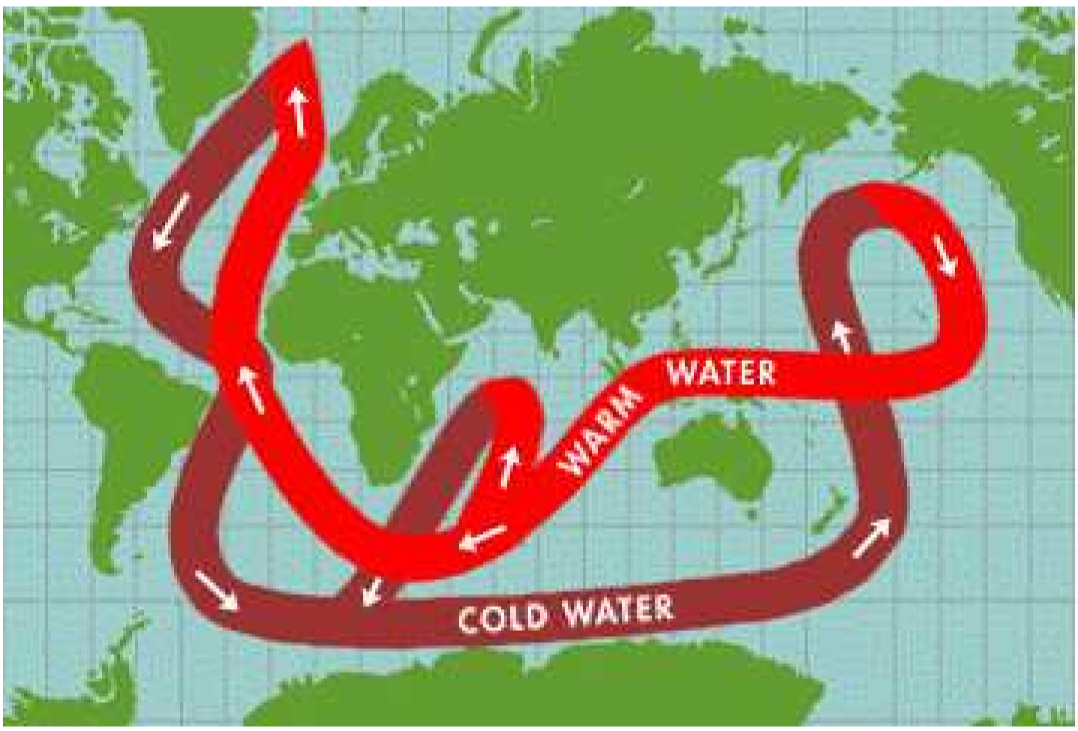






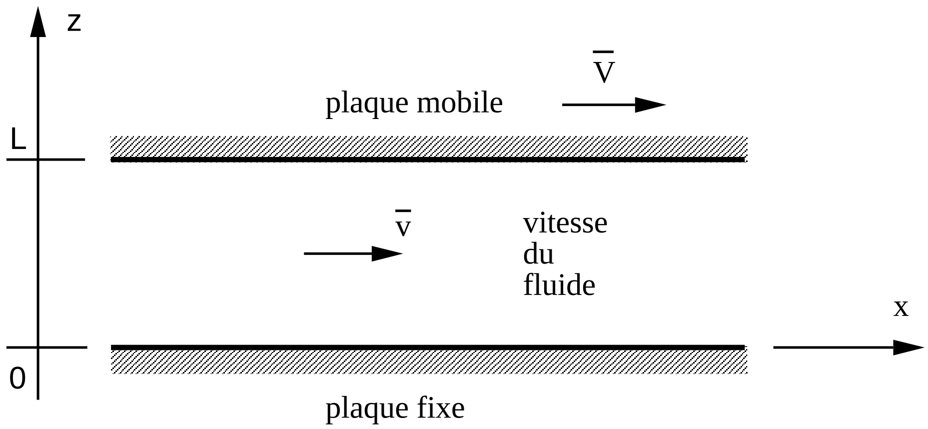
lignes de courant en écoulement visqueux incompressible

Les écoulements océaniques ...



Equations du mouvement ...

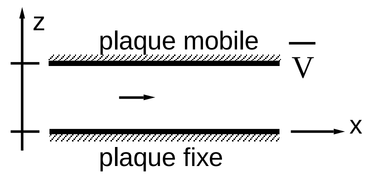
exemple : écoulement entre deux plaques parallèles



- écoulement permanent
- fluide visqueux incompressible
- écoulement unidimensionnel

Equations du mouvement ...

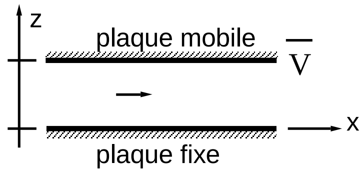
exemple : écoulement entre deux plaques parallèles



- **écoulement permanent** → $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$
- **fluide incompressible** $\dot{\rho} = 0$ $\quad \dot{\rho} + \rho \,\mathrm{div}\, \bar{v} = 0$ → $\mathrm{div}\, \bar{v} = 0$
- **fluide visqueux** → **équations de Navier-Stokes**
- **écoulement unidimensionnel** → $\bar{v} = \{ u , 0 , 0 \}$

Equations du mouvement ...

exemple : écoulement entre deux plaques parallèles



$$\mathrm{div}\,\overline{v}=0 \;\rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\overline{v} = \{u, 0, 0\} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=0 \rightarrow u=u(z)$$

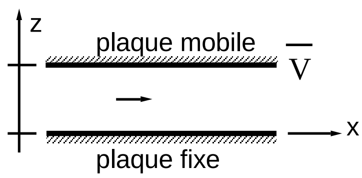
= 0 car stationnaire

= 0 car unidimensionnel

$$\begin{cases} \rho\left[\cancel{\dfrac{\partial u}{\partial t}} + u\cancel{\dfrac{\partial u}{\partial x}} + v\cancel{\dfrac{\partial u}{\partial y}} + w\cancel{\dfrac{\partial u}{\partial z}}\right] = f_x - \dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\,\Delta u \\ \rho\left[\cancel{\dfrac{\partial v}{\partial t}} + u\cancel{\dfrac{\partial v}{\partial x}} + v\cancel{\dfrac{\partial v}{\partial y}} + w\cancel{\dfrac{\partial v}{\partial z}}\right] = f_y - \dfrac{\partial p}{\partial y} + \cancel{\mu\,\Delta v} \\ \rho\left[\cancel{\dfrac{\partial w}{\partial t}} + u\cancel{\dfrac{\partial w}{\partial x}} + v\cancel{\dfrac{\partial w}{\partial y}} + w\cancel{\dfrac{\partial w}{\partial z}}\right] = f_z - \dfrac{\partial p}{\partial z} + \cancel{\mu\,\Delta w} \end{cases}$$

Equations du mouvement ...

exemple : écoulement entre deux plaques parallèles



$$u=u(z)$$

(*)

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{\partial \hat{p}}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{\partial \hat{p}}{\partial y} \\ 0 = \dfrac{\partial \hat{p}}{\partial z} \end{cases}$$

la pression motrice ne peut varier qu'en fonction de x

u (0) = 0

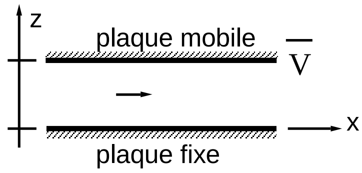
u (L) = V

le 1er membre est fonction de z et
le 2ème membre est fonction de x
donc : le 2ème membre doit être constant

$$\frac{d\hat{p}}{dx} = a \qquad \text{et donc} \qquad \hat{p} = ax + b$$

Equations du mouvement ...

exemple : écoulement entre deux plaques parallèles



- **1[er] cas : a = 0**

$$\mu \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$$

$$\boxed{u = V \frac{z}{L} \quad ; \quad v = 0 \quad ; \quad w = 0}$$

u (0) = 0

u (L) = V

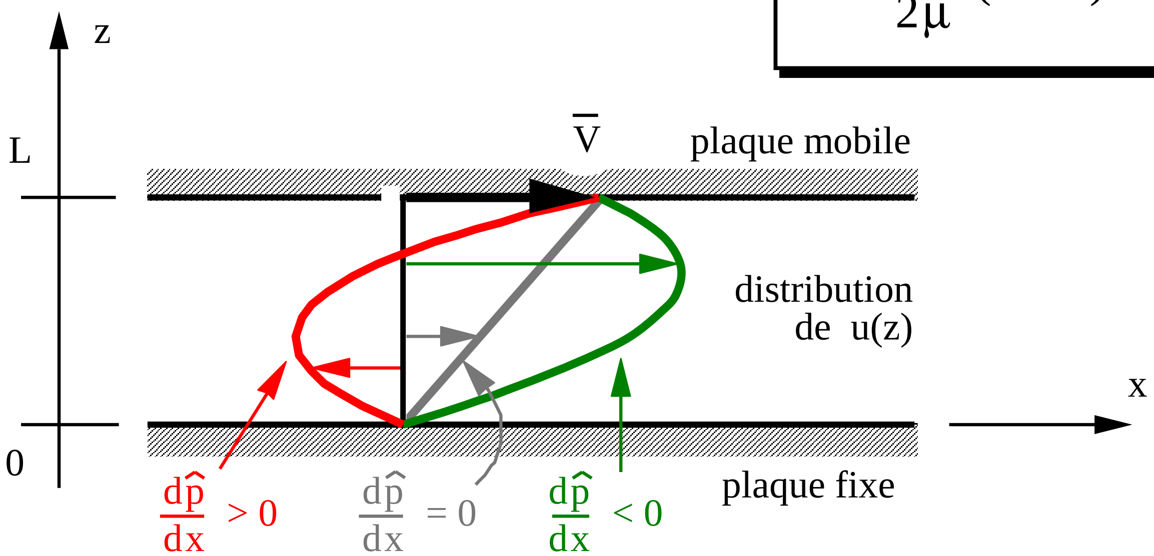
2[ème] cas : a ≠ 0

$$\boxed{u = \frac{a\,z}{2\mu}(z - L) + V \frac{z}{L} \quad ; \quad v = 0 \quad ; \quad w = 0}$$

Equations du mouvement ...

exemple : écoulement entre deux plaques parallèles

$$\boxed{u = \frac{a\,z}{2\mu}(z - L) + V \frac{z}{L}}$$



361

Equations du mouvement ...

la pression motrice

- **dans le cas le plus courant où la force de volume est la force de pesanteur, on a (z = axe vertical, positif vers le haut)**

$$\rho\,\overline{F} = -\rho g\,\overline{1z} \quad \text{avec} \quad \overline{F} = -\,\overline{\mathrm{grad}}\;U \quad \text{et} \quad U = g\;z$$

- **l'équation du mouvement s'écrit**

$$\rho\,\dot{v}_i = \rho F_i - \partial_i p + \mu\,\partial_j\,\partial_j\,v_i$$

- **ou** $$\rho\,\dot{\overline{v}} = -\,\overline{\mathrm{grad}}\;\hat{p} + \mu\,\Delta\,\overline{v}$$

- **en définissant la pression motrice** $$\hat{p} = p + \rho g z$$

362

Exemple : écoulement unidimensionnel ...

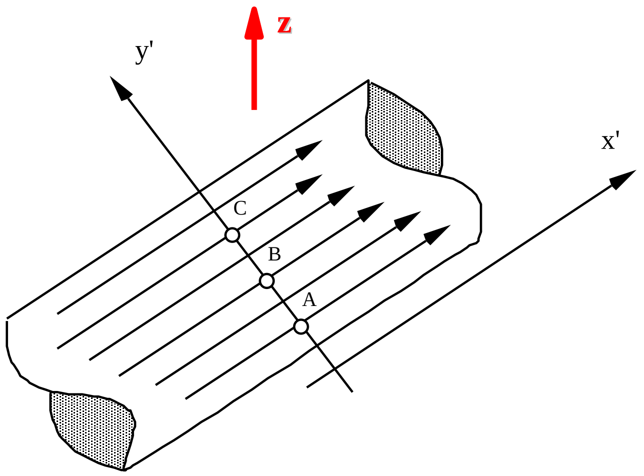
- **dans le cas où la force de volume est la force de pesanteur, on a (z = axe vertical, positif vers le haut), l'équation du mouvement s'écrit**

$$\rho\left[\,\partial_0 v_i + v_k\,\partial_k v_i\,\right] = -\,\partial_i\hat{p} + \mu\,\Delta\,v_i \qquad \hat{p} = p + \rho g z$$

- **considérons un écoulement permanent unidimensionnel incompressible**

$$\overline{v} = u\,\overline{1}_{x'} + 0\,\overline{1}_{y'} + 0\,\overline{1}_{z'}$$

$$\partial_0 v_i = 0$$

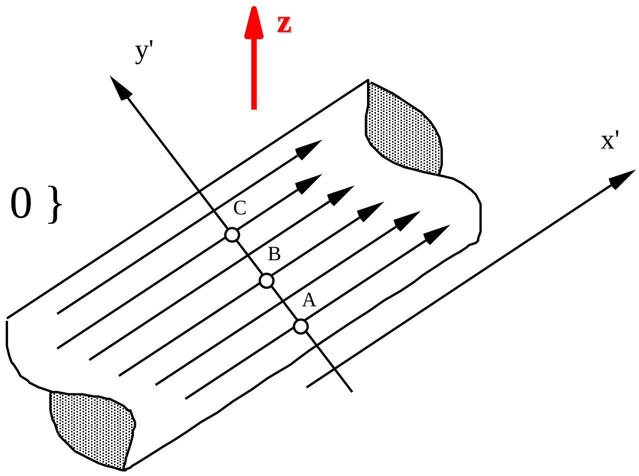


- **travaillons en axes x', y'**

Exemple : écoulement unidimensionnel ...

- **on travaille dans les axes x', y'**
- **incompressible :** $\rho^{\bullet}=0 \qquad \rho^{\bullet}+\rho\,\mathrm{div}\,\overline{v}=0 \longrightarrow \mathrm{div}\,\overline{v}=0$

$$\mathrm{div}\,\overline{v}=0 \;\rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x'}+\frac{\partial v}{\partial y'}+\frac{\partial w}{\partial z'}=0$$



- **unidimensionnel :** $\overline{v} = \{\, u\,,0\,,0 \,\}$

$$\frac{\partial u}{\partial x'}=0 \rightarrow u=u(y')$$

Exemple : écoulement unidimensionnel ...

$$\rho\left[\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}+u\,\cancel{\frac{\partial u}{\partial x'}}+v\,\cancel{\frac{\partial u}{\partial y'}}\right]= -\,\frac{\partial \hat{p}}{\partial x'}+\mu\,\Delta u$$

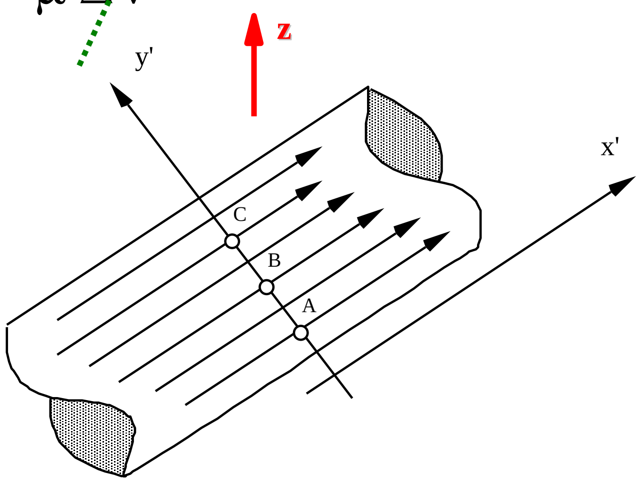
$$\rho\left[\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}+u\,\cancel{\frac{\partial v}{\partial x'}}+v\,\cancel{\frac{\partial v}{\partial y'}}\right]= -\,\frac{\partial \hat{p}}{\partial y'}+\cancel{\mu\,\Delta v}$$

- **en axes x', y'**

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial y'}=0$$

= 0 car stationnaire

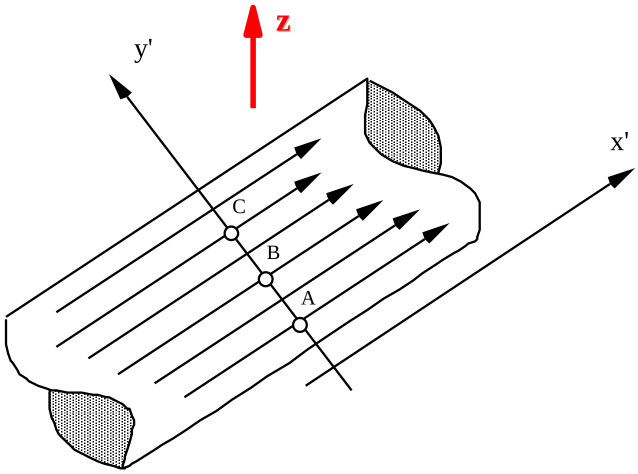
= 0 car unidimensionnel



Exemple : écoulement unidimensionnel ...

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial y'} = 0$$

- en axes x', y'



- donc $\hat{p}$ = constante

  dans toute section
  perpendiculaire à l'écoulement

$$\hat{p}_A = \hat{p}_B = \hat{p}_C$$

$p + \rho g z = C^{ste}$ dans toute section perpendiculaire à l'écoulement

Equations du mouvement ...

conditions aux limites

regardons les ordres des équations

- fluide parfait (équations d'Euler)

$$\rho\left(\partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i\right) = f_i - \partial_i p$$

- fluide visqueux newtonien incompressible

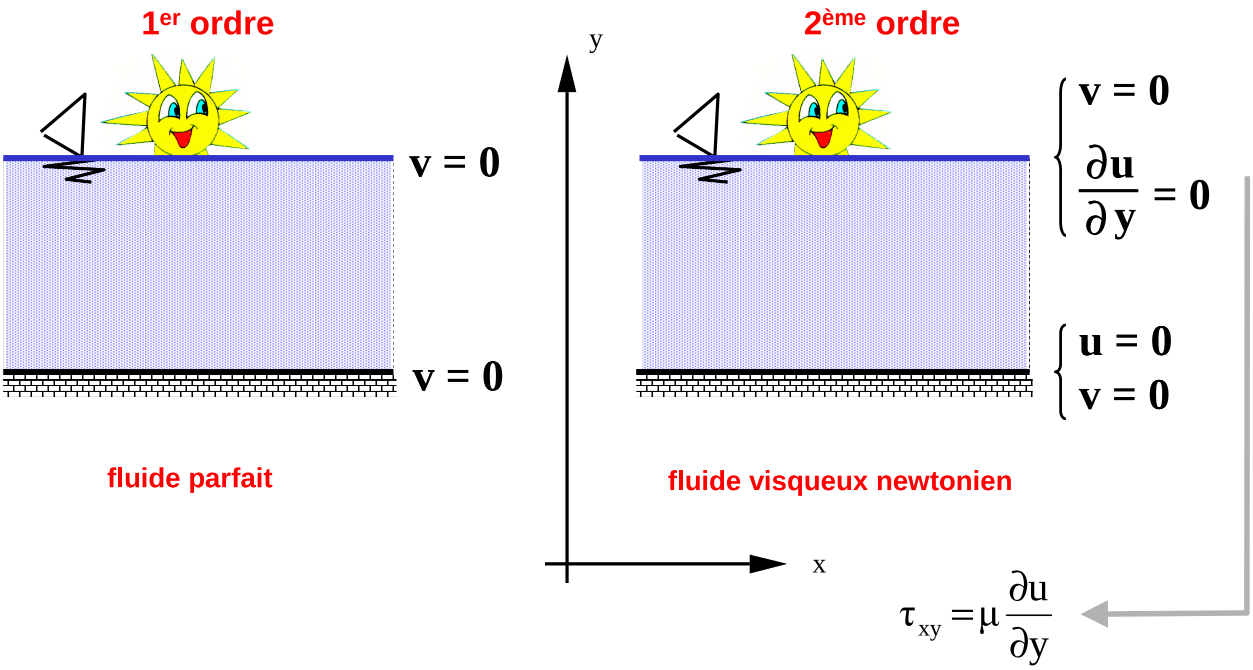
$$\rho\left(\partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i\right) = f_i - \partial_i p + \mu \Delta \mathbf{v_i}$$

le seul terme différent est celui dû à la viscosité : c'est le terme d'ordre le plus élevé !

avec / sans viscosité change l'ordre des équations
et donc change les conditions aux limites

Equations du mouvement ...

conditions aux limites



Osborne Reynolds

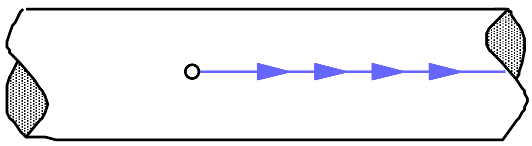
(1842 - 1912)

Mouvement turbulent ...

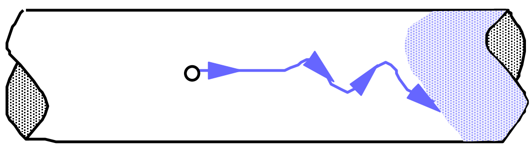
expérience de Reynolds

- considérons l'écoulement d'un fluide visqueux dans un long tube rectiligne

- pour de faibles débits, les lignes de courant sont rectilignes et parallèles : on dit que l'écoulement est **laminaire**



- lorsqu'on augmente le débit, à partir d'une certaine valeur, l'écoulement est perturbé par des remous et des tourbillons :
on dit que l'écoulement est **turbulent**



Mouvement turbulent ...

expérience de Reynolds (1883)

- le passage de l'état laminaire à l'état turbulent peut être prédit par la valeur d'un nombre sans dimensions : le nombre de Reynolds

$$\boxed{Re = \frac{U\,D}{\nu}}$$

- pour un tube circulaire :

U est la vitesse débitante (débit / section)
D est le diamètre du tube
ν est la viscosité cinématique

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

un nombre sans dimensions est construit à partir de grandeurs ayant des unités – une valeur "pivot" sépare deux états physiques différents

Mouvement turbulent ...

nombre de Reynolds

- de manière générale, le nombre de Reynolds est défini par :

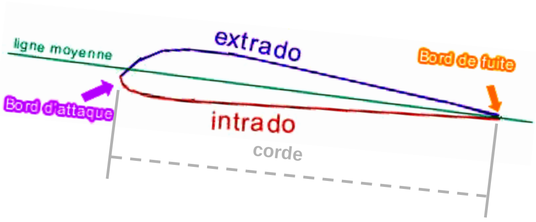
$$\boxed{Re = \frac{\text{vitesse caractéristique} \quad \text{longueur caractéristique}}{\text{viscosité cinématique}}}$$

- vitesse caractéristique : qui caractérise la cinématique de l'écoulement
(ex : vitesse débitante, vitesse de vol de l'avion, ...)
- longueur caractéristique : qui caractérise la géométrie de l'écoulement
(ex : diamètre de la conduite, corde de l'aile de l'avion, ...)
- valeur numérique critique : dépend du problème envisagé

Mouvement turbulent ...

nombre de Reynolds

- tube cylindrique : U = vitesse moyenne
  D = diamètre du tube
- aile d'avion : U = vitesse de l'avion
  D = corde de l'aile



En écoulement laminaire, comme en écoulement turbulent, les vitesses et la pression sont solutions des équations de Navier-Stokes

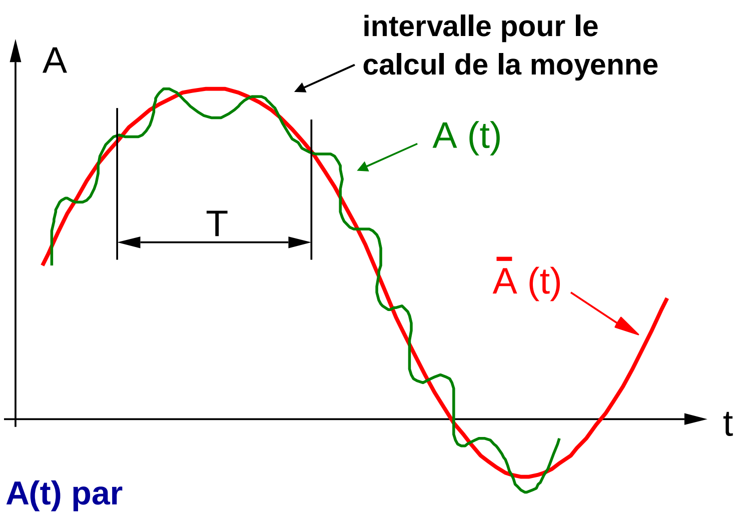
En écoulement turbulent, l'écoulement réel est souvent constitué de fluctuations autour d'un écoulement moyen.

Et c'est cet écoulement moyen qu'on veut calculer ...

Mouvement turbulent ...

contraintes de turbulence

- considérons une grandeur A(t) quelconque liée à l'écoulement



- on définit la valeur moyenne de A(t) par

$$\boxed{\overline{A}(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} A(t+\tau)\, d\tau}$$

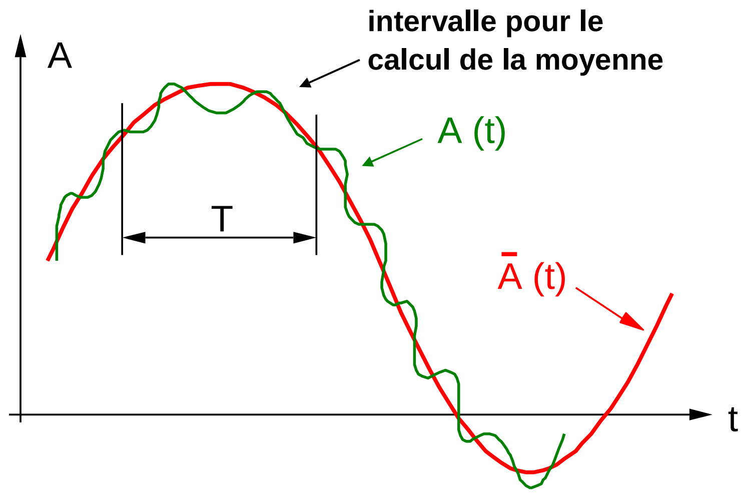
Mouvement turbulent ...

contraintes de turbulence

- **l'intervalle T sur lequel on calcule la moyenne doit être :**

  assez grand pour que $\overline{A}$ (t) ne dépende pas de T

  petit par rapport aux constantes de temps de l'écoulement moyen



- **on décompose alors A (t) selon**

$$\boxed{A(t) = \overline{A}(t) + A'(t)} \qquad \text{avec, par définition,} \qquad \overline{A'}(t) = 0$$

Mouvement turbulent ...

contraintes de turbulence

- **dans le cas d'un produit de deux grandeurs A et B :**

$$\overline{A\,B} = \overline{(\overline{A} + A')(\overline{B} + B')} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A'\,B'}$$

- **dans le cas des dérivées :**

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{A} \qquad \text{et} \qquad \overline{\frac{\partial A}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{A}$$

Mouvement turbulent ...

contraintes de turbulence

- repartons des équations de Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho\, v_k\, \partial_k v_i = f_i - \partial_i p + \mu\, \Delta v_i$$

- et calculons la moyenne

$$\rho \overline{\frac{\partial v_i}{\partial t}} + \rho\, \overline{v_k\, \partial_k v_i} = f_i - \overline{\partial_i p} + \mu\, \overline{\Delta v_i}$$

Mouvement turbulent ...

contraintes de turbulence

$$\overline{A\,B} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A'\,B'} \qquad \overline{\frac{\partial A}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{A} \qquad \overline{\frac{\partial A}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{A}$$

$$\rho \overline{\frac{\partial v_i}{\partial t}} + \rho\, \overline{v_k\, \partial_k v_i} = f_i - \overline{\partial_i p} + \mu\, \overline{\Delta v_i}$$

$$\rho \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial t} + \rho\, \overline{v}_k\, \partial_k \overline{v}_i \underbrace{+ \rho\, \overline{v'_k\, \partial_k v'_i}}_{\text{à calculer ...}} = f_i - \partial_i \overline{p} + \mu\, \Delta \overline{v}_i$$

Mouvement turbulent ...

contraintes de turbulence

$$\overline{A\,B} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A'\,B'} \qquad \overline{\frac{\partial A}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{A} \qquad \overline{\frac{\partial A}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{A}$$

$$\rho\,\overline{v'_k\,\partial_k v'_i} = ?$$

- repartons de l'équation de continuité moyennée

$$\overline{\partial_i v_i} = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_i \overline{v_i} = 0 \quad \text{et donc} \quad \partial_i v'_i = 0$$

- avec $\overline{\partial_k\left(v'_k v'_i\right)} = \overline{v'_k\,\partial_k v'_i} + \cancel{\overline{v'_i\,\partial_k v'_k}}$

Mouvement turbulent ...

contraintes de turbulence

$$\rho\,\overline{v'_k\,\partial_k v'_i} = \rho\,\partial_k\left(\overline{v'_k v'_i}\right)$$

$$\rho\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \rho\,\overline{v_k}\,\partial_k \overline{v_i} + \rho\,\overline{v'_k\,\partial_k v'_i} = f_i - \partial_i \overline{p} + \mu\,\Delta \overline{v_i}$$

$$\rho\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \rho\,\overline{v_k}\,\partial_k \overline{v_i} = f_i - \partial_i \overline{p} - \rho\,\partial_k \overline{v'_k v'_i} + \mu\,\Delta \overline{v_i}$$

vient de ... $\partial_j \tau_{ij}$

définit les contraintes de turbulence...

$$\boxed{\tau'_{ij} = -\rho\,\overline{v'_i\,v'_j}}$$

Equations de Navier-Stokes moyennées ...

$$\rho \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial t} + \rho\, \overline{v}_k\, \partial_k \overline{v}_i = f_i - \partial_i \overline{p} + \partial_j \tau'_{ij} + \mu \Delta \overline{v}_i$$

- l'apparition des contraintes de turbulence signifie que les équations ont été moyennées $\longrightarrow$ on peut supprimer les — de moyennes

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho\, v_k\, \partial_k v_i = f_i - \partial_i p + \partial_j \tau'_{ij} + \mu \Delta v_i$$

- la viscosité se traduit par le terme "laplacien" et par les contraintes de turbulence

  - ❖ les contraintes de turbulence résultent de l'échange de quantité de mouvement entre des filets fluides voisins, lorsque les particules passent par turbulence d'un filet de courant au filet voisin.

  - ❖ Un fluide parfait est donc toujours en écoulement laminaire puisque ces échanges sont dus à la viscosité

Les théorèmes de Bernoulli ...

rappel : les équations de Lamb

- pour un fluide parfait (fluide homogène, incompressible, dans la pesanteur)

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + 2\, \rho_0 (\overline{\omega} \times \overline{v}) = - \overline{\text{grad}}\, [p + \rho_0 g z + \rho_0 \frac{v^2}{2}]}$$

- pour un fluide visqueux (fluide homogène, incompressible, dans la pesanteur)

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + 2\, \rho_0 (\overline{\omega} \times \overline{v}) = - \overline{\text{grad}}\, [p + \rho_0 g z + \rho_0 \frac{v^2}{2}] + \overline{f}'}$$

- la différence entre les deux équations est dans le terme $\overline{f}'$

Les théorèmes de Bernoulli ...

rappel : les effets de la viscosité

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + 2\,\rho_0(\,\overline{\omega} \times \overline{v}\,) = -\,\overline{\mathrm{grad}}\;[\,p + \rho_0 g z + \rho_0 \frac{v^2}{2}\,] + \overline{f'}}$$

$$f'_i = \partial_j \tau''_{ij} + \partial_j \tau'_{ij}$$

forces dues aux contraintes visqueuses — **forces dues aux contraintes turbulentes**

$$\tau''_{ij} = 2\,\mu\,V_{ij} \qquad \tau'_{ij} = -\,\rho\,\overline{v'_i\,v'_j}$$

Les théorèmes de Bernoulli ...

rappel : pour un fluide parfait, homogène, incompressible, dans la pesanteur

- **théorème de Bernoulli n°1**
  Dans un écoulement permanent d'un fluide parfait homogène dans le champ de la pesanteur, l'énergie spécifique totale est constante le long d'une ligne de courant

$$\varepsilon = p + \rho_0 g z + \rho_0 \frac{v^2}{2} = C^{ste} \quad \text{le long d'une ligne de courant}$$

- **théorème de Bernoulli n°2**
  Dans un écoulement permanent irrotationnel d'un fluide parfait homogène dans le champ de la pesanteur, l'énergie spécifique totale est constante dans tout l'écoulement

$$\varepsilon = p + \rho_0 g z + \rho_0 \frac{v^2}{2} = C^{ste} \quad \text{dans tout l'écoulement}$$

Le théorème de Bernoulli n°3 ...

rappel : pour un fluide visqueux, homogène, incompressible, dans la pesanteur

Considérons une ligne de courant d'un écoulement permanent d'un fluide visqueux homogène dans le champ de la pesanteur. La charge au point situé en aval est inférieure à la charge au point situé en amont.
La différence est la perte de charge.

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + 2\,\rho_0 (\,\bar{\omega} \times \bar{v}\,) = -\,\overline{\text{grad}}\ [\,p + \rho_0 g z + \rho_0 \frac{v^2}{2}\,]\ + \bar{f}'}$$

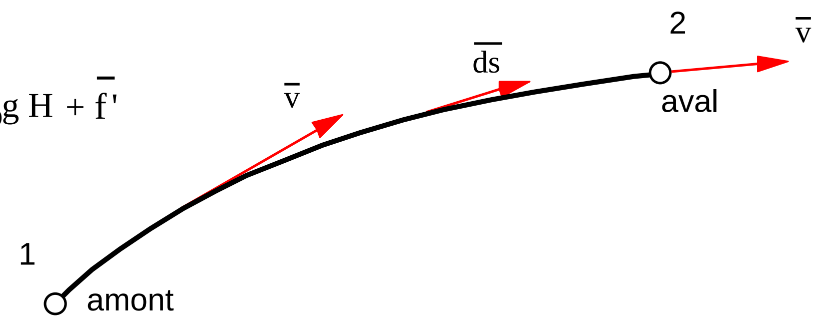
$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + 2\,\rho_0 (\,\bar{\omega} \times \bar{v}\,) = -\,\overline{\text{grad}}\ \ \rho_0 g\, \underbrace{[\,\frac{p}{\rho_0 g} + z + \frac{v^2}{2\,g}\,]}_{H\ =\ \text{la charge}}\ + \bar{f}'}$$

BATir

Le théorème de Bernoulli n°3 ...

rappel : pour un fluide visqueux, homogène, incompressible, dans la pesanteur

$$\cancel{\rho_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}} + 2\,\rho_0 (\,\bar{\omega} \times \bar{v}\,) = -\,\overline{\text{grad}}\ \ \rho_0 g\, H\ + \bar{f}'$$



multiplions scalairement
par la vitesse
(dx_i proportionnel à v_i)

$$0 = -\,dx_i\ \ \partial_i\,(\rho_0 g H)\ + f_i'\,dx_i$$

et intégrons le long de la ligne de courant entre le point amont (1) et le point aval (2)

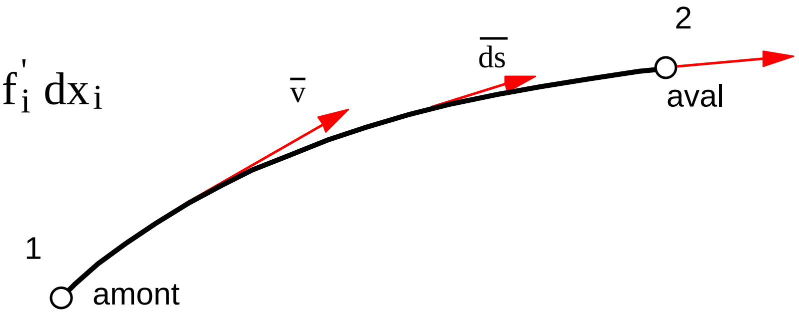
$$\int_1^2 \partial_i\,(\rho_0\, g\, H)\, dx_i\ = \int_1^2 f_i'\, dx_i$$

BATir

Le théorème de Bernoulli n°3 ...

rappel : pour un fluide visqueux, homogène, incompressible, dans la pesanteur

$$\int_1^2 \partial_i (\rho_0\, g\, H)\, dx_i = \int_1^2 f'_i\, dx_i$$



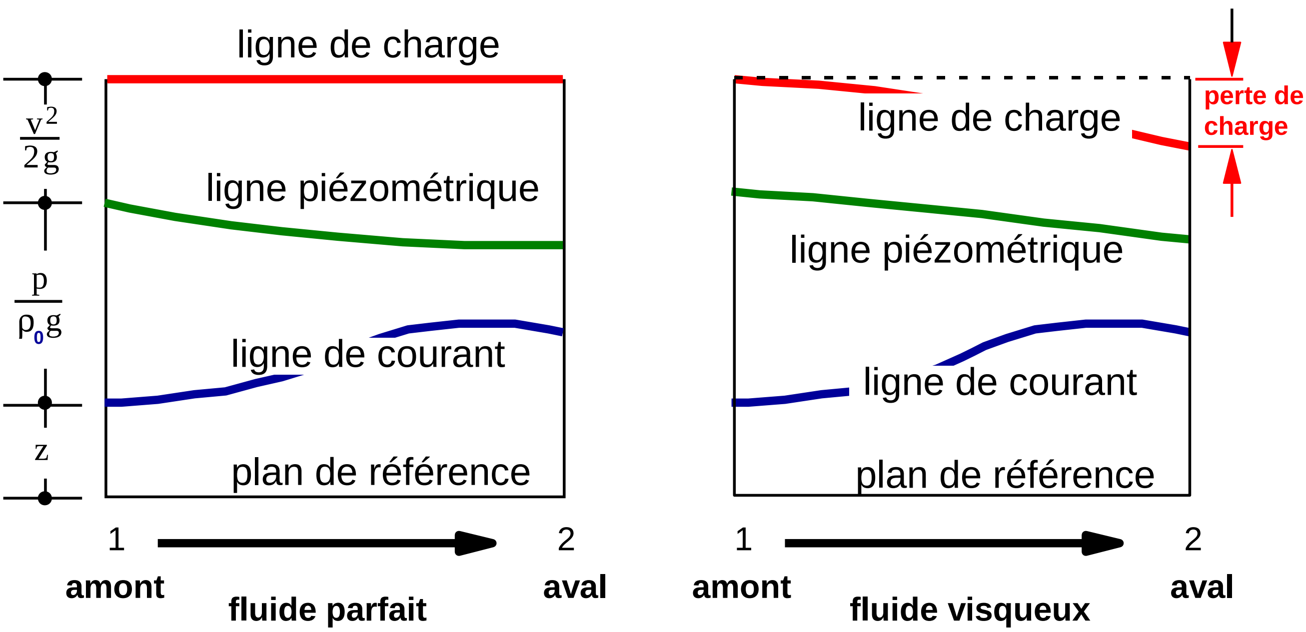
$$\rho_0 g\, [\, H_2 - H_1\,] = \int_1^2 f'_i\, dx_i$$

énergie dissipée par frottement
visqueux et turbulence (< 0)

$$\boxed{H_1 = H_2 + \Delta H}$$

ΔH = perte de charge

Le théorème de Bernoulli n°3 ...



fluide incompressible homogène

Le théorème de Bernoulli n°4 ...

rappel : pour un fluide visqueux, homogène, incompressible, dans la pesanteur

- **théorème de Bernoulli n°4**

L'application du théorème de Bernoulli n°3 à l'écoulement dans une tuyauterie est malaisée car

1. **la répartition des vitesses n'est pas uniforme dans une section transversale (en effet, la vitesse est nulle le long des parois)**
2. **la seule grandeur utile est le débit, et pas les vitesses locales**

On va donc s'intéresser à un tube de courant (et non à une ligne de courant) en définissant la vitesse débitante (vitesse uniforme U qui donnerait le même débit).

$$\boxed{U\,S = \int_S v\, dS}$$

U = vitesse débitante
v = vitesse réelle
S = section droite du tube de courant

Le théorème de Bernoulli n°4 ...

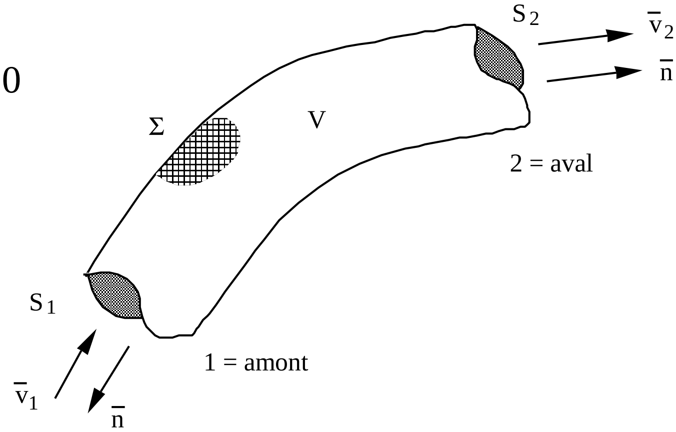
rappel : pour un fluide visqueux, homogène, incompressible, dans la pesanteur

Repartons de l'équation du mouvement

$$\cancel{\rho_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}} + 2\,\rho_0(\bar{\omega} \times \bar{v}) = -\,\overline{grad}\;\rho_0 g\, H + \bar{f}'$$

Multiplions les deux membres scalairement par la vitesse et intégrons au volume V de l'écoulement compris entre une section amont (1) et une section aval (2)

$$-\int_V \partial_i\,(\rho_0\, g\, H)\; v_i\, dV + \int_V f'_i\, v_i\, dV = 0$$



et intégrons le 1er terme par parties

$$\partial_i\,(\rho_0\, g\, H)\; v_i = \partial_i\,(\rho_0\, g\, H\, v_i) - (\rho_0\, g\, H)\,\cancel{\partial_i v_i}$$

= 0 car incompressible

Le théorème de Bernoulli n°4 ...

rappel : pour un fluide visqueux, homogène, incompressible, dans la pesanteur

$$-\int_V \partial_i (\rho_0\, g\, H\, v_i)\, dV + \int_V f_i'\, v_i\, dV = 0$$

$$\partial_i (\rho_0\, g\, H)\, v_i = \partial_i (\rho_0\, g\, H\, v_i)$$

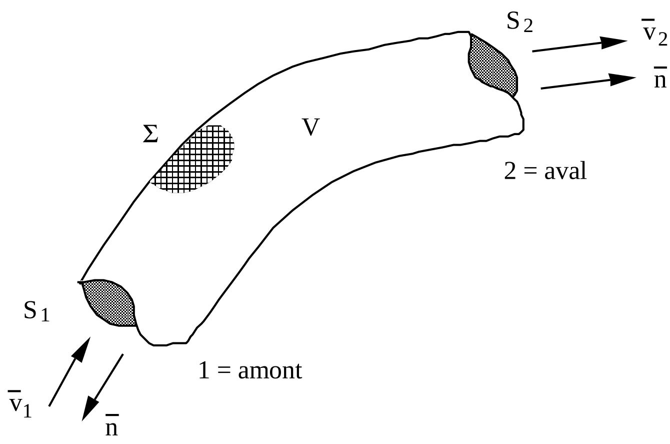
en appliquant le théorème de Gauss

$$-\oint_S (\rho_0\, g\, H\, v_i)\, n_i\, dS + \int_V f_i'\, v_i\, dV = 0$$

où la surface se décompose en :

- S_1 (entrée amont)
- S_2 (sortie aval)
- Σ (surface latérale

sur la surface Σ : $v_i\, n_i = 0$
par définition du tube de courant)



Le théorème de Bernoulli n°4 ...

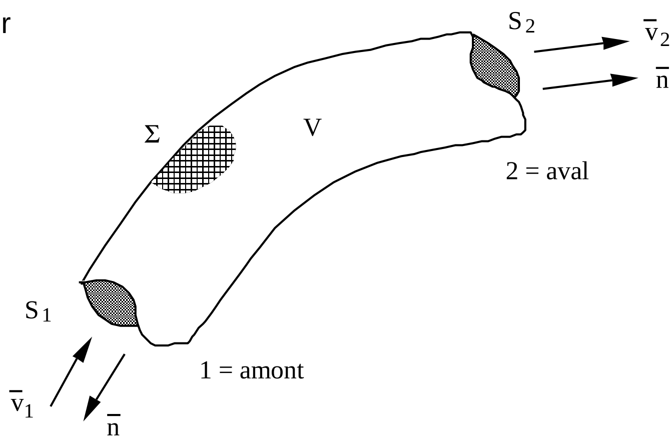
rappel : pour un fluide visqueux, homogène, incompressible, dans la pesanteur

$$-\oint_S (\rho_0\, g\, H\, v_i)\, n_i\, dS + \int_V f_i'\, v_i\, dV = 0$$

$$H = z + \frac{p}{\rho_0 g} + \frac{v^2}{2g}$$

en vertu de la définition de H, il reste à calculer
(sur S_1 et S_2) des termes de la forme :

$$\int_S v^3\, dS \quad \text{et} \quad \int_S [\, p + \rho_0 g z\,]\, v\, dS$$



Le théorème de Bernoulli n°4 ...

rappel : pour un fluide visqueux, homogène, incompressible, dans la pesanteur

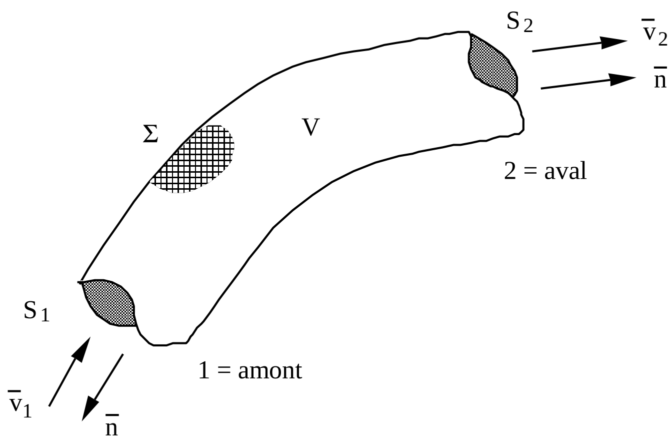
Cas du terme $\displaystyle\int_S v^3\, dS$

définissons le coefficient α tel que

$$\int_S v^3\, dS = \int_S \frac{v^3}{U^3}\, U^3 dS = \alpha\, U^3 S$$

$$\boxed{\alpha = \int_S \frac{v^3}{U^3}\,\frac{dS}{S}}$$

montrant que $\alpha = 1$
si la vitesse v est uniforme



Le théorème de Bernoulli n°4 ...

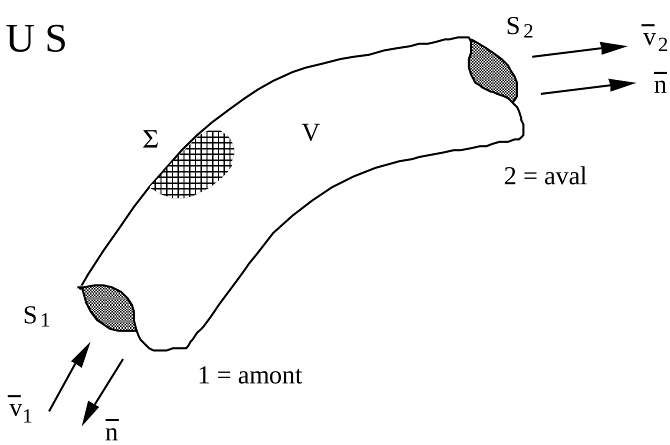
rappel : pour un fluide visqueux, homogène, incompressible, dans la pesanteur

Cas du terme $\displaystyle\int_S [\, p + \rho_0 g z \,]\, v\, dS$

on a

$$\int_S [\, p + \rho_0 g z \,]\, v\, dS = \int_S \widehat{p}\, v\, dS = \widehat{p}\, U\, S$$

si on considère des sections dans des conduites rectilignes pour lesquelles on a montré que $\widehat{p} = C^{ste}$ dans la section



Le théorème de Bernoulli n°4 ...

rappel : pour un fluide visqueux, homogène, incompressible, dans la pesanteur

Finalement, on a

$$\left[\alpha\,\rho_0 \frac{U^3}{2} S + (p + \rho_0 g\, z)\, U\, S\right]_2 - \left[\alpha\,\rho_0 \frac{U^3}{2} S + (p + \rho_0\, g z)\, U\, S\right]_1 = -\,\Delta H_{1-2}\ (U\, S\, \rho_0 g)$$

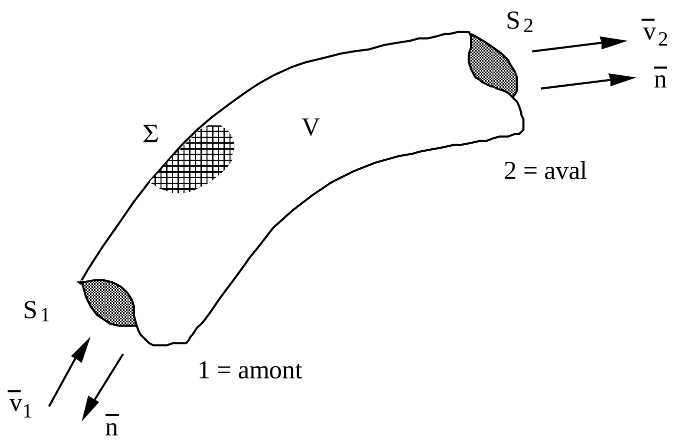
avec la perte de charge entre 1 et 2 définie par

$$\Delta H_{1-2} = -\,\frac{1}{\rho_0 g\, U\, S} \int_V f_i'\, v_i\, dV$$

par conservation du débit, on a

$$U_1\, S_1 = U_2\, S_2$$

et on divise les deux membres par **(U S ρ_0 g)**

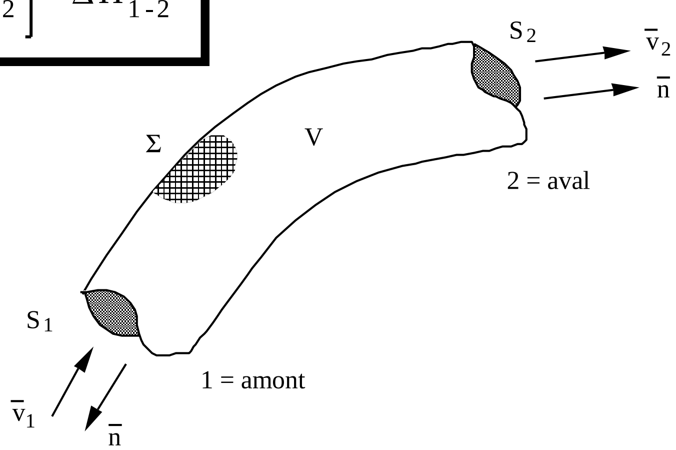


Le théorème de Bernoulli n°4 ...

rappel : pour un fluide visqueux, homogène, incompressible, dans la pesanteur

$$\left[\alpha\,\rho_0 \frac{U^3}{2} S + (p + \rho_0 g\, z)\, U\, S\right]_2 - \left[\alpha\,\rho_0 \frac{U^3}{2} S + (p + \rho_0\, g z)\, U\, S\right]_1 = -\,\Delta H_{1-2}\ (U\, S\, \rho_0 g)$$

$$\boxed{\left[\alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1\right] = \left[\alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2\right] + \Delta H_{1-2}}$$



Le théorème de Bernoulli n°4 ...

rappel : pour un fluide visqueux, homogène, incompressible, dans la pesanteur

Le théorème de Bernoulli n°4 s'énonce comme le théorème de Bernoulli n°3 à condition :

- **de remplacer la vitesse v par la vitesse débitante U**
- **d'ajouter le coefficient α qui tient compte de la répartition non uniforme des vitesses dans chaque section**

$$\left[\alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1\right] = \left[\alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2\right] + \Delta H_{1\text{-}2}$$

vitesse uniforme	$\alpha = 1$
répartition parabolique	$\alpha = 2$
écoulement turbulent	$1.04 \leq \alpha \leq 1.12$

Les pertes de charge ...

en pratique, les pertes de charge sont de deux types :

- **perte de charge répartie**
  perte de charge entre deux sections
  proportionnelle à la distance entre ces deux sections

exemple : $\Delta H = \dfrac{\lambda}{D} L \dfrac{U^2}{2g}$

- **perte de charge concentrée**
  provoquée par une perturbation locale
  K = coefficient dépendant du type de perturbation
  U_{ref} = vitesse caractéristique typique de chaque configuration

exemple : $\Delta H = K \dfrac{U_{ref}^2}{2g}$

Les pertes de charge ...

pertes de charge réparties dans des conduites circulaires

ε

formule de Darcy-Weisbach

coefficient de perte de charge

$$U = \frac{\text{débit}}{\text{section}}$$

$$\boxed{\Delta H = \frac{\lambda}{D} L \frac{U^2}{2g}}$$

perte de charge **diamètre** **longueur**

paroi des conduites		rugosité (mm)
aluminium		0.03
acier	inoxydable	0.03
	rivé	3.0
	galvanisé	0.09 à 0.15
	rouillé	2.0
fer	neuf	0.26
PVC		0.03
fonte moulée	neuf	0.25
	rouillé	1.0 à 1.5
	bitumé	0.1
béton	lisse	0.04
	brut	2.0
fibre de verre		0.9
caoutchouc	lisse	0.01
pierre de taille brute		8 à 15
galerie		90 à 600

$$\lambda = \lambda(Re, \varepsilon_r)$$

Re = nombre de Reynolds

ε_r = rugosité relative $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{D}$

! !

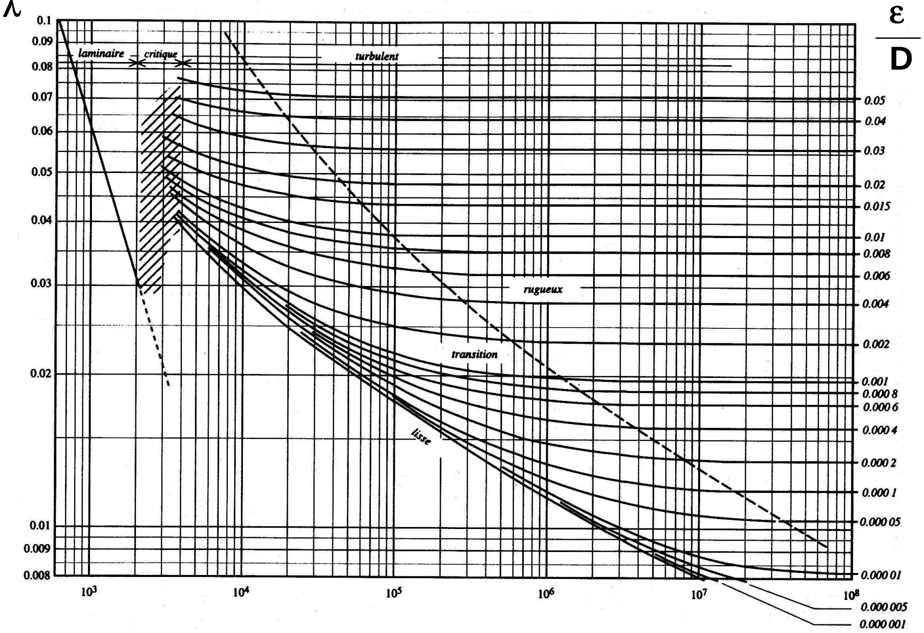
attention à la terminologie (pays anglo-saxons ...)

Les pertes de charge ...

$$\Delta H = \frac{\lambda}{D} L \frac{U^2}{2g}$$

λ $\dfrac{\varepsilon}{D}$

coefficient de perte de charge



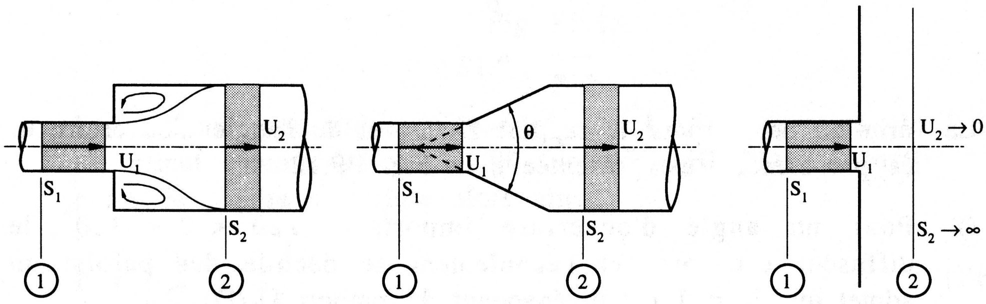
rugosité relative

nombre de Reynolds **Re**

Abaques de Moody

Les pertes de charge ...

Pertes de charge concentrées (élargissement)



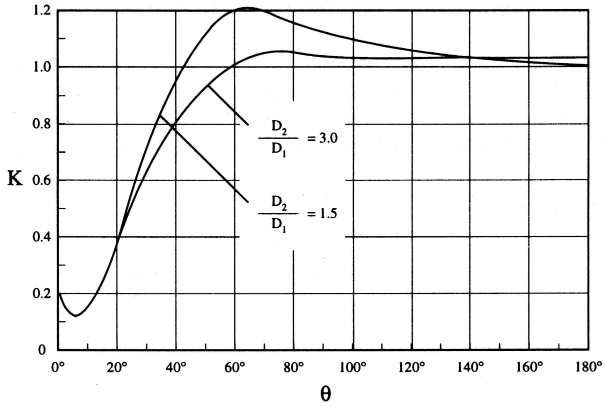
(a) *élargissement brusque*

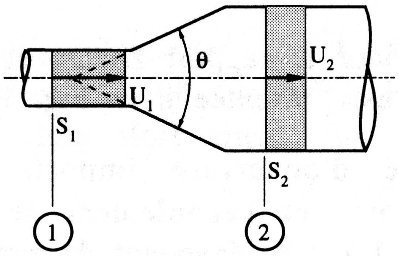
(b) *élargissement progressif*

(c) *conduite débouchant dans un réservoir*

Les pertes de charge ...

Pertes de charge concentrées (élargissement progressif)

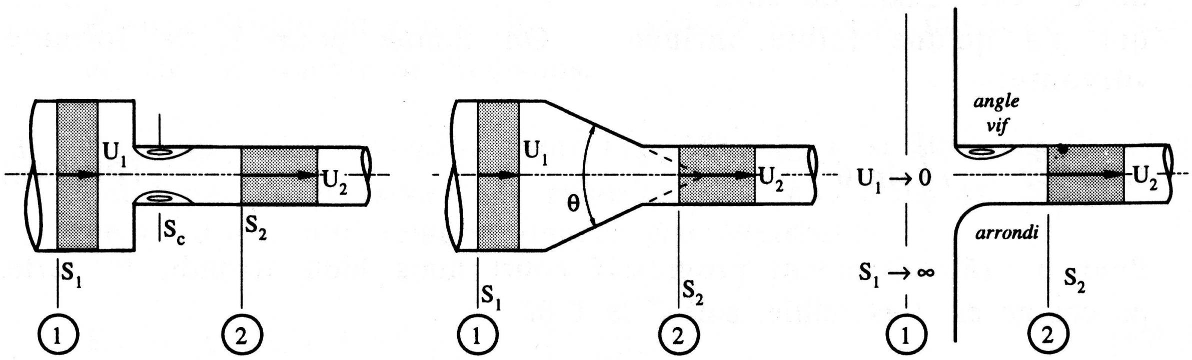




(b) *élargissement progressif*

Les pertes de charge ...

Pertes de charge concentrées (rétrécissement)



(a) *rétrécissement brusque*

(b) *rétrécissement progressif*

(c) *entrée d'une conduite*

Les pertes de charge ...

Pertes de charge concentrées

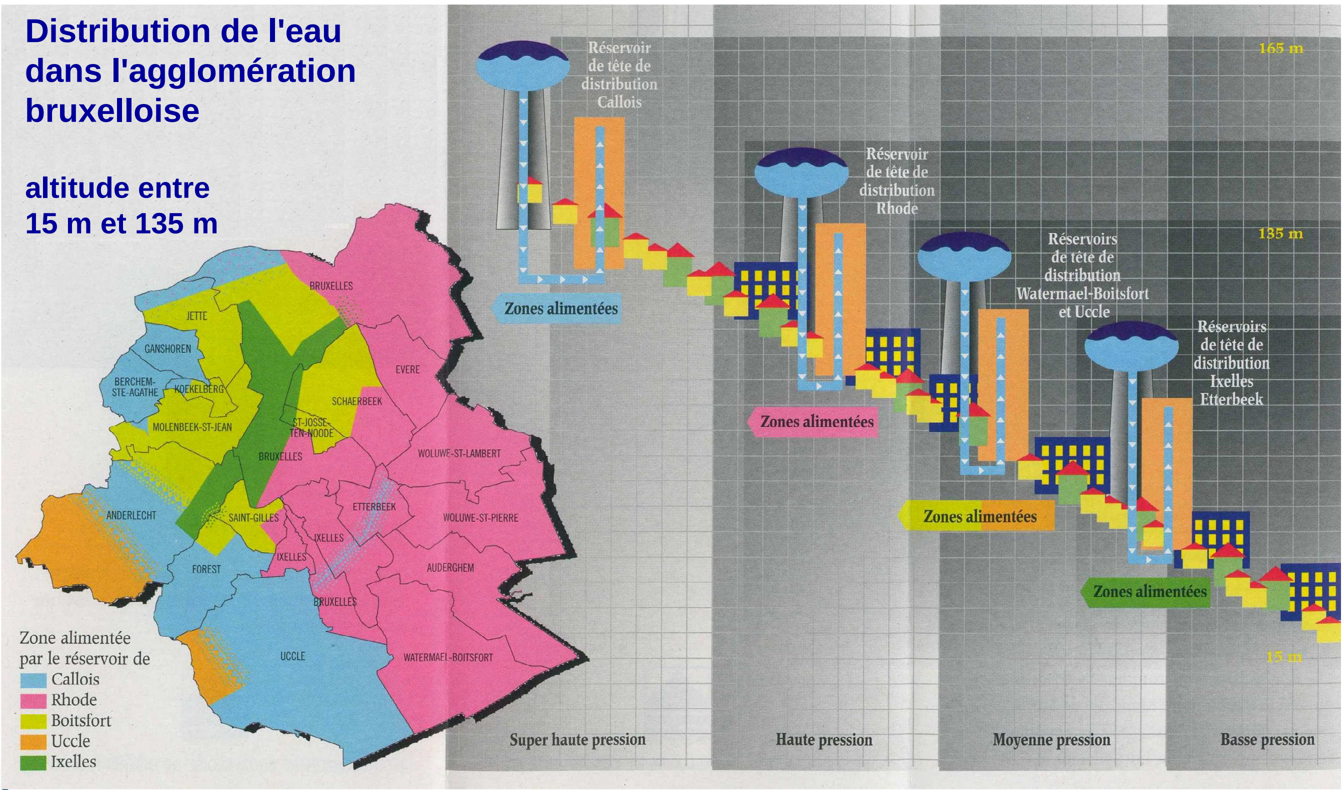
$$\Delta H = K \frac{U_{ref}^2}{2g}$$

singularité		vitesse de référence	coefficient K
élargissement brusque		U_1	$(1 - S_1/S_2)^2$
conduite débouchant sur un réservoir		U_1	1
élargissement progressif	$\theta = 7°$	$U_1 - U_2$	0.15
	$\theta = 30°$		~ 0.7
	$\theta = 130°$		1.1
rétrécissement brusque	$S_1/S_2 = 0.2$	U_2	0.34
	$S_1/S_2 = 0.5$		0.22
	$S_1/S_2 = 0.8$		0.05
rétrécissement progressif arrondi		U_2	0.02
entrée de conduite arrondie		U_2	0.01
coude arrondi lisse $\theta = 90°$	$R/R_c=1/2$	U	0.21
	$R/R_c=1/6$		0.12
	$R/R_c=1/0.9$		0.31
coude à angle vif	$\theta = 15°$	U	0.10
	$\theta = 45°$		0.50
	$\theta = 90°$		1.30

Les pertes de charge ...

Distribution de l'eau dans l'agglomération bruxelloise

altitude entre 15 m et 135 m



Service Construction, Architecture et Urbanisme
Department of Building, Architecture and Town Planning

BATir

Dynamique des fluides parfaits

(2)

ULB
Université Libre de Bruxelles, Université d'Europe

Propriétés dynamiques du champ de tourbillon

- fluide parfait barotrope
- forces massiques dérivant d'un potentiel

l'équation du mouvement s'écrit :

accélération

$$\bar{j} = \bar{v}^{\bullet}$$

$$\boxed{\bar{j} = -\,\overline{\mathrm{grad}}\;(U + P)}$$

potentiel des pressions

$$\overline{\mathrm{grad}}\;P = \frac{1}{\rho}\;\overline{\mathrm{grad}}\;p$$

potentiel des forces massiques

$$\bar{F} = -\,\overline{\mathrm{grad}}\;U$$

le champ des accélérations dérive d'un potentiel :
ce potentiel est (U + P)

Lord Kelvin

(1824 - 1907)

Théorème de Kelvin (Thomson) ...

la circulation de la vitesse est définie par : $\Gamma = \oint_C \bar{v}\,.\,\overline{dL}$

la dérivée matérielle d'une intégrale de contour donne

$$\Gamma^{\bullet} = \left[\oint_C \bar{v}\,.\,\overline{dL}\right]^{\bullet} = \oint_C v_i^{\bullet}\,dx_i \;-\; \oint_C v_i\,(\partial_j v_i)\,dx_j$$

$$v_i\,(\partial_j v_i) = \frac{1}{2}\,\partial_j\,(v_i\,v_i)$$

différentielle exacte
intégrée le long d'un contour fermé = 0

$$\boxed{\Gamma^{\bullet} = \oint_C \bar{j}\,.\,\overline{dL} = 0}$$

différentielle exacte intégrée
le long d'un contour fermé = 0

$$\boxed{\bar{j} = -\,\overline{\mathrm{grad}}\;(U + P)} \;\Rightarrow\; \boxed{\Gamma^{\bullet} = 0}$$

407

Lord Kelvin

(1824 - 1907)

Théorème de Kelvin (Thomson) …

pour un fluide parfait barotrope

soumis à des forces massiques dérivant d'un potentiel,

la circulation de la vitesse le long d'une courbe fermée ne varie pas au cours du temps

$$\dot{\Gamma} = 0$$

$$\Gamma = C^{ste}$$

408

Louis Lagrange

(1736 - 1813)

Théorème de Lagrange …

pour un fluide parfait barotrope

soumis à des forces massiques dérivant d'un potentiel,

si l'écoulement est irrotationnel à un instant ,
il le restera au cours du temps

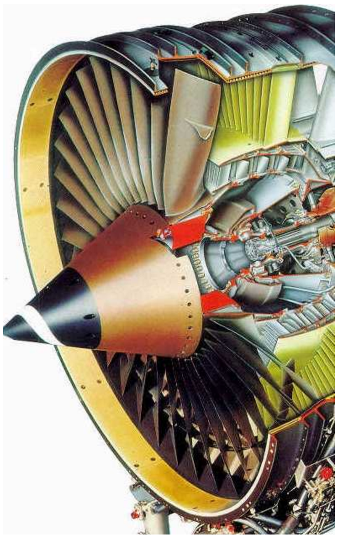
$$\Gamma = \oint_C \overline{v} \, . \, \overline{dL} = \int_S \overline{\text{rot}} \, \overline{v} \, . \, \overline{n} \; dS \qquad \overline{\omega} = \frac{1}{2} \, \overline{\text{rot}} \; \overline{v} \qquad \Gamma = C^{ste}$$

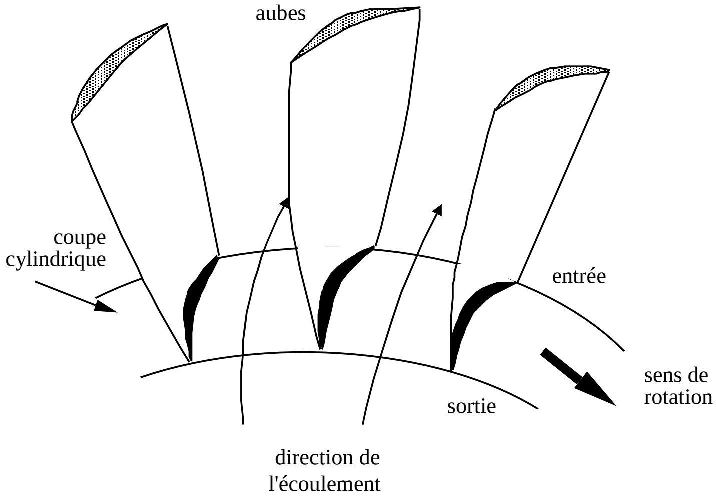
théorème de Kelvin

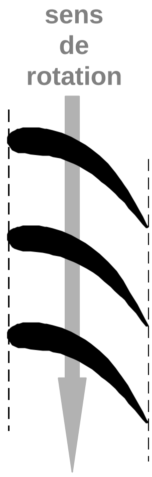
$\overline{\omega} = 0$ en $t = t_0$ $\longrightarrow$ $\overline{\omega} = 0$ en tout t

Exemple : la portance d'un profil ...

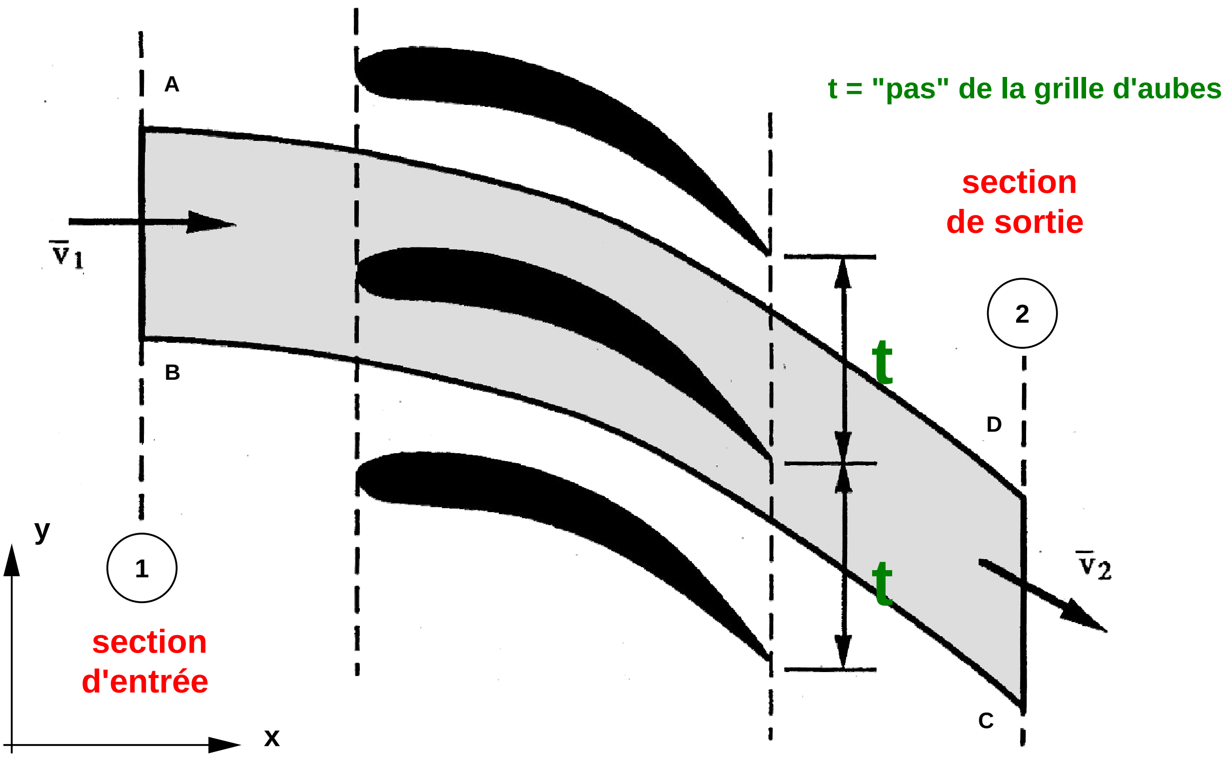
calculons la portance due à l'écoulement
d'un fluide au travers d'une grille d'aubes







Exemple : la portance d'un profil ...



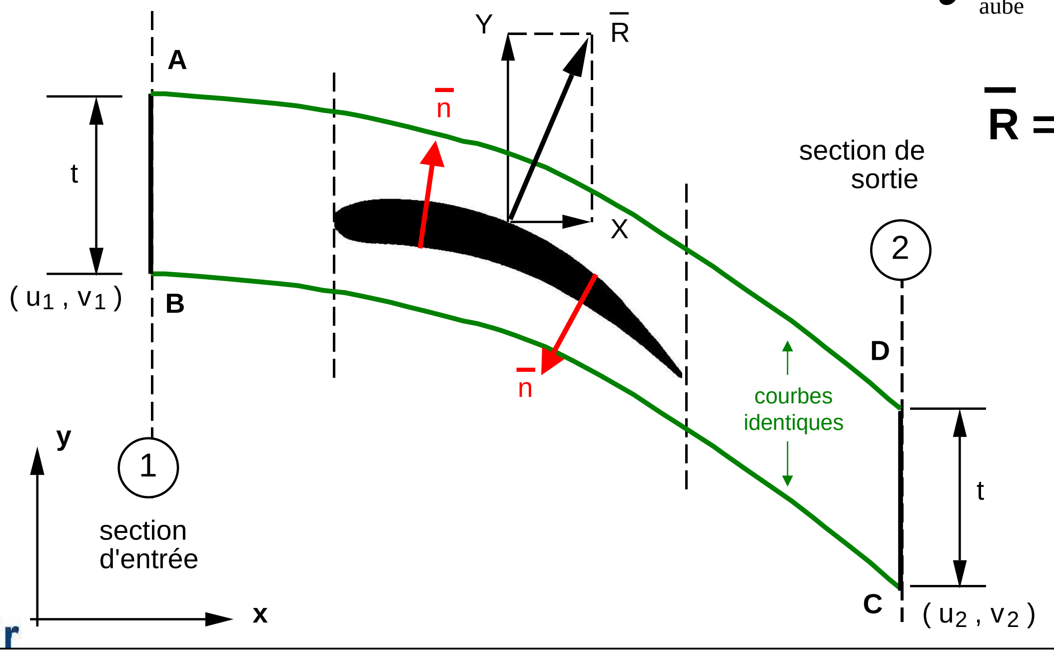
Exemple : la portance d'un profil ...

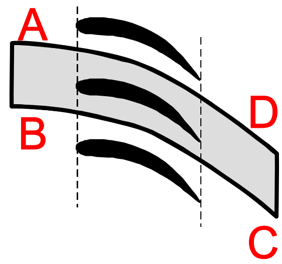
par définition, l'action du fluide sur le profil est :
(- car la normale est extérieure au volume de fluide)

$$- R_i = \int_{\text{aube}} \tau_{ij}\, n_j\, dS$$

avec

$$\overline{R} = X\, \overline{1x} + Y\, \overline{1y}$$





Exemple : la portance d'un profil ...

la loi de la résultante cinétique appliquée à un volume de fluide s'écrit :

$$\boxed{\int_V \cancel{\partial_0 (\rho v_i)\, dV} = \int_V \cancel{f_i\, dV} + \oint_S (\tau_{ij} - \rho v_i v_j)\, n_j\, dS}$$

= 0 car l'écoulement est permanent

= 0 car on néglige le poids du fluide

il reste donc :

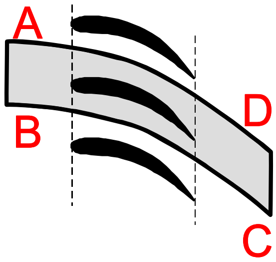
$$\boxed{\oint_S (\tau_{ij} - \rho v_i v_j)\, n_j\, dS = 0}$$

il s'agit de la normale extérieure au volume de fluide

Exemple : la portance d'un profil ...

quand on développe en composantes,
on tient compte des
simplifications suivantes :

$$\oint_S (\tau_{ij} - \rho v_i v_j) n_j \, dS = 0$$



- à l'entrée et à la sortie, les contraintes tangentielle sont nulles :
  il ne reste que les contraintes normales exprimées en fonction de la pression (p_1 et p_2)
- la somme des intégrales sur BC et DA s'annule :
  les grandeurs sont périodiques mais le sens de la normale est inversé
- le fluide est incompressible et homogène

$$\mathbf{x} \Rightarrow \quad \rho\, t\, u_2\, u_2 - \rho\, t\, u_1\, u_1 = -X + (p_1 - p_2)\, t$$

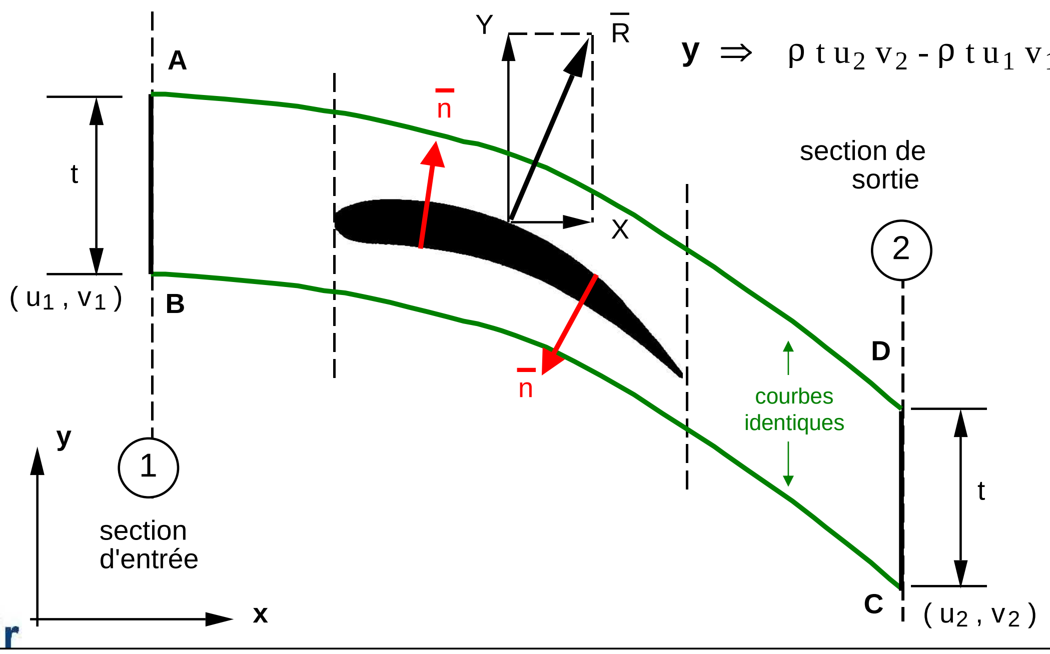
$$\mathbf{y} \Rightarrow \quad \rho\, t\, u_2\, v_2 - \rho\, t\, u_1\, v_1 = -Y$$

Exemple : la portance d'un profil ...

$$\oint_S (\tau_{ij} - \rho\, v_i\, v_j)\, n_j\, dS = 0$$

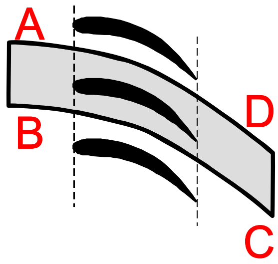
$$\mathbf{x} \Rightarrow \quad \rho\, t\, u_2\, u_2 - \rho\, t\, u_1\, u_1 = -X + (p_1 - p_2)\, t$$

$$\mathbf{y} \Rightarrow \quad \rho\, t\, u_2\, v_2 - \rho\, t\, u_1\, v_1 = -Y$$



Exemple : la portance d'un profil ...

on écrit ensuite la conservation du débit



$$\rho\, u_1\, t = \rho\, u_2\, t \quad \rightarrow \quad u_1 = u_2$$

$$\mathbf{x} \Rightarrow \quad \rho\, t\, u_2\, u_2 - \rho\, t\, u_1\, u_1 = -X + (p_1 - p_2)\, t$$

$$\mathbf{y} \Rightarrow \quad \rho\, t\, u_2\, v_2 - \rho\, t\, u_1\, v_1 = -Y$$

$$\begin{cases} X = (p_1 - p_2)\, t \\ Y = \rho\, t\, u_1\, (v_1 - v_2) \end{cases}$$

Exemple : la portance d'un profil ...

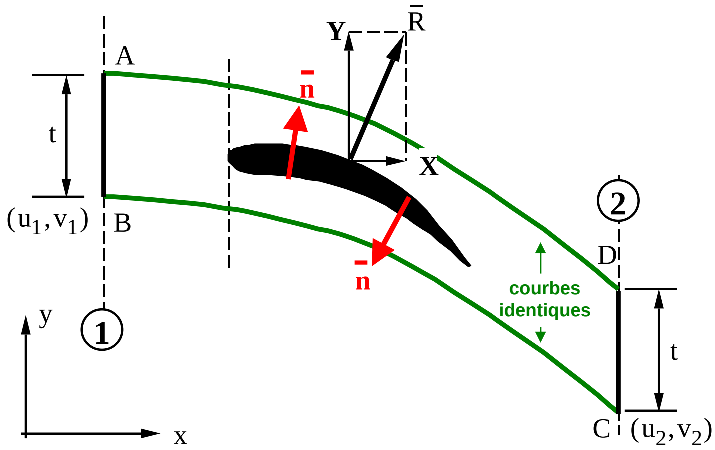
on écrit ensuite le théorème de Bernoulli n°1 (en négligeant le poids du fluide)

$$p_1 + \rho \frac{|\bar{v}_1|^2}{2} = p_2 + \rho \frac{|\bar{v}_2|^2}{2}$$

$$p_1 + \rho \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{u_2^2 + v_2^2}{2}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$$= \rho\,(v_2 - v_1)\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)$$

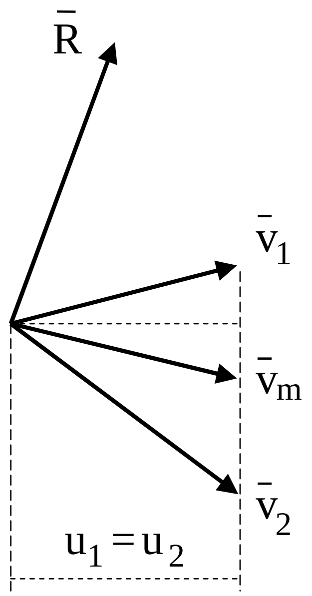


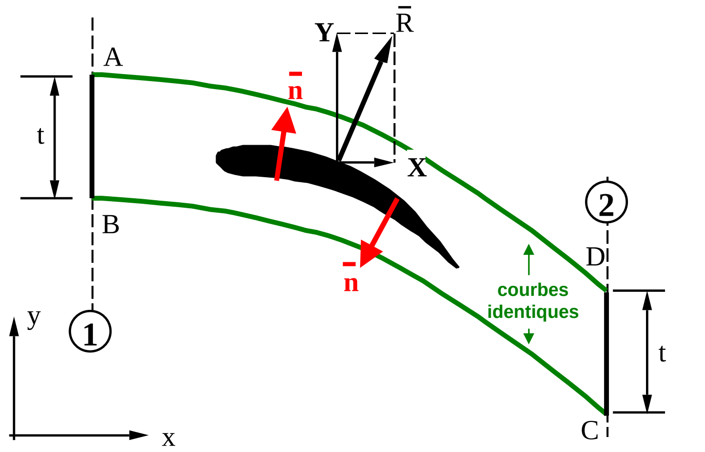
417

Exemple : la portance d'un profil ...

on définit la vitesse moyenne :

$$p_1 - p_2 = \rho\ (v_2 - v_1)\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)$$
$$= \rho\ (v_2 - v_1)\ v_m$$



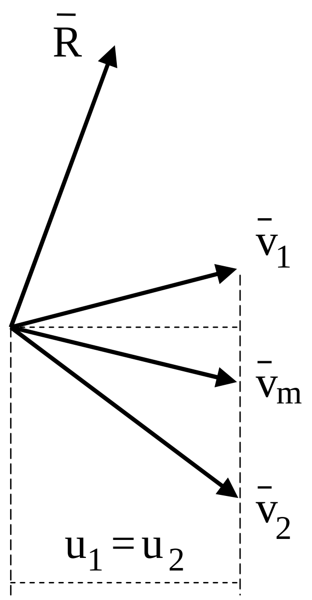


418

Exemple : la portance d'un profil ...

on trouve finalement :

$$\begin{cases} X = (p_1 - p_2)\ t \\ Y = \rho\ t\ u_1\ (v_1 - v_2) \end{cases}$$



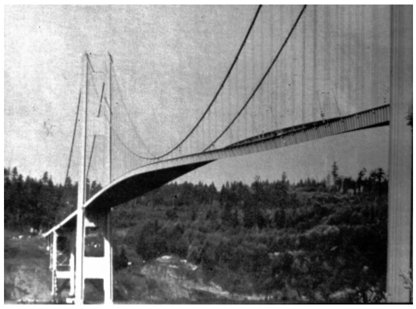
$$p_1 - p_2 = \rho\ (v_2 - v_1)\ v_m$$

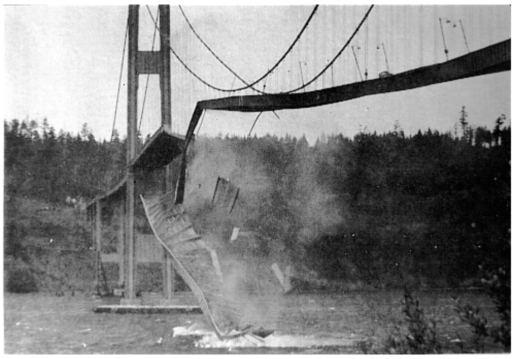
$$\begin{cases} X = -\rho\ v_m\ t\ (v_1 - v_2) \\ Y = \rho\ u_1\ t\ (v_1 - v_2) \end{cases}$$

et la force $\bar{R}$ est perpendiculaire à la vitesse moyenne $\bar{v}_m$

L'action sur un profil de pont ...

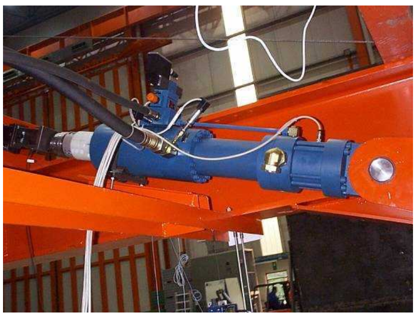
Pont de Tacoma (USA)
7 novembre 1940

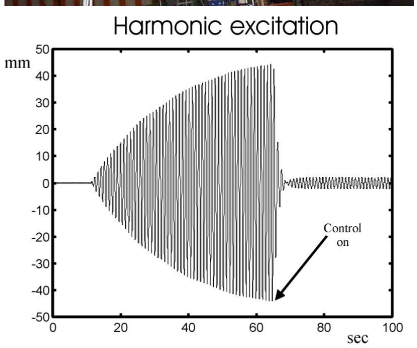


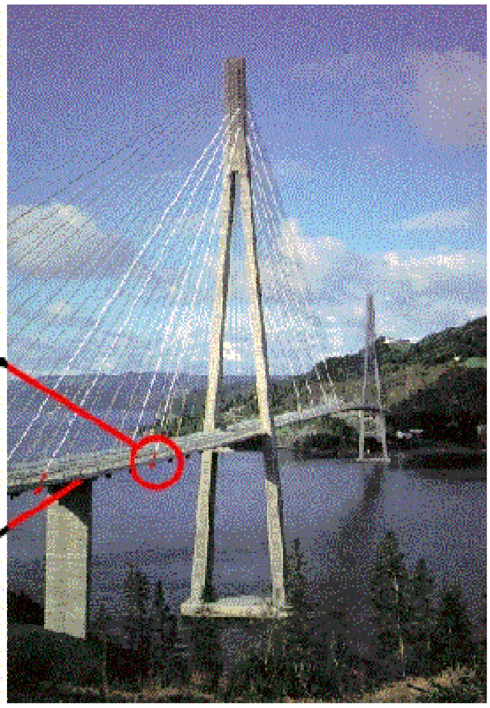


L'action sur un profil de pont ...

contrôle actif des vibrations d'un pont







Exemple : la portance d'un profil ...

calculons la circulation Γ de la vitesse le long du contour ABCD

par définition : $$\Gamma = \oint_{ABCD} \bar{v} \cdot \overline{ds}$$

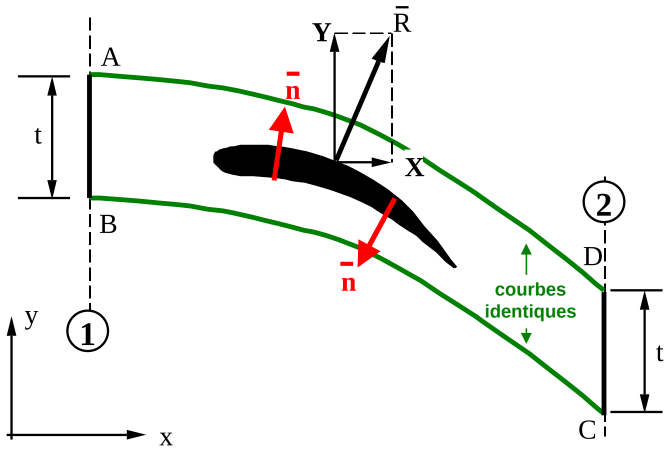
ou

$$\Gamma_{ABCD} = - v_1\, t + \Gamma_{BC} + v_2\, t + \Gamma_{DA}$$

avec $\Gamma_{BC} + \Gamma_{DA} = 0$ par périodicité

donc

$$\boxed{\Gamma_{ABCD} = - t\,(v_1 - v_2)}$$

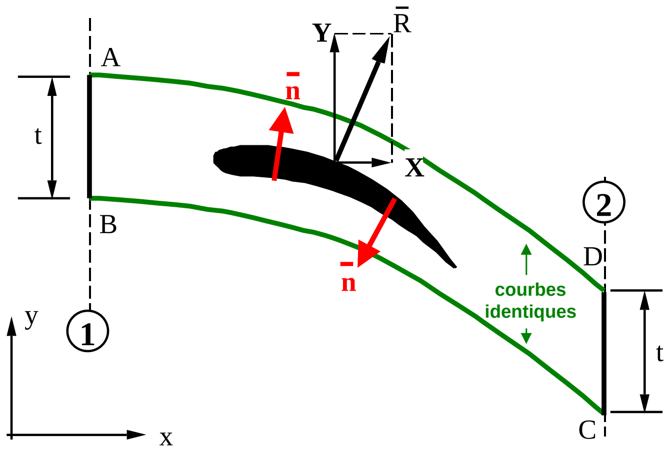


Exemple : la portance d'un profil ...

conclusions : $$\boxed{\Gamma_{ABCD} = - t\,(v_1 - v_2)}$$

$$\begin{cases} X = - \rho\, v_m\, t\,(v_1 - v_2) \\ Y = \rho\, u_1\, t\,(v_1 - v_2) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} X = \rho\, v_m\, \Gamma \\ Y = -\rho\, u_1\, \Gamma \end{cases}}$$



Exemple : la portance d'un profil ...

conclusions :

$$\Gamma_{ABCD} = -\, t\ (v_1 - v_2)$$

$$\begin{cases} X = \ \rho\, v_m\, \Gamma \\ Y = -\rho\, u_1\, \Gamma \end{cases}$$

- Si l'écartement **t** des profils tend vers l'infini, on tend vers une aile isolée (ex : avion) pour laquelle $\mathbf{v_1 = v_2}$.
- La portance tend alors vers **(0 . ∞)**. La portance sera non nulle seulement si la circulation Γ est non nulle. Cette circulation apparaît à cause (ou grâce à ... !) des *effets visqueux* le long de la paroi du profil (*couche limite*).
- On pourra étudier l'écoulement comme irrotationnel en fluide parfait partout avec une circulation non nulle autour du profil (circulation due aux effets visqueux).

Exemple : la portance d'un profil ...

tourbillon de démarrage

$$\begin{cases} X = \ \rho\, v_m\, \Gamma \\ Y = -\rho\, u_1\, \Gamma \end{cases}$$

- Supposons que c'est le profil qui se déplace par rapport au fluide.
- Avant la mise en mouvement, la circulation $\Gamma = 0$ car la vitesse est nulle.
- Comme le fluide est parfait et barotrope, le théorème de Lagrange dit que l'écoulement restera irrotationnel.

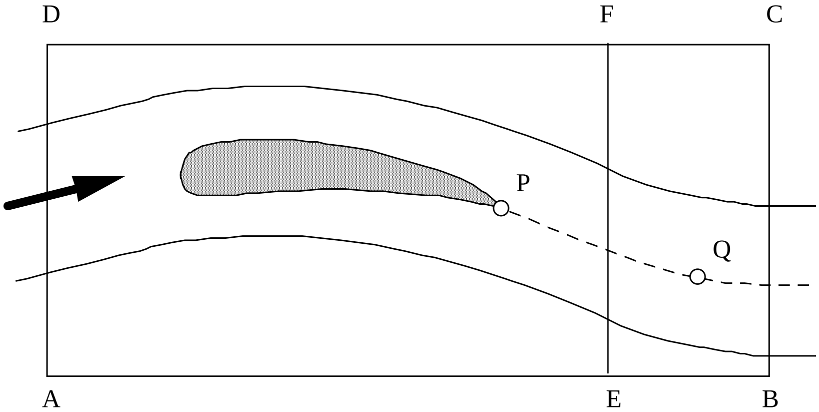
Exemple : la portance d'un profil …

tourbillon de démarrage

- Au démarrage, sous l'influence des effets visqueux, il se crée au bord de fuite (point P) un tourbillon qui est entraîné par l'écoulement (théorème de Helmholtz – non vu –)
- En t > 0, ce tourbillon est en Q et on a : $\Gamma_{ABCD} = 0$

$$\Gamma_{AEFD} + \Gamma_{EBCF} = 0$$

$$\boxed{\Gamma_{AEFD} = -\,\Gamma_{EBCF}}$$

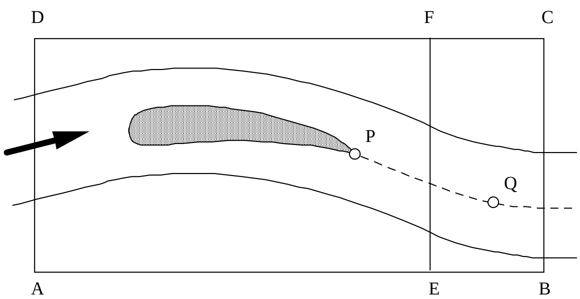


Exemple : la portance d'un profil …

tourbillon de démarrage

- Il s'établit donc une circulation autour du profil, donnant naissance à la *portance*.
- Le profil devient un tube de tourbillon.
- Le tourbillon de démarrage (en Q) s'éloigne vers l'infini.

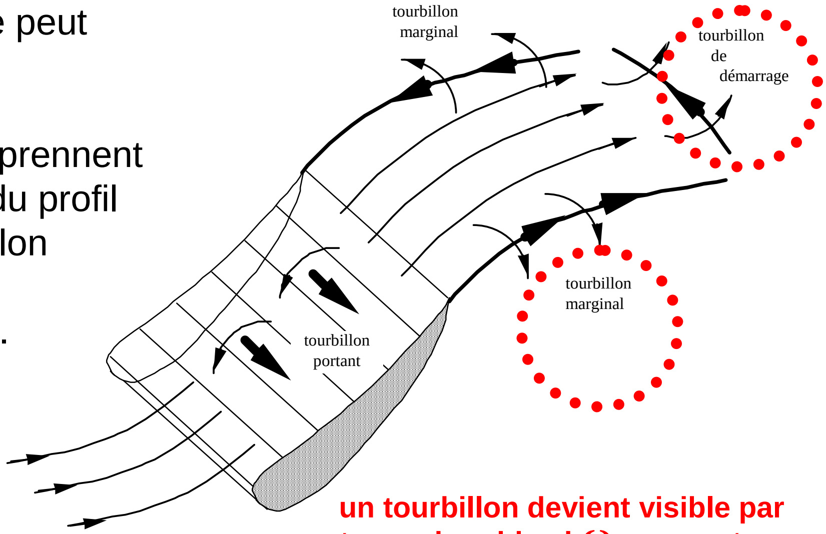
$$\boxed{\Gamma_{AEFD} = -\,\Gamma_{EBCF}}$$



Exemple : la portance d'un profil …

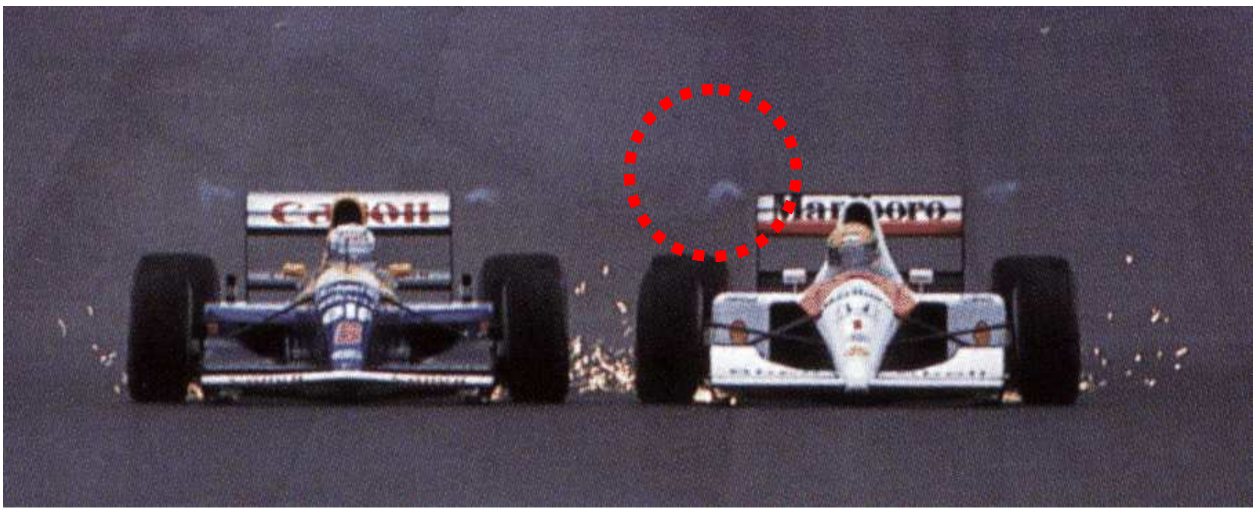
tourbillon de démarrage

- La conservation du flux du tourbillon implique que le tube de tourbillon ne peut pas s'interrompre
- Des tourbillons marginaux prennent naissance aux extrémités du profil pour former, avec le tourbillon de démarrage (à l'infini), un tube de tourbillon fermé.



un tourbillon devient visible par temps humide si ω augmente

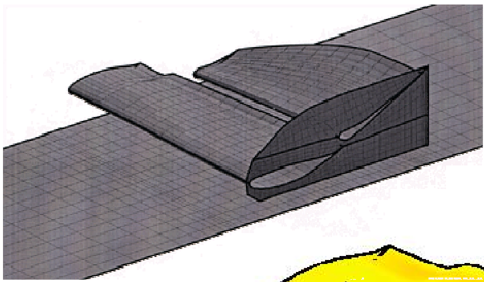
Exemple : l'action sur un profil …



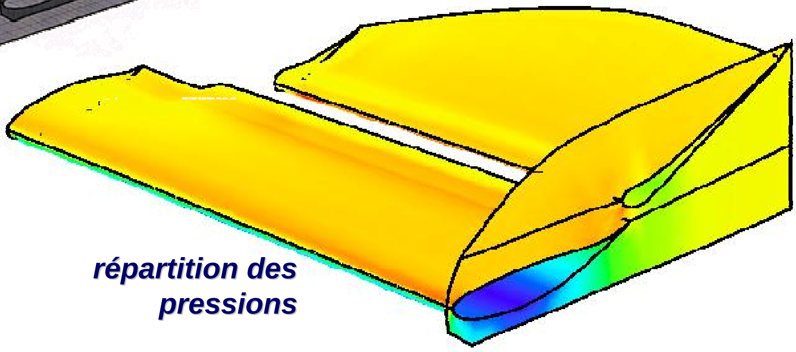
L'action sur un profil : aileron de Formule 1

Vrije Universiteit Brussel

la voiture ...



le maillage



répartition des pressions

Ecoulement permanent irrotationnel ...

- **irrotationnel** $\overline{\omega} = 0$ et donc $\overline{\text{rot}}\,\overline{\text{v}} = 0$
- **l'équation de Lamb devient**

$$\boxed{\cancel{\frac{\partial \overline{v}}{\partial t}} + \cancel{2\,(\overline{\omega} \text{ x } \overline{v})} = -\,\overline{\text{grad}}\left[\cancel{U} + P + \frac{v^2}{2}\right]}$$

écoulement permanent *irrotationnel* *on néglige le poids du gaz*

$$0 = -\,\overline{\text{grad}}\left[P + \frac{v^2}{2}\right] \xrightarrow{\text{Bernoulli}} \boxed{\left[P + \frac{v^2}{2}\right] = C^{ste}}$$

Ecoulement permanent irrotationnel ...

- **posons** $\frac{dp}{d\rho} = c^2$ **on peut montrer que c est la célérité des ondes sonores ("vitesse du son") qui dépend de ρ**

dans l'air : **c = ~ 1.200 km/h**

autres valeurs **dans l'eau :** **c = ~ 5.400 km/h**
dans l'acier : **c = ~ 18.800 km/h**

- **valeurs à vitesse nulle**

appelons P_0 , p_0 , c_0 , ρ_0 les valeurs de P , p , c , ρ pour $v = 0$
et calculons P , p , c , ρ en fonction de P_0 , p_0 , c_0 , ρ_0

Ecoulement permanent irrotationnel ...

- **fluide parfait en évolution adiabatique**

$$\boxed{\frac{p}{\rho^{\gamma}} = k = C^{ste}} \longrightarrow \boxed{p = k\,\rho^{\gamma}}$$

avec $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$

- **calcul de la vitesse du son**

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2 \longrightarrow c^2 = \frac{d}{d\rho}\left(k\,\rho^{\gamma}\right) = k\,\gamma\,\rho^{\gamma-1} = \frac{k\,\gamma\,\rho^{\gamma}}{\rho} = \frac{\gamma\,p}{\rho}$$

433

Ecoulement permanent irrotationnel adiabatique

- **calcul de P**

$$\overline{\text{grad}}\ P = \frac{1}{\rho}\ \overline{\text{grad}}\ p \quad \text{ou} \quad P = \int \frac{dp}{\rho}$$

$$p = k\rho^{\gamma} \longrightarrow dp = k\gamma\rho^{\gamma-1}\,d\rho$$

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{k\gamma\rho^{\gamma-1}}{\rho}\,d\rho = \int k\gamma\rho^{\gamma-2}\,d\rho$$

$$P = \frac{k\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma-1} \qquad \text{car} \qquad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

de même : $P_0 = \dfrac{c_0^2}{\gamma-1}$

$$\boxed{\frac{P}{P_0} = \frac{c^2}{c_0^2}}$$

BATir

434

Ecoulement permanent irrotationnel adiabatique

- **calcul de P**

$$\frac{P}{P_0} = \frac{c^2}{c_0^2}$$

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \qquad c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$$

$$p = k\rho^{\gamma} \qquad p_0 = k\rho_0^{\gamma}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\gamma p / \rho}{\gamma p_0 / \rho_0} = \frac{p}{p_0}\,\frac{\rho_0}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{P}{P_0} = \frac{c^2}{c_0^2} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

BATir

Ecoulement permanent irrotationnel adiabatique

- **calcul de c²** $\dfrac{P}{P_0} = \dfrac{c^2}{c_0^2} \Rightarrow \dfrac{P-P_0}{P_0} = \dfrac{c^2-c_0^2}{c_0^2}$

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{c^2}{\gamma-1} \\ P_0 &= \frac{c_0^2}{\gamma-1} \end{aligned}\right\} \frac{c^2-c_0^2}{c_0^2} = (\gamma-1)\frac{P-P_0}{c_0^2} = \frac{(\gamma-1)\left(-v^2/2\right)}{c_0^2}$$

$$\left[P + \frac{v^2}{2}\right] = P_0$$

Bernoulli

$$c^2 - c_0^2 = (\gamma-1)\left(-v^2/2\right)$$

$$\boxed{c^2 = c_0^2\left[1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right]}$$

Ecoulement permanent irrotationnel adiabatique

- **calcul de ρ** $\dfrac{c^2}{c_0^2} = \left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}$

$$c^2 = c_0^2\left[1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right]$$

$$\boxed{\rho = \rho_0\left[1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

Ecoulement permanent irrotationnel adiabatique

- calcul de p $\quad \dfrac{p}{p_0} = \left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \longleftarrow \boxed{p = k\rho^{\gamma}}$

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$\boxed{p = p_0 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$$

Ecoulement permanent irrotationnel adiabatique

dans tous les cas, c'est

$$\left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right]$$

qui intervient

$$\begin{cases} c^2 = c_0^2 \left[1 - \dfrac{\gamma - 1}{2} \dfrac{v^2}{c_0^2} \right] \\ \rho = \rho_0 \left[1 - \dfrac{\gamma - 1}{2} \dfrac{v^2}{c_0^2} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \\ p = p_0 \left[1 - \dfrac{\gamma - 1}{2} \dfrac{v^2}{c_0^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \end{cases}$$

Ecoulement permanent irrotationnel adiabatique

- conclusion importante

dans tous les cas, c'est

$$\left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right]$$

qui intervient

c_0 est connu, par exemple, par les conditions d'amont

on ne pourra donc pas dépasser une vitesse maximum donnée par :

$$[\ \dots\ ] = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v_{max}^2}{c_0^2} = 0$$

$$\boxed{v_{max}^2 = \frac{2}{\gamma - 1} c_0^2}$$

lorsque $v \rightarrow v_{max}$: $p \rightarrow 0$; $\rho \rightarrow 0$; $c \rightarrow 0$

Ecoulement subsonique – Ecoulement supersonique

Ernest Mach

(1838 - 1916)

le nombre de Mach **M** est défini par :

$$\boxed{M = \frac{v}{c}}$$

vitesse des particules matérielles

célérité des ondes sonores

M < 1 écoulement subsonique

M > 1 écoulement supersonique

Ecoulement subsonique – Ecoulement supersonique

- transformons v/c_0 en v/c … pour exprimer en fonction du nombre de Mach M

$$\left[1-\frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right]$$

$$\begin{cases} P = \dfrac{c^2}{\gamma-1} \\ P_0 = \dfrac{c_0^2}{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\left[P + \frac{v^2}{2}\right] = P_0$$

Bernoulli

$$\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{c_0^2}{\gamma-1} \quad \text{et donc} \quad \frac{c_0^2}{\gamma-1} = v^2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)M^2}\right]$$

- et donc $$1-\frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2} = \frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}$$

$$\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}$$

Ecoulement subsonique – Ecoulement supersonique

- on a donc

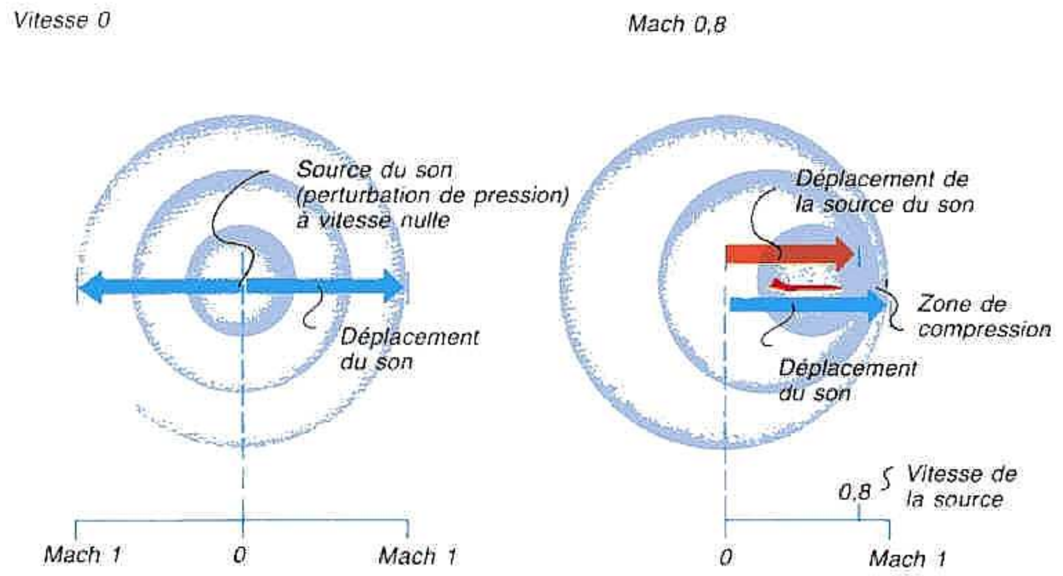
$$\rho = \rho_0\left[\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$p = p_0\left[\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

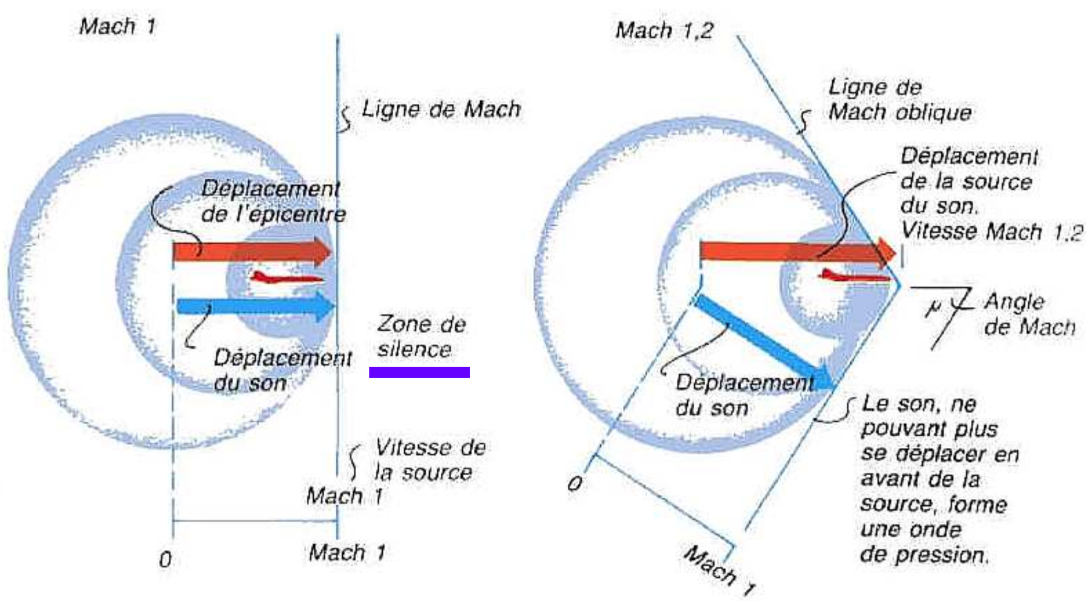
$$c^2 = c_0^2\left[\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\right]$$

$$M = \frac{v}{c}$$

Le mur du son ...



Le mur du son ...



Pierre Hugoniot

(1851 - 1887)

Théorème de Hugoniot ...

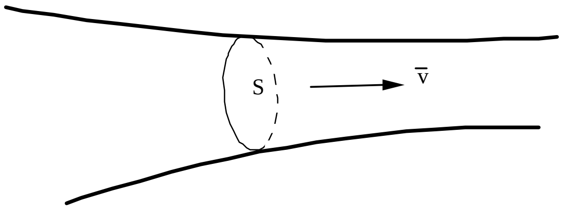
- on considère un filament de courant
- on calcule l'évolution de la vitesse en fonction de l'évolution de la section transversale

- la conservation du débit s'écrit $\rho\ v\ S = C^{ste}$

$$(\rho v S)^{\bullet} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\rho v)^{\bullet} S = -\ \rho v S^{\bullet}$$

- à diviser par $(\rho\ v\ S)$

$$\frac{(\rho\ v)^{\bullet}}{(\rho\ v)} = -\frac{S^{\bullet}}{S}$$



Théorème de Hugoniot ...

- calculons $\dfrac{(\rho\ v)^{\bullet}}{(\rho\ v)}$

$$\frac{\rho\ v^{\ \bullet}}{\rho\ v} = \frac{\rho^{\bullet}}{\rho} + \frac{v^{\bullet}}{v}$$

- calculons $\rho^{\bullet}/\rho$ à partir de $\rho = \rho_0 \left[1 - \dfrac{\gamma-1}{2}\dfrac{v^2}{c_0^2}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$

$$\rho^{\bullet} = \rho_0 \frac{1}{\gamma-1}\left[1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right]^{\frac{1}{\gamma-1} - 1}\left(-\frac{\gamma-1}{2}\right) 2\frac{v}{c_0^2}\ v^{\bullet}$$

Théorème de Hugoniot ...

- calculons $\rho^\bullet / \rho$ ......

$$\rho^\bullet = \rho_0 \frac{1}{\gamma-1}\left[1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}-1}\left(-\frac{\gamma-1}{2}\right) 2 \frac{v}{c_0^2} v^\bullet$$

$$\rho^\bullet = -\frac{v\,v^\bullet}{c_0^2}\,\frac{\rho_0\left[1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\left[1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right]}$$

$= \rho$

$= c^2$

$$\frac{\rho^\bullet}{\rho} = -\frac{v^\bullet}{v}\frac{v^2}{c^2} \rightarrow \boxed{\frac{\rho^\bullet}{\rho} = -\frac{v^\bullet}{v} M^2}$$

Théorème de Hugoniot ...

$$\boxed{\frac{\rho^\bullet}{\rho} = -\frac{v^\bullet}{v} M^2} \qquad \frac{(\rho v)^\bullet}{(\rho v)} = \frac{\rho^\bullet}{\rho} + \frac{v^\bullet}{v} = \frac{v^\bullet}{v}\left(1 - M^2\right)$$

- et donc

$$\frac{(\rho v)^\bullet}{(\rho v)} = -\frac{S^\bullet}{S}$$

$$\boxed{\frac{S^\bullet}{S} = \frac{v^\bullet}{v}\left(M^2 - 1\right)}$$

449

Théorème de Hugoniot ...

- calculons aussi $\dot{p}/p$

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = k = C^{ste}$$

$$p = k\,\rho^{\gamma} \quad \rightarrow \quad \dot{p} = k\,\gamma\,\rho^{\gamma-1}\,\dot{\rho}$$

$$\frac{\dot{p}}{p} = \frac{k\,\gamma\,\rho^{\gamma-1}}{k\,\gamma\,\rho^{\gamma}}\,\dot{\rho} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{p}}{p} = \gamma\frac{\dot{\rho}}{\rho}$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{\dot{v}}{v}M^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\dot{p}}{p} = -\gamma\,M^2\,\frac{\dot{v}}{v}}$$

BATir

450

Théorème de Hugoniot ...

- si la section augmente : $\dot{S} > 0$
- en écoulement subsonique
  - M < 1
  - v diminue
  - p augmente ; ρ augmente
- en écoulement supersonique
  - M > 1
  - v augmente
  - p diminue ; ρ diminue

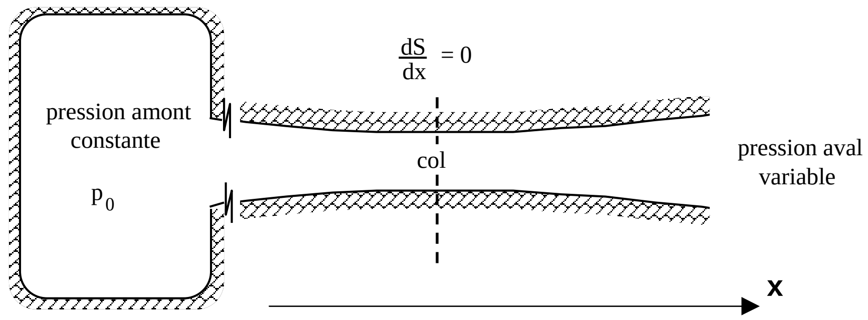
$$\boxed{\frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{v}}{v}\,(M^2 - 1)}$$

$$\boxed{\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{\dot{v}}{v}M^2}$$

$$\boxed{\frac{\dot{p}}{p} = -\gamma\,M^2\,\frac{\dot{v}}{v}}$$

BATir

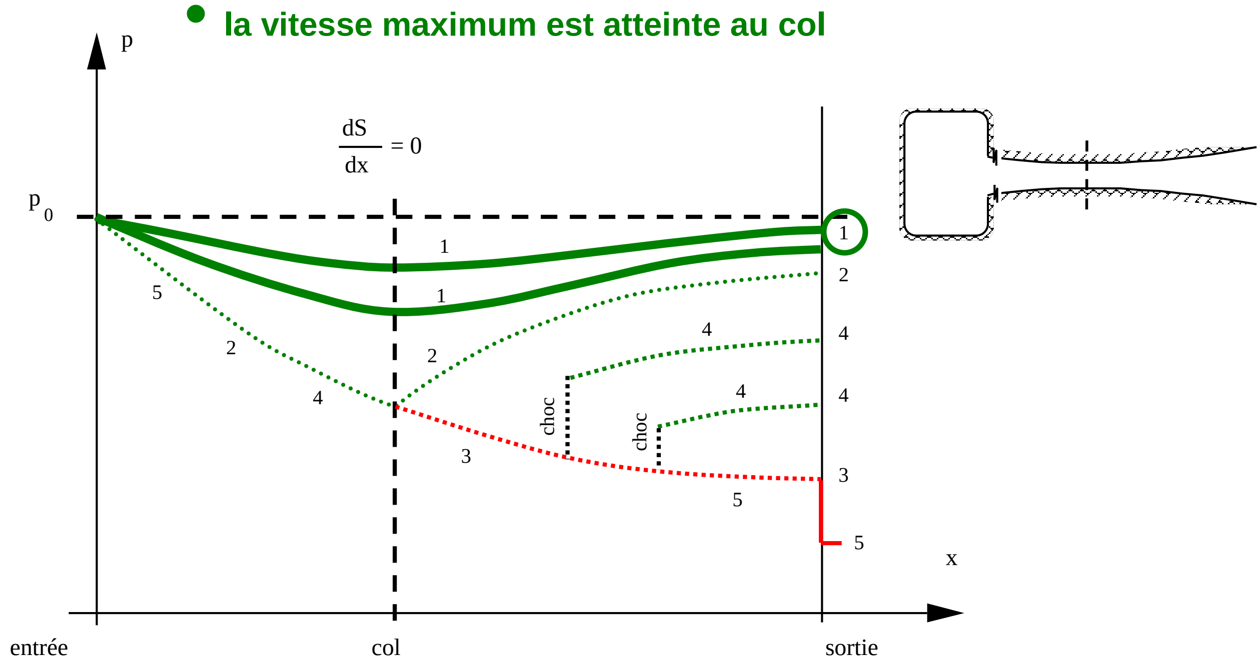
Exemple : la tuyère ...



- une tuyère (convergent – divergent) est alimentée par un réservoir en amont
- le débit est contrôlé en ajustant la pression à la sortie en aval

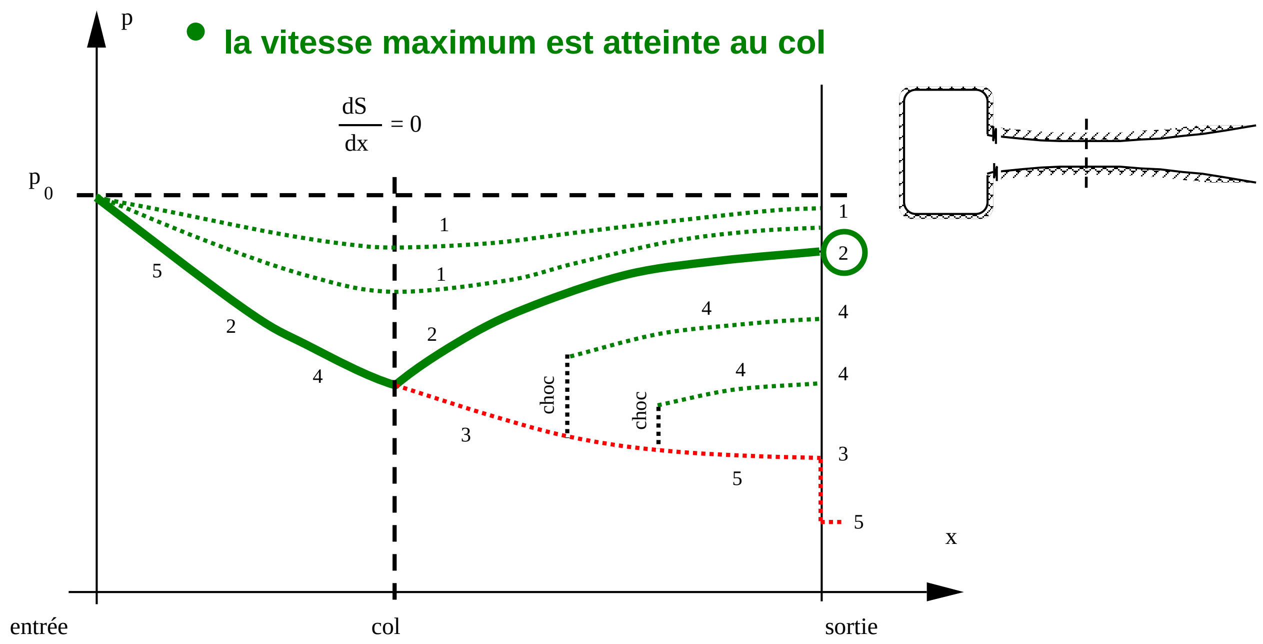
Exemple : la tuyère ...

- 1 : en régime subsonique partout
- la vitesse maximum est atteinte au col



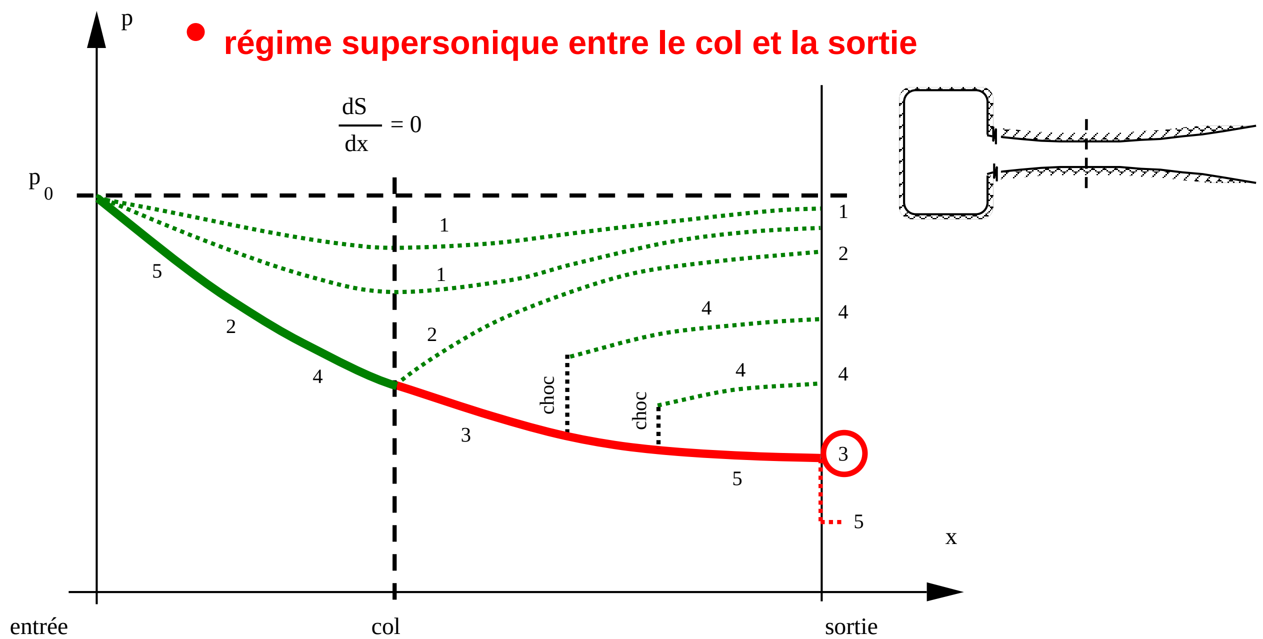
Exemple : la tuyère ...

- 2 : la pression la plus basse que l'on peut atteindre en subsonique est au col (où dS = 0)
- la vitesse maximum est atteinte au col



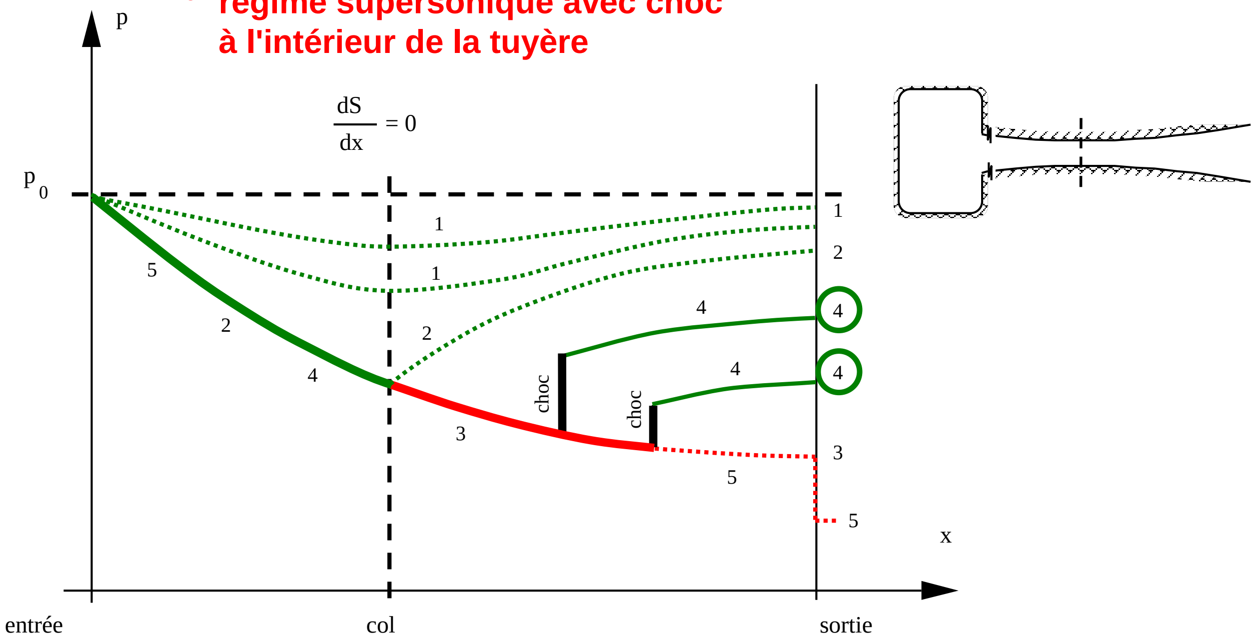
Exemple : la tuyère ...

- 3 : la pression la plus basse que l'on peut atteindre à la sortie
- régime supersonique entre le col et la sortie



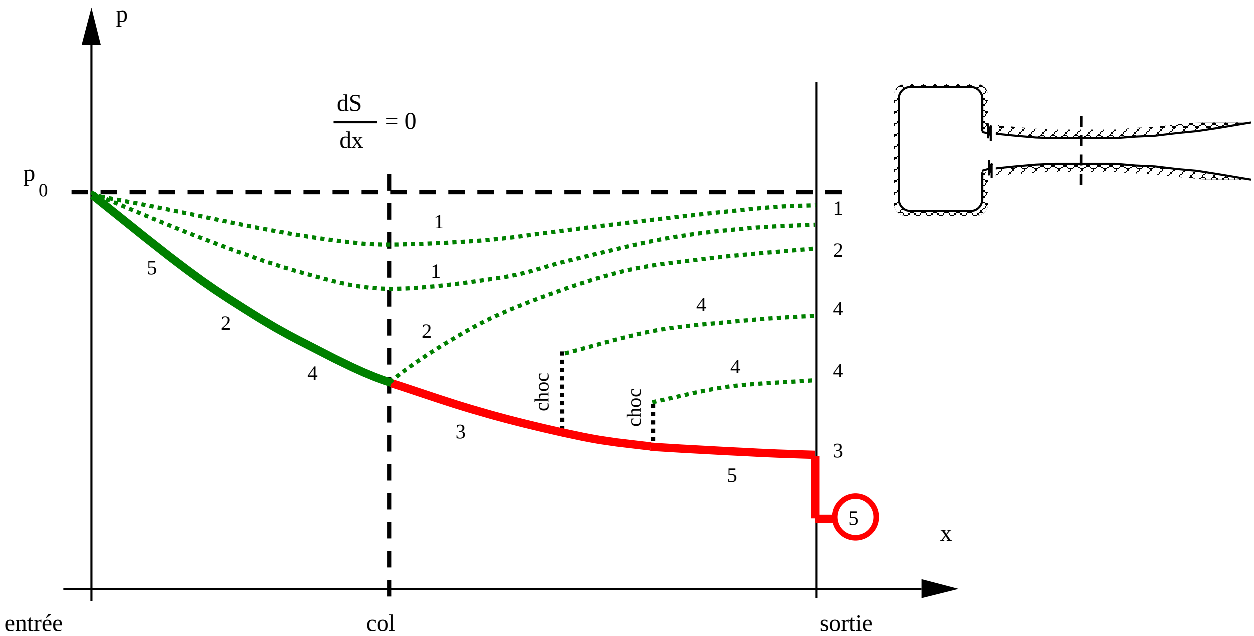
Exemple : la tuyère ...

- 4 : régime intermédiaire subsonique
- régime supersonique avec choc à l'intérieur de la tuyère



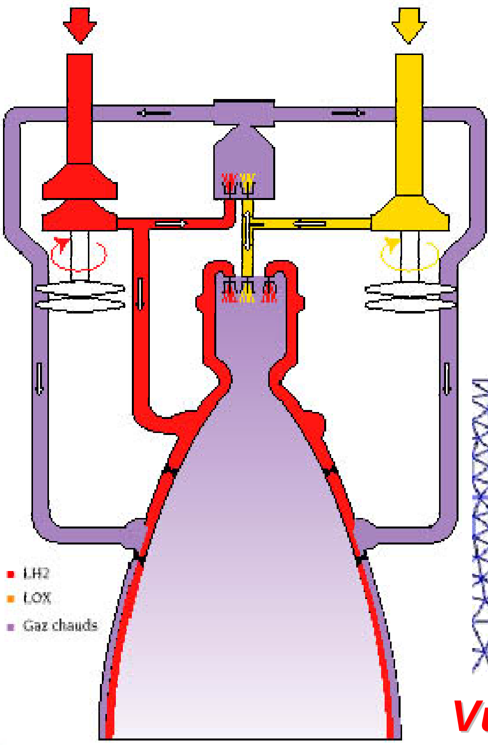
Exemple : la tuyère ...

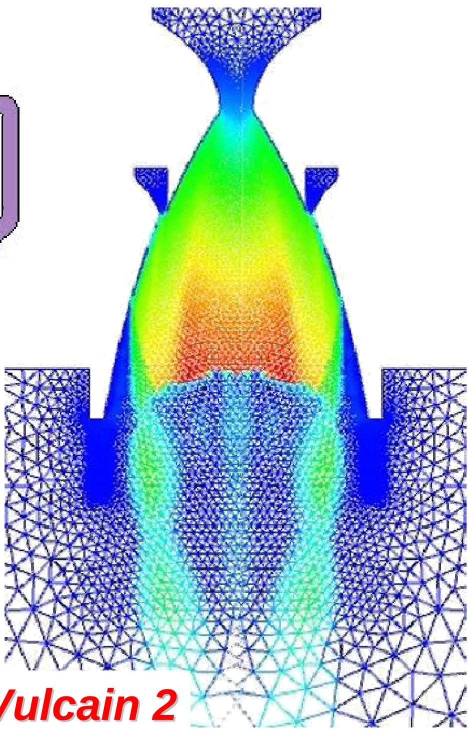
- 5 : régime intermédiaire subsonique – supersonique avec choc à l'extérieur en aval de la tuyère



Exemple : la tuyère de la V2 …

Exemple : les tuyères Vulcain (fusées Ariane) …





Vulcain 2

Vulcain

Informations via Internet : "Université virtuelle"

http://uv.ulb.ac.be/

L'Université Virtuelle

ULB

CTI

Connexion

Nom d'utilisateur:

Mot de passe:

OK

Liste des cours

CNST-H-200 - Mécanique des solides et des fluides (G.Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

CNST-H-303 - Analyse des structures (G. Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

CNST-H-403 - Méthode des éléments finis (structures) (G. Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

CNST-H-421 - Structural Analysis and Finite Elements (G. Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

CNST-H-508 - Méthode des éléments finis (compléments) (G. Warzée)
Formateurs de section: Guy WARZÉE

CNST-H-200
Mécanique des solides et des fluides

.... Cercle de Mohr interactif
.... aide-mémoire pour l'examen écrit
.... modalités d'examens

BATir

SERVICE CONSTRUCTION, ARCHITECTURE ET URBANISME
DEPARTMENT OF BUILDING, ARCHITECTURE AND TOWN PLANNING

ULB

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

Fin